

УДК 531.7.08

Ю. Г. Ведміцький;

В. В. Кухарчук, д-р техн. наук, проф.

## МОМЕНТ ІНЕРЦІЇ ДЕФОРМОВАНОГО ЦИЛІНДРА

*Розглянуто задачу дослідження зміни моменту інерції механічних та електромеханічних систем з обертальною формою руху внаслідок повільної фізичної деформації їх рухомих частин, у зв'язку з чим на основі розробленої математичної моделі моменту інерції деформованого фізичного тіла циліндричної форми проведено математичний аналіз деяких видів існуючих деформацій і отримані прикладні аналітичні співвідношення для визначення моментів інерції тіл з деформаціями 1-го та 2-го типів. На їх основі розроблено систему параметрів для оцінювання кількісної та якісної зміни моменту інерції фізичних тіл внаслідок таких деформацій та побудовано графічні залежності зміни коефіцієнта моменту інерції для деформацій 1-го і 2-го типів.*

### Вступ

Момент інерції є одним із найважливіших параметрів механічних та електромеханічних систем з обертальною формою руху, оскільки визначає їх інерційні властивості. Будь-яка зміна моменту інерції системи в часі завжди призводить до зміни її характеристик і за певних обставин така зміна може виявитися критичною щодо дієздатності системи.

Звичайно, передумовами зміни моменту інерції механічних і електромеханічних систем можуть бути різні обставини, однак в усіх без винятку випадках причиною стає перерозподіл фізичної маси обертових частин цих систем в просторі (деформація).

Найнебезпечнішими є *повільні деформації*, тобто такі, які відбуваються протягом тривалого часу. Це пояснюється тим, що, по-перше, такі деформації довго залишаються непомітними, часто навіть під час цільових обстежень системи, по-друге, їх дестабілізуюча дія починається відразу і під час роботи системи ні на мить не припиняється, а лише посилюється зі збільшенням ступеня деформації, і, по-третє, аварійні ситуації, до яких врешті-решт призводять такі деформації, є, звичайно ж, непередбачуваними.

Тому задача дослідження зміни моменту інерції механічних та електромеханічних систем з обертальною формою руху внаслідок повільної фізичної деформації їх рухомих частин стає проблемною і набуває актуальності.

Ця задача породжує щонайменше *три окремих напрямки*: перший з них — це вивчення обставин, що призводять до зміни моменту інерції системи; другий — дослідження самої зміни моменту інерції системи та оцінка критичності такої зміни; третій — вплив зміни моменту інерції системи на інші її динамічні характеристики. Всі три напрямки взаємопов'язані.

*Метою роботи* є аналітичне дослідження зміни моменту інерції фізичного тіла *циліндричної* форми з рівномірним розподілом маси в ньому за повільних деформацій, оскільки саме до таких об'єктів з прийнятною точністю можна звести більшість з відомих систем з обертальною формою руху.

Поставлену задачу розв'яжемо методом декомпозиції.

### 1. Математична модель моменту інерції деформованого циліндра

1) Теорія моментів інерції, як складова геометрії мас, розроблена для систем із *статичним* розподілом маси в просторі [1—4] і потребує узагальнення на випадок довільного неперіодичного руху та можливої асиметричної зміни просторового розподілу маси системи в часі, що має поставити в залежність від часу і величину моменту інерції системи.

Однак оскільки задача, сформульована нами, поширюється тільки на системи, деформація яких відбувається протягом тривалого часу, тобто настільки повільно, що ці системи відносно розподілу маси в них можна вважати квазістационарними, то це дозволяє під час розв'язання задачі та розробки математичної моделі безпосередньо скористатися основними положеннями відомої теорії моментів інерції.

2) Перш за все, необхідно домовитися, що надалі вісь, відносно якої буде визначатися момент інерції, водночас є і віссю обертання циліндричного тіла.

Як відомо з теорії моментів інерції [2—3], момент інерції однорідного прямого колового циліндра (рис. 1) відносно власної поздовжньої осі симетрії

$$J_0 = \frac{1}{2} \pi \rho H R^4, \tag{1}$$

де  $\rho$  — густина маси речовини тіла,  $H$  і  $R$  — відповідно його довжина та радіус. Цей момент інерції є найменшим за інших рівних умов, оскільки вісь обертання проходить через центр мас циліндричного тіла. Якщо ж вісь циліндра відносно осі обертання буде зміщена зі збереженням паралельності на відстань  $d$ , то, відповідно до теореми Гюйгенса-Штейнера, момент інерції системи має збільшитися і стати рівним:

$$J_1 = J_0 + \pi \rho H R^2 d^2. \tag{2}$$

3) Визначимо момент інерції *деформованого* колового циліндра (рис. 2) відносно осі обертання (вісь  $O_x$ ).

Пряме обчислення моменту інерції деформованого циліндра шляхом розбиття його на елементарні об'єми  $\Delta V$  (заштрихована область на рис. 2) з координатами  $x, y, z$ , відстанню  $r_k(x, y, z)$  до осі обертання і масою  $\Delta m = \rho \Delta V$  та подальшим послідовним переходом від інтегральної суми  $\sum_{k=1}^N [r_k(x, y, z)]^2 \Delta m_k$  до потрійного, а потім і до трикратного інтегралу

$$J = \rho \int_V [r(x, y, z)]^2 dV = \rho \int_0^{X_1} \left\{ \int_{-R+f(x)}^{R+f(x)} \left[ \int_{-\sqrt{R^2-[y-f(x)]^2}}^{\sqrt{R^2-[y-f(x)]^2}} [r(x, y, z)]^2 dz \right] dy \right\} dx,$$

не є доцільним у зв'язку зі складністю геометрії довільно деформованого тіла та відсутністю симетрії в ній.

Остання обставина унеможливує спрощення обчислення трикратного інтегралу і за умови переходу від декартової координатної системи до циліндричної та заміною змінних інтегрування.

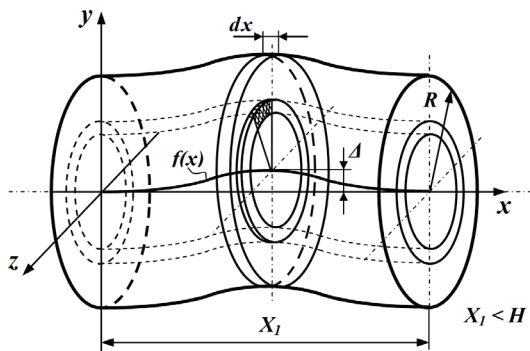


Рис. 2. Деформований коловий циліндр

Тому розв'яжемо цю задачу *інакше*.

Вісь циліндра за умови його довільної деформації являє собою гладку криву  $\Gamma$ , що в загальному випадку задана деякою неперервною функцією  $y = f(x)$  (див. рис. 2). Неперервність самої функції та її похідних зумовлена фізичними властивостями речовини циліндричного тіла та умовою його неруйнівної деформації.

Розшаруємо деформоване циліндричне тіло на перпендикулярні до осі обертання елементарні циліндри малої довжини  $dx$  таким чином, щоб упродовж кожного з них відстань між віссю обертання і власною віссю елементарного циліндра залишалась незмінною.

Вочевидь, що ця відстань буде дорівнювати значенню функції  $f(x)$  у відповідній координаті  $x$  елементарного циліндра.

На підставі формули (1) запишемо момент інерції елементарного циліндра відносно його власної осі  $dJ_0 = \frac{1}{2} \pi \rho R^4 dx$ .

Як видно з рис. 2, у випадку деформації циліндра кожний з його елементарних циліндрів буде зміщений від осі обертання на величину  $f(x)$ . Тоді, відповідно до теореми Гюйгенса-Штейнера, момент інерції будь-якого елементарного циліндра має зрости. Визначимо його, скориставшись (2),

$$dJ = dJ_0 + \pi \rho R^2 [f(x)]^2 dx = \frac{1}{2} \pi \rho R^4 dx + \pi \rho R^2 [f(x)]^2 dx.$$

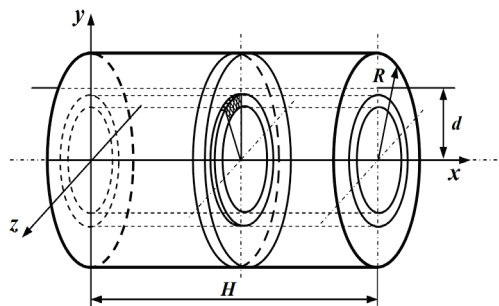


Рис. 1. Однорідний прямий коловий циліндр

Після інтегрування за координатою  $x$  та нескладних математичних перетворень отримаємо момент інерції довільно деформованого циліндра відносно осі обертання:

$$J = \frac{1}{2} \pi \rho R^4 X_1 + \pi \rho R^2 \int_0^{X_1} [f(x)]^2 dx, \quad (3)$$

де  $X_1$  є координатою на осі  $O_x$  кінцевої точки кривої  $\Gamma$  за умови, що координатою її початкової точки буде точка початку координат цієї осі (див. рис. 2). Для недеформованого циліндра маємо  $X_1 = H$  (див. рис. 1), а у випадку його поперечної і за відсутності поздовжньої деформацій (відносно осі  $O_x$ ) —  $X_1 < H$  (рис. 2).

4) Задача визначення координати  $X_1$  породжує окрему математичну задачу. Сформулюємо її.

Припустимо існує деяка, обмежена точками  $A$  і  $B$ , плоска гладка крива  $\Gamma$ , яка цілком належить площині  $O_{xy}$ . Нехай ця крива задана неперервною функцією  $y = f(x)$ , де  $x \in [X_0; X_1]$  (рис. 3).

Тоді довжина кривої  $\Gamma$ , відповідно до [1], визначається як

$$L = \int_{X_0}^{X_1} \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx. \quad (4)$$

З (4) випливає, що за зміни функціонального відношення між  $y$  та  $x$  (зміни форми кривої  $\Gamma$ ) змінюється і її довжина. Тобто в загальному випадку довжина  $L$  є числовою функцією, що визначена на деякій множині функцій  $y = f(x)$ , і являє собою функціонал  $L(y)$ .

Якщо ж накласти умову незмінності значення функціоналу  $L(y) = \text{const} = H$  за умови зміни самої функції  $y = f(x)$ , то збереження тотожності в (4) має призвести до зміни меж інтегрування  $X_0$  та  $X_1$ . В цьому випадку довжина відрізка  $[X_0; X_1]$  являє собою числову функцію, визначену на класі функцій  $y = f(x)$ , що за додаткової умови  $X_0 = 0$  для будь-якої фіксованої функції  $y = f(x)$  перетворює вираз (4) в математичне рівняння

$$\int_0^{X_1} \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx = H, \quad (5)$$

в якому невідомою величиною є верхня межа інтеграла  $X_1$ .

5) Таким чином, отримані рівняння (3) і (5) в сукупності

$$\begin{cases} J = \frac{1}{2} \pi \rho R^4 X_1 + \pi \rho R^2 \int_0^{X_1} [f(x)]^2 dx; \\ \int_0^{X_1} \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx = H. \end{cases} \quad (6)$$

утворюють систему рівнянь і складають узагальнену математичну модель моменту інерції довільно деформованого циліндричного тіла.

## 2. Моменти інерції деформацій 1-го та 2-го типів

1) Наразі для подальшого розв'язування задач і дослідження зміни моменту інерції системи та оцінки критичності такої зміни постає проблема визначення форми кривої  $\Gamma$  та класів функцій  $y = f(x)$ , що задають цю криву.

Звісно, що в загальному випадку неруйнівні деформації циліндричного тіла можуть бути різними, а отже різними можуть бути і функції  $y = f(x)$ . Однак ті деформації, за яких система з обертальною формою руху ще зберігає дієздатність та знаходиться в експлуатації, в більшості випадків мають певні характерні особливості, які, відповідно, позначаються і на властивостях фу-

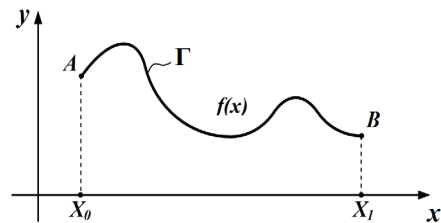


Рис. 3. До визначення координати  $X_1$

нкцій  $y = f(x)$ . Так, відомо, що власні осі початку та кінця деформованого циліндричного тіла механічної або електромеханічної системи збігаються з віссю обертання (рис. 4), а найбільш деформована ділянка в багатьох випадках являє собою або поодинокий максимум, який знаходиться

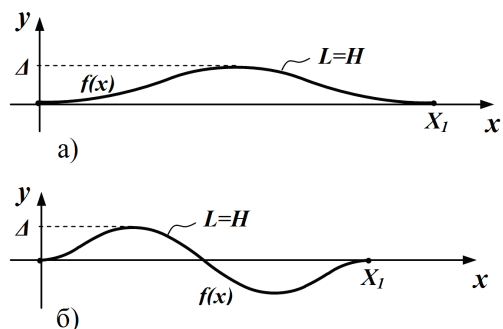


Рис. 4. Деформації 1-го та 2-го типів

посередині цієї ділянки (рис. 4а), або симетричний відносно осі обертання максимум-мінімум (рис. 4б).

Вочевидь, що це пояснюється закономірністю розподілу сил деформації під час обертального руху системи і є окремою фізичною задачею.

Тоді ж, коли деформація є відмінною від означених, в багатьох випадках існує можливість подати складну деформовану ділянку через окремі сегменти з більш простими деформаціями.

Отже, враховуючи сказане, для шуканих класів функцій мають місце бути нульові крайові умови  $y_0 = f(0) = 0$  та  $y_1 = f(X_1) = 0$  або з одним максимумом посередині відрізка  $[0; X_1]$  для деформації 1-го

типу, або двома протилежними екстремумами для деформації 2-го типу.

Аналіз вищесказаного показує, що наведені властивості притаманні класу функцій

$$y = \frac{\Delta}{2} \left( 1 - \cos \frac{2\pi}{X_1} x \right) \tag{7}$$

в першому випадку і класу функцій

$$y = \Delta \sin \frac{2\pi}{X_1} x \tag{8}$$

в другому, де  $\Delta$  — максимальне відхилення власної осі деформованого циліндра від осі обертання (рис. 4).

Наразі оберемо ці функції (7) та (8) для апроксимації існуючих деформацій в їх першому наближенні.

2) Деформація 1-го типу.

Відповідно до (6) та (7) для цього виду деформації маємо:

$$\begin{cases} J = \frac{1}{2} \pi r R^4 X_1 \left( 1 + \frac{3}{4} \frac{\Delta^2}{R^2} \right); \\ \int_0^{X_1} \sqrt{1 + \frac{\pi^2 \Delta^2}{X_1^2} \left( \sin \frac{2\pi}{X_1} x \right)^2} dx = H. \end{cases} \tag{9}$$

Розв'яжемо друге рівняння в (9) відносно  $X_1$ .

Оскільки ліва частина цього рівняння являє собою такий еліптичний інтеграл, вираження якого через спеціальні функції, зокрема через еліптичний інтеграл Лежандра другого роду  $E(\varphi, k)$ , що затабульований в області дійсних (а не комплексних) чисел, неможливе, то не можливим є і пряме розв'язування поставленої задачі.

Тому розв'яжемо задачу інакше.

Для цього подамо довжину частини кривої (7)  $L_{кр}$ , що спирається на точки  $A$  і  $B$  (рис. 5), через довжину відрізка  $L_{пр}$ , що лежить між ними

$$L_{кр} = K(\Delta, X_1) L_{пр}, \tag{10}$$

де  $K(\Delta, X_1)$  — коефіцієнт пропорційності, який в загальному випадку залежить від  $\Delta$  та  $X_1$ . З

рис. 5 випливає, що  $L_{пр} = \sqrt{\Delta^2 + \frac{X_1^2}{4}}$ . Дещо перепишемо це співвідношення  $L_{пр} = \frac{1}{2} X_1 \sqrt{1 + 4 \frac{\Delta^2}{X_1^2}}$

та підставимо його в (10).

Тоді для  $L_{кр}$  можна записати

$$L_{кр} = \frac{1}{2} F(\Delta, X_1) X_1. \quad (11)$$

де  $F(\Delta, X_1) = K(\Delta, X_1) \sqrt{1 + 4 \frac{\Delta^2}{X_1^2}}$  — деяка функція двох змінних.

З іншого боку, довжина кривої  $L_{кр}$ , відповідно до (4) та (7), дорівнює:

$$L_{кр} = \int_0^{\frac{X_1}{2}} \sqrt{1 + \frac{\pi^2 \Delta^2}{X_1^2} \left( \sin \frac{2\pi}{X_1} x \right)^2} dx. \quad (12)$$

Співвіднесемо формули (11) з (12), попередньо помноживши та поділивши праву частину останнього виразу на  $\frac{X_1}{2}$ :

$$\frac{1}{2} F(\Delta, X_1) X_1 = \frac{1}{2} \left[ \frac{X_1}{X_1} \int_0^{\frac{X_1}{2}} \sqrt{1 + \frac{\pi^2 \Delta^2}{X_1^2} \left( \sin \frac{2\pi}{X_1} x \right)^2} dx \right] X_1. \quad (13)$$

Звідки для функції  $F(\Delta, X_1)$  маємо

$$F(\Delta, X_1) = \frac{2}{X_1} \int_0^{\frac{X_1}{2}} \sqrt{1 + \frac{\pi^2 \Delta^2}{X_1^2} \left( \sin \frac{2\pi}{X_1} x \right)^2} dx. \quad (14)$$

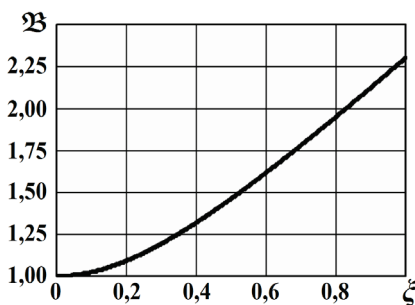


Рис. 6. Графік функції  $\mathfrak{B}(\xi)$

Тепер перейдемо від функції  $F(\Delta, X_1)$  до функції однієї змінної  $\mathfrak{B}(\xi)$ , подавши змінну  $\xi$  як  $\xi = \frac{\Delta}{X_1}$ . Для цього, дотримуючись умови

$$F(\Delta, X_1) = \mathfrak{B}(\xi), \quad (15)$$

перепишемо (14) таким чином:

$$\mathfrak{B}(\xi) = 2\xi \int_0^{\frac{1}{2\xi}} \sqrt{1 + \pi^2 \xi^2 (\sin 2\pi \xi \tau)^2} d\tau, \quad (16)$$

де  $\tau = \frac{x}{\Delta}$ . Графік функції  $\mathfrak{B}(\xi)$  наведено на рис. 6.

З огляду на (11), (15) та (16) можна записати  $L_{кр} = \frac{1}{2} \mathfrak{B}(\xi) X_1$ . Врахувавши, що  $L_{кр} = \frac{1}{2} H$  (рис. 4а), отримаємо рівняння:

$$\mathfrak{B}(\xi) X_1 = H. \quad (17)$$

У випадку загальнішого підходу у визначенні  $X_1$  рівняння (17) можна, що нескладно довести, подати у загальній формі  $\zeta \mathfrak{B}(\xi) = \xi$  з розв'язком  $\xi = \zeta \mathfrak{B} \{ \zeta \mathfrak{B} [ \zeta \mathfrak{B} (\dots) ] \}$ , де  $\zeta = \frac{\Delta}{H}$ , а  $\mathfrak{B} [ \zeta \mathfrak{B} (\dots) ]$  являє собою нескінченну композицію

$$\mathfrak{B} [ \zeta \mathfrak{B} (\dots) ] = 2 \zeta \mathfrak{B} (\dots) \int_0^{\frac{1}{2 \zeta \mathfrak{B} (\dots)}} \sqrt{1 + \pi^2 [ \zeta \mathfrak{B} (\dots) ]^2 \{ \sin 2\pi [ \zeta \mathfrak{B} (\dots) ] \tau \}^2} d\tau.$$

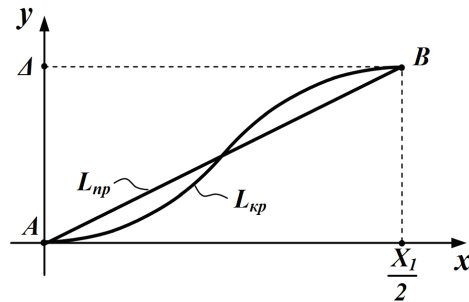


Рис. 5. До визначення  $X_1$

Однак рівняння (17) у випадку апроксимації функції  $\mathfrak{B}(\xi)$  поліномом, що не перевищує 4-го степеня, може бути представлено канонічною формою алгебраїчного рівняння і розв'язане у радикалах відносно  $X_1$ . Скористаємося цим.

Як показує аналіз, функція  $\mathfrak{B}(\xi)$  за умови  $\Delta \gg X_1$  набуває чітко вираженої лінійності і для великих значень  $\xi$  може бути апроксимована лінійною функцією  $B(\xi) = a_0 \xi + a_1$ .

Однак на практиці зазвичай  $\Delta \ll X_1$  (або ж, у крайньому разі,  $\Delta \sim X_1$ ), і робочою є нелінійна ділянка. Тому наближена функція має бути поліном степеня  $1 < n \leq 4$ .

Отже, замістимо функцію  $\mathfrak{B}(\xi)$  в області малих значень  $\xi$  наближеною квадратичною функцією

$$B(\xi) = a_0 \xi^2 + a_1 \xi + 1. \tag{18}$$

Підставимо (18) в (17) і отримане рівняння  $X_1^2 + (a_1 \Delta - H)X_1 + a_0 \Delta^2 = 0$  розв'яжемо відносно  $X_1$ :

$$X_1 = \frac{1}{2} H \left[ \left( 1 - a_1 \frac{\Delta}{H} \right) \pm \sqrt{\left( 1 - a_1 \frac{\Delta}{H} \right)^2 - 4 a_0 \frac{\Delta^2}{H^2}} \right].$$

Оскільки за умови  $\Delta = 0$   $X_1 = H$ , менший корінь відкинемо.

Формула також накладає обмеження на  $\zeta$ . Внаслідок того, що  $X_1 \in \mathbf{R}$ , відношення  $\frac{\Delta}{H}$  не повинно перевищувати  $\frac{1}{a_1 - 2\sqrt{a_0}}$ , якщо  $\frac{\Delta}{H} > \frac{1}{a_1}$ , або бути завжди меншим  $\frac{1}{a_1 + 2\sqrt{a_0}}$  у всіх інших випадках. Однак фізична умова  $X_1 \geq 0$  заперечує існування нерівності  $\frac{\Delta}{H} > \frac{1}{a_1}$  і тому у всіх без виключення фізично спроможних випадках

$$0 \leq \frac{\Delta}{H} < \frac{1}{a_1 + 2\sqrt{a_0}}. \tag{19}$$

Таким чином, для деформації 1-го типу момент інерції циліндричного тіла відповідно до (9) набуде вигляду

$$J = \frac{1}{4} \pi \rho R^4 H \left[ \left( 1 - a_1 \frac{\Delta}{H} \right) + \sqrt{\left( 1 - a_1 \frac{\Delta}{H} \right)^2 - 4 a_0 \frac{\Delta^2}{H^2}} \right] \left( 1 + \frac{3}{4} \frac{\Delta^2}{R^2} \right). \tag{20}$$

Для інтерполяційного квадратичного тричлена (18) за наявності на відрізку  $\xi \in [\xi_0; \xi_2]$ , де  $\xi_0 = 0$ , а  $\xi_2 = 0,25$ , двох фіксованих вузлових точок  $B(\xi_0) = 1$  і  $B(\xi_2) = 1,14$  та третьої —  $B(\xi_1)$ , де  $\xi_0 < \xi_1 < \xi_2$ , положення якої знаходимо шляхом мінімізації функції  $F(\xi_1) = \int_{\xi_0}^{\xi_2} |\mathfrak{B}(\xi) - B(\xi_1, \xi)| d\xi$  з результатом  $\xi_1 = 0,125$ , маємо коефіцієнти  $a_0 = 2,075$ ,  $a_1 = 0,041$ .

Умова  $\xi \in [\xi_0; \xi_2]$  в свою чергу накладає обмеження на відношення  $\frac{\Delta}{H}$ . Нескладно довести, що за заданої умови має місце відношення

$$\frac{\xi_0}{a_0 \xi_0^2 + a_1 \xi_0 + 1} \leq \frac{\Delta}{H} \leq \frac{\xi_2}{a_0 \xi_2^2 + a_1 \xi_2 + 1}.$$

В нашому випадку  $\frac{\Delta}{H} \in [0; 0,22]$ . Це цілком узгоджується з умовою (19), відповідно до якої

$$0 \leq \frac{\Delta}{H} < 0,342.$$

Тоді, підставивши значення інтерполяційних коефіцієнтів в (19), для моменту інерції деформованого циліндра отримаємо:

$$J = 0,25 \pi \rho R^4 H \left[ \left( 1 - 0,041 \frac{\Delta}{H} \right) + \sqrt{\left( 1 - 0,041 \frac{\Delta}{H} \right)^2 - 8,3 \frac{\Delta^2}{H^2}} \right] \left( 1 + 0,75 \frac{\Delta^2}{R^2} \right) \quad (21)$$

або з прийнятною точністю  $\left( 0 \leq \delta \left( \frac{\Delta}{H} \right) \leq 1 \% \right)$

$$J \approx 0,25 \pi \rho R^4 H \left( 1 + \sqrt{1 - 8,3 \frac{\Delta^2}{H^2}} \right) \left( 1 + 0,75 \frac{\Delta^2}{R^2} \right).$$

3) Деформація 2-го типу.

На підставі (6) та (8) для цього виду деформації можна записати

$$\begin{cases} J = \frac{1}{2} \pi \rho R^4 X_1 \left( 1 + \frac{\Delta^2}{R^2} \right); \\ \int_0^{X_1} \sqrt{1 + \frac{4\pi^2 \Delta^2}{X_1^2} \left( \cos \frac{2\pi}{X_1} x \right)^2} dx = H. \end{cases} \quad (22)$$

Подібно до попереднього випадку для деформації 2-го типу маємо

$$X_1 = \frac{1}{2} H \left[ \left( 1 - 2a_1 \frac{\Delta}{H} \right) + \sqrt{\left( 1 - 2a_1 \frac{\Delta}{H} \right)^2 - 16a_0 \frac{\Delta^2}{H^2}} \right].$$

Тоді відповідно до (22) момент інерції

$$J = \frac{1}{4} \pi \rho R^4 H \left[ \left( 1 - 2a_1 \frac{\Delta}{H} \right) + \sqrt{\left( 1 - 2a_1 \frac{\Delta}{H} \right)^2 - 16a_0 \frac{\Delta^2}{H^2}} \right] \left( 1 + \frac{\Delta^2}{R^2} \right). \quad (23)$$

У випадку  $a_0 = 0,755$ ,  $a_1 = 0,55$  на відрізку  $\frac{\Delta}{H} \in [0; 0,21]$

$$J = \frac{1}{4} \pi \rho R^4 H \left[ \left( 1 - 1,1 \frac{\Delta}{H} \right) + \sqrt{\left( 1 - 1,1 \frac{\Delta}{H} \right)^2 - 12,08 \frac{\Delta^2}{H^2}} \right] \left( 1 + \frac{\Delta^2}{R^2} \right). \quad (24)$$

### 3. Дослідження зміни моменту інерції

1) Для оцінки ступеня зміни моменту інерції деформованого циліндра порівняно з недеформованим введемо новий параметр системи — *коефіцієнт зміни моменту інерції* (*коефіцієнт моменту інерції*), який визначимо як

$$\omega_J = \frac{J}{J_0}. \quad (25)$$

Відповідно до (25) коефіцієнт моменту інерції показує, в скільки разів змінюється момент інерції циліндра (порівняно з недеформованим) внаслідок його деформації.

Порівнявши (3) і (1) для загального випадку, маємо:

$$\omega_J = \frac{X_1 + 2 \int_0^{X_1} \frac{[f(x)]^2}{R^2} dx}{H}.$$

Якщо подати чисельник в останній формулі як

$$H_{\text{екв}} = X_1 + 2 \int_0^{X_1} \frac{[f(x)]^2}{R^2} dx,$$

де  $H_{\text{екв}}$  назвемо *еквівалентною довжиною деформованого циліндра*, то для коефіцієнта моменту інерції можна записати

$$\omega_J = \frac{H_{\text{екв}}}{H}.$$

Еквівалентна довжина являє собою довжину такого недеформованого прямого колового циліндра, момент інерції якого буде дорівнювати моменту інерції власне деформованого циліндра.

Абсолютною зміною моменту інерції під час деформації назвемо різницю  $\Delta J = J - J_0$ , відносною —  $\delta J = \frac{\Delta J}{J_0} \cdot 100 \%$ . Вочевидь, що

$$\delta J = (\omega_J - 1) \cdot 100 \%. \tag{26}$$

2) Коефіцієнт моменту інерції для деформації 1-го типу, як це впливає з формул (1), (21) і (25), дорівнює

$$\omega_J = 0,5 \left[ \left( 1 - 0,041 \frac{\Delta}{H} \right) + \sqrt{\left( 1 - 0,041 \frac{\Delta}{H} \right)^2 - 8,3 \frac{\Delta^2}{H^2}} \right] \left( 1 + 0,75 \frac{\Delta^2}{R^2} \right) \tag{27}$$

і являє собою функцію трьох змінних  $\omega_J = f(\Delta, H, R)$  (рис. 7а).

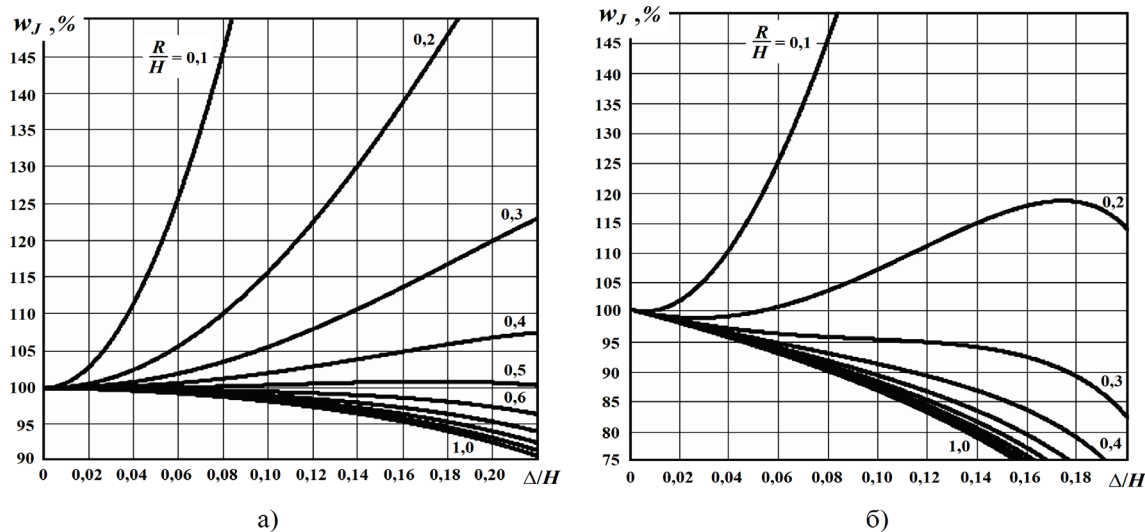


Рис. 7. Графічні залежності коефіцієнтів моменту інерції для деформації 1-го і 2-го типів

3) Коефіцієнт моменту інерції для деформації 2-го типу отримаємо на підставі аналізу виразів (1), (24) і (25)

$$\omega_J = 0,5 \left[ \left( 1 - 1,1 \frac{\Delta}{H} \right) + \sqrt{\left( 1 - 1,1 \frac{\Delta}{H} \right)^2 - 12,08 \frac{\Delta^2}{H^2}} \right] \left( 1 + \frac{\Delta^2}{R^2} \right). \tag{28}$$

Графіки цієї функції в залежності від  $\frac{\Delta}{H}$  за різного співвідношення між довжиною циліндра  $H$  та його радіусом  $R$  наведені на рис. 7б.

Докладніші графічні дослідження зміни коефіцієнтів моменту інерції для деформацій 1-го і 2-го типів наведено в роботі [4].



4) Аналіз отриманих функцій показує, що зміна коефіцієнта моменту інерції  $\omega_J$ , а отже, і самого моменту інерції  $J$ , під час деформації циліндра як 1-го, так і 2-го типів не є однозначною і суттєво залежить від співвідношення між максимальним відхиленням  $\Delta$  власної осі деформованого циліндра, довжиною циліндра  $H$  і його радіусом  $R$ . Як видно з рис. 7а і б, за певного співвідношення між  $H$  і  $R$  момент інерції деформованого циліндричного тіла на заданих відрізках може не тільки монотонно зростати (що, власне, і очікувалось), *але і зменшуватися!* Крім того функції  $\omega_J = f(\Delta, H, R)$  для деформацій обох типів на вказаних відрізках за деяких умов здатні мати кілька екстремумів. І нарешті момент інерції в окремих випадках може проявляти квазіінваріантність навіть до суттєвих деформацій. Така зміна моменту інерції пояснюється протилежним і складним характером залежності від  $\Delta$  співмножників, що входять до формул (21) і (27) для деформації 1-го типу та формул (24) і (28) для деформації 2-го типу відповідно.

Кількісний аналіз функцій  $\omega_J = f(\Delta, H, R)$  доводить, що навіть за незначних деформацій зміна моменту інерції може стати критичною. Проте остаточний висновок щодо критичності необхідно робити для кожної механічної чи електромеханічної системи окремо.

### Висновки

В роботі розглянуто задачу дослідження зміни моменту інерції механічних та електромеханічних систем з обертальною формою руху внаслідок їх повільної фізичної деформації, у зв'язку з чим розроблено узагальнену математичну модель моменту інерції довільно деформованого фізичного тіла циліндричної форми, що дозволило провести математичне дослідження деяких поширених на практиці видів деформацій і отримати прикладні співвідношення для моментів інерції тіл з деформаціями 1-го та 2-го типів. На їх основі розроблена система параметрів для оцінювання кількісної та якісної зміни моменту інерції фізичних тіл внаслідок повільних деформацій, побудовані графічні залежності зміни коефіцієнта моменту інерції для деформацій 1-го і 2-го типів та проведено їх аналіз.

### СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Овчинников П. П. Вища математика : підруч.. У 2 ч. Ч. 1 / П. П. Овчинников, Ф. П. Яремчук, В. М. Михайленко. — 3-тє вид., випр. — К. : Техніка, 2003. — 600 с. — ISBN 966-575-055-0.
2. Павловський М. А. Теоретична механіка: підруч. / М. А. Павловський. — 2-ге вид., стер. — К. : Техніка, 2004. — 512 с. — ISBN 966-575-002-X.
3. Гернет М. М. Определение моментов инерции / М. М. Гернет, В. Ф. Ратобильский. — М. : Машиностроение, 1969. — 248 с.
4. Ведміцький Ю. Г. Вплив повільних деформацій на момент інерції механічних та електромеханічних систем / Ю. Г. Ведміцький, В. В. Кухарчук // Вісник Кременчуцького державного політехнічного університету ім. Михайла Остроградського. — 2007. — Випуск 3/2007(44), Частина 1. — С. 148—152.

Рекомендована кафедрою теоретичної електротехніки та електричних вимірювань

Надійшла до редакції 9.06.09  
Рекомендована до друку 1.09.09

**Ведміцький Юрій Григорович** — асистент, **Кухарчук Василь Васильович** — завідувач кафедри.

Кафедра теоретичної електротехніки та електричних вимірювань, Вінницький національний технічний університет