УДК 681.5.015+62-83:629.433

О. Б. Мокін, канд. техн. наук, доц.;
Б. І. Мокін, д-р техн. наук, проф.

ОПТИМІЗАЦІЯ РУХУ ПОРОЖНЬОГО ЕЛЕКТРИЧНОГО ТРАНСПОРТНОГО ЗАСОБУ ПО ПРЯМОЛІНІЙНІЙ ГОРИЗОНТАЛЬНІЙ КОЛІЇ

Подано результати розв'язання задачі оптимізації руху порожнього електричного транспортного засобу по прямолінійному відрізку колії, прокладеній на горизонтальній площині. Показано, що оптимальний закон для струму якірних кіл тягового електропривода електричного транспортного засобу, що рухається порожняком, суттєво відрізняється від оптимального закону для струму якірних кіл електропривода в разі повної завантаженості цього електричного транспортного засобу.

Постановка задачі і вихідні передумови

В роботі [1] показано, чому відомі методи оптимізації руху електричних транспортних засобів з навантаженням, яке залежить від рельєфу місцевості, на якій прокладена залізнична колія, не можуть бути застосованими для розв'язання конкретних практичних задач, і запропоновано підхід, оснований на декомпозиції задачі оптимізації руху вздовж усієї траєкторії на сукупність підзадач оптимізації руху на відрізках, обмежених точками зміни рельєфу місцевості, в яких накладені умови гладкості як для траєкторії руху транспортного засобу, так і для кривої, яка є графіком швидкості руху цією траєкторією.

В роботі [2] поставлена підзадача оптимізації руху транспортного засобу з електричною тягою на прямолінійному відрізку залізничної колії, прокладеному на горизонтальній площині (відрізок NB на рис. 1 в роботі [1]), за критерієм мінімуму витрат електроенергії, який приведено, як і усі інші вихідні передумови, до відносних величин, з використанням яких підзадача набуває такого формулювання: знайти оптимальні за критерієм мінімуму витрат відносної енергії

$$e = \int_{\tau_N}^{\tau_B} i d\tau \tag{1}$$

закони зміни у відносному часі τ для відносної лінійної швидкості руху v електричного транспортного засобу та відносного струму i якірних кіл його тягового електропривода на відносному прямолінійному горизонтальному відрізку колії s_{NB}, по якому цей транспортний засіб, динаміка якого описується у відносних величинах моделлю

$$\frac{dv}{d\tau} = i\varphi(i) - f_0 - f_1 v - f_2 v^2 \tag{2}$$

з відносними граничними умовами

$$v(N) = v_N; \tag{3}$$

$$v(B) = v_B; \tag{4}$$

$$\frac{dv}{d\tau}(N) = v'_N; \tag{5}$$

$$\frac{dv}{d\tau}(B) = v'_B \tag{6}$$

рухається за програмою

$$s_{NB} = \int_{\tau_N}^{\tau_B} v d\tau . \tag{7}$$

Як виражаються усі відносні одиниці в співвідношеннях (1)—(7) через іменовані та базові показано в роботі [2], тому у цій роботі ми на їх отриманні зупинятись не будемо.

В роботі [3] показано, що крива намагнічування $\Phi(I)$ тягового електродвигуна постійного струму з послідовним збудженням найбільш точно і просто у відносних одиницях представляється моделлю

$$\phi(i) = \begin{cases} -a_2 i^2 + b_2 i, & i \in [0, i_{cn}); \\ a_1 + b_1 i, & i \in [i_{cn}, \infty), \end{cases} \tag{8}$$

яка являє собою сукупність параболи і прямої, що стикуються зі значенням аргументу i_{cn}. Оскільки справедливою є нерівність $i_{cn} < i_н$, або $i_{cn} < 1$ (що одне і те ж), то можна стверджувати, що в разі повної завантаженості електричного транспортного засобу електродвигуни його електроприводa працюють на прямолінійній частині характеристики намагнічування, а в разі руху порожняком — на параболічній.

В роботі [4] розв'язана задача оптимізації руху електричного транспортного засобу, що рухається прямолінійно в горизонтальній площині, з його повною завантаженістю, тобто для випадку, коли робоча гілка кривої намагнічування тягових електродвигунів має математичну модель у вигляді прямої лінії

$$\phi(i) = a_1 + b_1 i . \tag{9}$$

В цій роботі ми розв'яжемо задачу оптимізації руху електричного транспортного засобу, що рухається теж прямолінійно і теж в горизонтальній площині, але порожняком, тобто для випадку, коли робоча гілка кривої намагнічування тягових електродвигунів має математичну модель у вигляді параболи

$$\phi(i) = -a_2 i^2 + b_2 i, \quad i \in [0, i_{cn}) . \tag{10}$$

Синтез математичних моделей для $i(t)$, $v(t)$

Як і в роботі [4], функція Лагранжа для нашої задачі матиме вигляд

$$L = i + \lambda_0 (s' - v) + \lambda_1 \left(v' - i\varphi(i) + f_0 + f_1 v + f_2 v^2 \right), \tag{11}$$

а рівняння Ейлера —

$$L_i - \frac{d}{d\tau} L_{i'} = 0; \tag{12}$$

$$L_s - \frac{d}{d\tau} L_{s'} = 0; \tag{13}$$

$$L_v - \frac{d}{d\tau} L_{v'} = 0 . \tag{14}$$

Підставляючи функцію Лагранжа (11) в рівняння (12)—(14) та знаходячи відповідні частинні похідні і виконуючи диференціювання за відносним часом, як і в роботі [4], матимемо:

$$1 - \lambda_1 \left(\varphi(i) + i \frac{d\varphi}{di} \right) = 0 ; \tag{15}$$

$$-\frac{d\lambda_0}{d\tau} = 0 ; \tag{16}$$

$$-\lambda_0 + \lambda_1 (f_1 + 2 f_2 v) - \frac{d\lambda_1}{d\tau} = 0 . \tag{17}$$

Як і в роботі [4], з рівняння (16) знайдемо, що

$$\lambda_0 = -C_0, \tag{18}$$

а з рівнянь (17), (18) —

$$\frac{d\lambda_1}{C_0 + \lambda_1\left(f_1 + 2f_2 v\right)} = d\tau. \tag{19}$$

Інтегруючи рівняння (19), матимемо:

$$\frac{1}{f_1 + 2f_2 v}\ln\left(C_0 + \lambda_1\left(f_1 + 2f_2 v\right)\right) = \tau + C_1, \tag{20}$$

або

$$\lambda_1 = \frac{1}{f_1 + 2f_2 v}\left(e^{(\tau + C_1)(f_1 + 2f_2 v)} - C_0\right). \tag{21}$$

Як і в роботі [4], підставляючи значення λ_1 із виразу (21) в рівняння (15), отримаємо:

$$\varphi(i) + i\frac{d\varphi}{di} = \frac{f_1 + 2f_2 v}{e^{(\tau + C_1)(f_1 + 2f_2 v)} - C_0}. \tag{22}$$

А далі шляхи розв’язання задачі розходяться, оскільки підстановка значення $\varphi(i)$ із виразу (10) в (22) приводить до співвідношення

$$-3a_2 i^2 + 2b_2 i = \frac{f_1 + 2f_2 v}{e^{(\tau + C_1)(f_1 + 2f_2 v)} - C_0}, \tag{23}$$

яке суттєво відрізняється від аналогічного співвідношення в роботі [4] для завантаженого електричного транспортного засобу.

Рівняння (23) доцільніше подати у вигляді

$$i^2 - \frac{2b_2}{3a_2}i + \frac{1}{3a_2}\left(\frac{f_1 + 2f_2 v}{e^{(\tau + C_1)(f_1 + 2f_2 v)} - C_0}\right) = 0, \tag{24}$$

з якого легко побачити, що відносно струму — це квадратне рівняння, коренями якого є

$$i_{1,2} = \frac{b_2}{3a_2} \pm \sqrt{\frac{b_2^2}{9a_2^2} - \frac{1}{3a_2}\left(\frac{f_1 + 2f_2 v}{e^{(\tau + C_1)(f_1 + 2f_2 v)} - C_0}\right)}. \tag{25}$$

Виходячи з того, що нам потрібен струм, який мінімізує критерій (1), нас влаштовує лише одне значення із (25), а саме:

$$i = \frac{b_2}{3a_2} - \sqrt{\frac{b_2^2}{9a_2^2} - \frac{1}{3a_2}\left(\frac{f_1 + 2f_2 v}{e^{(\tau + C_1)(f_1 + 2f_2 v)} - C_0}\right)}. \tag{26}$$

Тож математичною моделлю (26) ми і задаємо оптимальний закон для струму електродвигунів електропривода електричного транспортного засобу, у якому a_2, b_2, f_1, f_2 — попередньо визначені коефіцієнти, а C_0, C_1 — невідомі параметри, які визначатимуться в процесі подальшого розв’язання задачі оптимізації. Із виразу (26) випливає також, що оптимальний струм якірних кіл електропривода транспортного засобу трансцендентно залежить від лінійної швидкості його руху, тож тепер ми перейдемо до побудови математичної моделі для неї.

Як і в роботі [4], для побудови оптимальних законів руху об’єктів з навантаженням, що залежить від їхньої лінійної швидкості, будемо використовувати ортогональні поліноми Лагерра

$$L_k(\tau) = \frac{1}{k!}e^{\tau}\frac{d^k}{d\tau^k}\left(\tau^k e^{-\tau}\right) = \sum_{i=0}^{k}(-1)^i\frac{k!}{(k-i)!\,i!\,i!}\tau^i, \quad k = 0, 1, \ldots, n, \tag{27}$$

тобто у нашому випадку будемо задавати лінійну швидкість v електричного транспортного засобу на часовому відрізку $[\tau_N, \tau_B]$, за який транспортний засіб долає відрізок шляху, у нашому випадку — NB (рис. 1 в роботі [1]) у вигляді

$$v(\tau) = \sum_{k=0}^{n} g_k L_k(\tau), \tag{28}$$

де
$$g_k = \int_{\tau_N}^{\tau_B} v(\tau) L_k(\tau) d\tau, \quad k = 0, 1, \ldots, n. \tag{29}$$

Оскільки функція $v(\tau)$ невідома, то коефіцієнти Фур'є g_k цієї функції у виразі (28) в задачі оптимізації будемо знаходити не з виразу (29), а з системи рівнянь, складеної відносно них як невідомих величин. Очевидно, що рівнянь у системі повинно бути стільки, скільки коефіцієнтів для виразу (28) ми хочемо знайти. Але у нас є ще два невідомих коефіцієнти C_0, C_1, поява яких зумовлена розв'язанням задачі оптимізації з використанням рівнянь Ейлера. Тож, крім рівнянь, в яких в якості невідомих величин виступають коефіцієнти Фур'є g_k функції $v(\tau)$, нам необхідно мати ще два рівняння додатково, де в якості невідомих виступають ще й коефіцієнти C_0, C_1.

З тих же причин, що викладені в роботі [4], будемо використовувати в математичній моделі лінійної швидкості (28) лише кілька ортогональних поліномів Лагерра, перші п'ять із яких згідно з виразом (27) мають вигляд:

$$\begin{gathered} L_0(\tau) = 1,\ L_1(\tau) = 1 - \tau; \\ L_2(\tau) = 1 - 2\tau + \frac{\tau^2}{2};\ L_3(\tau) = 1 - 3\tau + \frac{3}{2}\tau^2 - \frac{1}{6}\tau^3; \\ L_4(\tau) = 1 - 4\tau + 3\tau^2 - \frac{2}{3}\tau^3 + \frac{1}{24}\tau^4, \end{gathered} \tag{30}$$

яким відповідають п'ять коефіцієнтів Фур'є g_0, g_1, g_2, g_3, g_4. Для їх визначення потрібно мати систему із 5 рівнянь, в яких вони виступатимуть невідомими.

Як і в роботі [4], потрібні 5 рівнянь знаходяться підстановкою виразу (28) в рівняння граничних умов (3)—(6) і програми руху (7), в результаті чого матимемо:

$$v_N = \sum_{k=0}^{4} g_k L_k(\tau_N); \tag{31}$$

$$v_B = \sum_{k=0}^{4} g_k L_k(\tau_B); \tag{32}$$

$$v'_N = \sum_{k=0}^{4} g_k L'_k(\tau_N); \tag{33}$$

$$v'_B = \sum_{k=0}^{4} g_k L'_k(\tau_B); \tag{34}$$

$$s_{NB} = \int_{\tau_N}^{\tau_B} \left(\sum_{k=0}^{4} g_k L_k(\tau) \right) d\tau. \tag{35}$$

Вирази (31)—(35) — це система 5 лінійних рівнянь з 5 невідомими, яка легко розв'язується методом Гауса, тож наступний етап розв'язання поставленої задачі ми починаємо вже маючи математичну модель лінійної швидкості у вигляді (28), в яку ми підставляємо отримані в результаті розв'язання системи рівнянь (31)—(35) числові значення коефіцієнтів Фур'є, множину яких позначимо

$$\left\{ g_0^*, g_1^*, g_2^*, g_3^*, g_4^* \right\}. \tag{36}$$

Тепер перейдемо до завершального етапу розв'язання задачі оптимізації — визначення числових значень коефіцієнтів C_0, C_1, для чого необхідно мати два рівняння, в яких ці коефіцієнти виступатимуть в якості невідомих. Ці рівняння ми сконструюємо, використовуючи вирази (5), (6), (2), (26), (28) і (36). Підставляючи (26), (28) і (36) в (2), а результат підстановки — в (5) і (6), отримаємо:

$$a_2 \cdot \left[\frac{b_2}{3a_2} - \sqrt{\frac{b_2^2}{9a_2^2} - \frac{1}{3a_2}\left(\frac{f_1 + 2f_2 \sum\limits_{k=0}^{4} g_k L_k(\tau_N)}{e^{(\tau + C_1)\left(f_1 + 2f_2 \sum\limits_{k=0}^{4} g_k L_k(\tau_N)\right)} - C_0} \right)} \right]^3 -$$

$$- b_2 \cdot \left[\frac{b_2}{3a_2} - \sqrt{\frac{b_2^2}{9a_2^2} - \frac{1}{3a_2}\left(\frac{f_1 + 2f_2 \sum\limits_{k=0}^{4} g_k L_k(\tau_N)}{e^{(\tau + C_1)\left(f_1 + 2f_2 \sum\limits_{k=0}^{4} g_k L_k(\tau_N)\right)} - C_0} \right)} \right]^2 +$$

$$+ f_0 + f_1 \sum_{k=0}^{4} g_k L_k(\tau_N) + f_2 \left(\sum_{k=0}^{4} g_k L_k(\tau_N) \right)^2 + v'_N = 0; \tag{37}$$

$$a_2 \cdot \left[\frac{b_2}{3a_2} - \sqrt{\frac{b_2^2}{9a_2^2} - \frac{1}{3a_2}\left(\frac{f_1 + 2f_2 \sum\limits_{k=0}^{4} g_k L_k(\tau_B)}{e^{(\tau + C_1)\left(f_1 + 2f_2 \sum\limits_{k=0}^{4} g_k L_k(\tau_B)\right)} - C_0} \right)} \right]^3 -$$

$$- b_2 \cdot \left[\frac{b_2}{3a_2} - \sqrt{\frac{b_2^2}{9a_2^2} - \frac{1}{3a_2}\left(\frac{f_1 + 2f_2 \sum\limits_{k=0}^{4} g_k L_k(\tau_B)}{e^{(\tau + C_1)\left(f_1 + 2f_2 \sum\limits_{k=0}^{4} g_k L_k(\tau_B)\right)} - C_0} \right)} \right]^2 +$$

$$+ f_0 + f_1 \sum_{k=0}^{4} g_k L_k(\tau_B) + f_2 \left(\sum_{k=0}^{4} g_k L_k(\tau_B) \right)^2 + v'_B = 0 \tag{38}$$

— систему двох рівнянь з двома невідомими C_0, C_1, розв'язуючи яку одним із стандартних методів послідовних наближень, знайдемо множину числових значень цих невідомих

$$\left\{ C_0^*, C_1^* \right\}. \tag{39}$$

Підставляючи множини (36), (39) у вирази (28), (26), отримаємо математичні моделі для $v(\tau)$, $i(\tau)$, побудовою яких досягається поставлена мета, тобто розв'язується поставлена задача.

Порівнюючи вирази (26), (36), (39), отримані для випадку руху порожнього електричного транспортного засобу, з аналогічними виразами, отриманими в роботі [4] для цього ж транспортного засобу в разі його повного завантаження, бачимо, що вони суттєво відрізняються.

Висновки

1. Показано як побудувати математичну модель для лінійної швидкості руху порожнього електричного транспортного засобу по прямолінійній горизонтальній дільниці колії у випадку, коли задаються не лише програма руху на цій дільниці і значення лінійної швидкості у граничних точках траєкторії руху, але і значення прискорення у цих же граничних точках.

2. Здійснено синтез математичної моделі для оптимального струму якірних кіл електропривода порожнього електричного транспортного засобу, завдяки реалізації якої досягається мінімум витрат електроенергії на виконання програми руху цього транспортного засобу по прямолінійній дільниці між заданими граничними точками траєкторії руху.

3. Показано, що моделі оптимального струму для завантаженого і порожнього електричного транспортного засобу під час руху по тій самій прямолінійній горизонтальній дільниці колії суттєво відрізняються.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Мокін О. Б. Особливості моделювання руху електричних транспортних засобів з врахуванням залежності навантаження від рельєфу місцевості [Електронний ресурс] / О. Б. Мокін, Б. І. Мокін // Наукові праці ВНТУ. — 2010. — № 1. — Режим доступу до журн. : http://www.nbuv.gov.ua/e%2Djournals/VNTU/2010-1/uk/10mbidot_uk.pdf.

2. Мокін О. Б. Відносні моделі руху електричного транспортного засобу по горизонтальному прямолінійному відрізку колії / О. Б. Мокін, Б. І. Мокін // Вісник Вінницького політехнічного інституту. — 2010. — № 2. — С. 20—24.

3. Мокін Б. І., Мокін О. Б. Ідентифікація параметрів моделей та оптимізація режимів системи електропривода трамвая з тяговими електродвигунами постійного струму : моногр. — Вінниця : УНІВЕРСУМ-Вінниця, 2008. — 92 с.

4. Мокін О. Б. Математичні моделі в задачі оптимізації електропривода трамвая в номінальному режимі та в режимі перевантаження за критерієм мінімуму витрат електроенергії / О. Б. Мокін, Б. І. Мокін // Проблеми енерго-ресурсозбереження в електротехнічних системах. Наука, освіта і практика : матеріали міжнародної науково-технічної конференції (м. Кременчук) // Вісник Кременчуцького державного політехнічного університету імені Михайла Остроградського. — Кременчук : КДПУ, 2010. — Випуск 3/2010 (62). — С. 193—196.

Рекомендована кафедрою відновлювальної енергетики та транспортних електричних систем і комплексів

Надійшла до редакції 6.04.10
Рекомендована до друку 27.05.10

Мокін Олександр Борисович — завідувач кафедри; ***Мокін Борис Іванович*** — професор.

Кафедра відновлювальної енергетики та транспортних електричних систем і комплексів, Вінницький національний технічний університет