УДК 004.627+517.962.27

В. А. Лужецький, д. т. н., проф.;
В. М. Михалевич, д. т. н., проф.;
О. В. Михалевич, студ.;
В. А. Каплун

ЩІЛЬНІСТЬ ЗАПОВНЕННЯ РЯДУ НАТУРАЛЬНИХ ЧИСЕЛ ЧЛЕНАМИ ЛІНІЙНИХ РЕКУРЕНТНИХ ПОСЛІДОВНОСТЕЙ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

Сформульовано та доведено властивість про кількість m-значних чисел довільної лінійної рекурентної послідовності, для якої кожний член, починаючи з третього, дорівнює сумі двох попередніх. Подібні властивості становлять інтерес з погляду можливого стиснення та шифрування інформації. Отримано співвідношення для обчислення порядкових номерів і кількості m-значних чисел в послідовності. Встановлено таблицю розподілу можливої кількості m-значних чисел вказаної послідовності.

Вступ

Дослідження способів подання великих чисел маленькими за допомогою нелінійних співвідношень дозволить розробляти нові способи стиснення та шифрування інформації. Ефективність даного підходу залежить від щільності заповнення ряду натуральних чисел подібними представленнями В роботі розглянуто дослідження щільності заповнення ряду натуральних чисел членами будь-якої лінійної рекурентної послідовності, для якої кожний член, починаючи з третього, дорівнює сумі двох попередніх.

Основна частина

В [1, с. 40] сформульована така *властивість* послідовності чисел Фібоначчі.

В послідовності чисел Фібоначчі для $m > 2$ зустрічається не менше 4 і не більше 5 m-значних чисел.

Розглянемо узагальнені послідовності Фібоначчі [2], а саме послідовності, для яких кожний член, починаючи з третього, дорівнює сумі двох попередніх:

$$u_1, u_2, \ldots, u_n = u_{n-2} + u_{n-1}, \ldots; \quad n = 2, 3, 4, \ldots, \tag{1}$$

де u_1, u_2 — невід’ємні цілі числа.

Сформулюємо *властивість*.

Будь-яка послідовність чисел, що визначається співвідношенням (1), для $m > 2$ містить 4 або 5 m-значних чисел.

Розглянемо декілька варіантів доведення цієї властивості.

Варіант 1. В [1] доведення цього твердження не наведено, але у вказівці (с. 187) рекомендується спочатку довести такі допоміжні нерівності:

$$F_{n+3} \le 8F_n; \;\; F_{n+5} \ge \frac{21}{2} F_n, \quad n = 2, 3, \ldots, \tag{2}$$

де F_n ($n \in N$) — числа Фібоначчі.

Скористаємося відомим співвідношенням [3, с. 15]

$$F_{n+m} = F_{n-1}F_m + F_n F_{m+1}, \quad n \in N . \tag{3}$$

Оскільки в послідовності чисел Фібоначчі кожний попередній член, починаючи з другого, не менший наступного, тобто

$$F_{n-1} \le F_n, \quad n \in N , \tag{4}$$

то з (3), для $m = 3$, отримаємо:

$$F_{n+3} = 2F_{n-1} + 3F_n \le 5F_n, \quad n \in N . \tag{5}$$

Із нерівності (4), з урахуванням формули для загального члена (1) випливає, що кожний попередній член послідовності (1), починаючи з другого, є більшим половини наступного, отже для $m = 5$ із (3) обчислимо:

$$F_{n+5} = 5F_{n-1} + 8F_n \geq \frac{21}{2} F_n, \quad n > 1. \tag{6}$$

Отже, ми довели нерівності (2) (очевидно, що в [1] допущена друкарська помилка: в першій нерівності (2) замість числа 8 має стояти число 5).

Скористаємося таким співвідношенням для членів послідовності (1) [4, с. 21]

$$u_n = u_1 F_{n-2} + u_2 F_{n-1}, \quad n \in N, \tag{7}$$

Тоді, з урахуванням (5), визначимо

$$u_{n+3} = u_1 F_{(n-2)+3} + u_2 F_{(n-1)+3} \leq u_1 5F_{n-2} + u_2 5F_{n-1} = 5u_n, \quad n \in N, \tag{8}$$

а з урахуванням (6) — $u_{n+5} = u_1 F_{(n-2)+5} + u_2 F_{(n-1)+5} \geq u_1 \frac{21}{2} F_{n-2} + u_2 \frac{21}{2} F_{n-1} = \frac{21}{2} u_n, \quad n \in N$. (9)

Доведемо сформульовану властивість про кількість m-значних чисел у послідовності (1). Позначимо через u_n найменше з m-значних чисел послідовності. Це означає, що

$$u_n \geq 10^{m-1}, \ \ u_{n-1} < 10^{m-1}; \ \ m > 2. \tag{10}$$

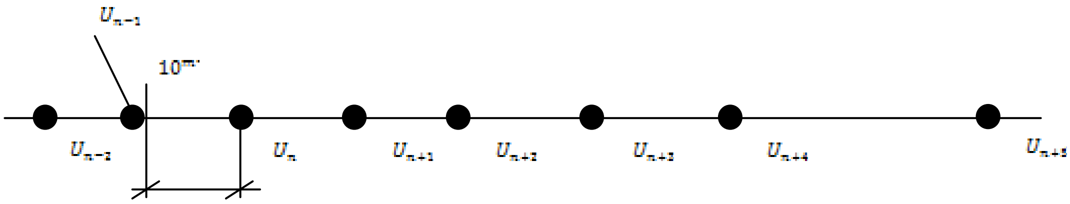
Позначимо
$$\Delta = u_n - 10^{m-1}. \tag{11}$$

Із рекурентного співвідношення для чисел послідовності (1) випливає, що

$$u_{n-2} = u_n - u_{n-1}. \tag{12}$$

Порівнюючи (11), (12), з урахуванням другої нерівності (10), визначимо (рис.)

$$\Delta < u_{n-2} \Rightarrow \ \Delta < 10^{m-1}. \tag{13}$$



Геометрична інтерпретація розташування чисел послідовності (1)

Із (12) та останніх нерівностей випливає

$$u_n < 2 \cdot 10^{m-1}. \tag{14}$$

Із останньої нерівності з урахуванням (8) отримаємо нерівність

$$u_{n+3} < 10 \cdot 10^{m-1} = 10^m, \quad n \geq 3, \tag{15}$$

згідно з якою, з урахуванням першої нерівності (10), випливає, що у напіввідкритий інтервал [10^{m-1}; 10^m), який визначає множину m-значних натуральних чисел, попадають всі числа u_n, u_{n+1}, u_{n+2}, u_{n+3}, тобто, принаймні чотири числа послідовності (1).

Доведемо, що в указаний інтервал попадає не більше п’яти чисел послідовності (1). З урахуванням (9) та першої нерівності (10) отримаємо:

$$u_{n+5} \geq 10{,}5 \cdot 10^{m-1} > 10^m, \quad n \geq 3, \tag{16}$$

звідки і випливає, що шосте число підмножини послідовності (1), яка починається з числа u_n, виходить за межі інтервалу, що визначає множину m-значних натуральних чисел. Це і означає, що m-значних чисел послідовності (1) не може бути більше п’яти.

Згідно з наведеним варіантом доведення можна зробити висновок, що кількість m-значних чисел послідовності (1) не менша чотирьох та не більша п’яти, але звідси не випливає, що в залежності від m в указаній послідовності обов’язково зустрічається як 4, так і 5 m-значних чисел.

Варіант 2. Запишемо формулу Біне
$$F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\sqrt{5}}, \tag{17}$$
де
$$\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}; \quad \beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}. \tag{18}$$
З урахуванням (7) матимемо:
$$u_n = u_1 \frac{\alpha^{n-2} - \beta^{n-2}}{\sqrt{5}} + u_2 \frac{\alpha^{n-1} - \beta^{n-1}}{\sqrt{5}}. \tag{19}$$
Перепишемо (19) в такому вигляді:
$$u_n = u_1 \frac{\alpha^{n-2}}{\sqrt{5}} + u_2 \frac{\alpha^{n-1}}{\sqrt{5}} - u_1 \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{n-2} - u_2 \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{n-1}. \tag{20}$$
В першу чергу нас цікавитиме діапазон не менш як 8—9-значних чисел. При цьому $n \geq 36$ і
$$\left|\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{n-2}\right| < 0,62 \cdot 10^{-14}, \quad n \geq 36, \tag{21}$$
а отже і
$$\left| u_1 \cdot \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{n-2} + u_2 \cdot \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{n-1} \right| < 10^{-10} \tag{22}$$
за умови
$$n \geq 36, \quad 0 < u_1 < 10^3, \quad 0 < u_2 < 10^3. \tag{23}$$
Отже, на основі (20), загальний член послідовності можна подати у вигляді
$$u_n \approx \frac{\alpha^n}{\sqrt{5}} \left(\frac{u_2 - u_1}{\alpha} + u_1 \right). \tag{24}$$
Сформульовану властивість про кількість m-значних чисел у послідовності буде доведено, якщо довести, що розв'язками нерівності
$$10^{m-1} \leq \frac{\alpha^n}{\sqrt{5}} \left(\frac{u_2 - u_1}{\alpha} + u_1 \right) < 10^m \tag{25}$$
для довільних $m > 2$ є не менше чотирьох та не більше п'яти значень n.

В результаті елементарних перетворень та логарифмування останні нерівності зведемо до такого вигляду
$$\frac{0,5 \cdot \lg 5 + m - \lg\left(\frac{u_2 - u_1}{\alpha} + u_1 \right)}{\lg \alpha} - \frac{1}{\lg \alpha} \leq n < \frac{0,5 \cdot \lg 5 + m - \lg\left(\frac{u_2 - u_1}{\alpha} + u_1 \right)}{\lg \alpha}. \tag{26}$$
Надалі використовуватимемо такі позначення [5, с. 88]: $\lfloor x \rfloor$ — найбільше ціле, яке менше або дорівнює x; $\lceil x \rceil$ — найменше ціле, не менше x.

З використанням властивостей функцій $\lfloor \square \rfloor$, $\lceil \square \rceil$ [5, с. 95], нерівності (23) набувають вигляду:
$$\left\lceil \frac{0,5 \cdot \lg 5 + m - \lg\left(\frac{u_2 - u_1}{\alpha} + u_1 \right)}{\lg \alpha} - \frac{1}{\lg \alpha} \right\rceil \leq n < \left\lceil \frac{0,5 \cdot \lg 5 + m - \lg\left(\frac{u_2 - u_1}{\alpha} + u_1 \right)}{\lg \alpha} \right\rceil, \tag{27}$$
звідки отримаємо співвідношення для визначення шуканого числа членів k_n
$$k_n = \left\lceil \frac{0,5 \cdot \lg 5 + m - \lg\left(\frac{u_2 - u_1}{\alpha} + u_1 \right)}{\lg \alpha} \right\rceil - \left\lceil \frac{0,5 \cdot \lg 5 + m - \lg\left(\frac{u_2 - u_1}{\alpha} + u_1 \right)}{\lg \alpha} - \frac{1}{\lg \alpha} \right\rceil. \tag{28}$$
Оскільки для додатних x, y, які не приймають цілих значень, справджується співвідношення
$$\lceil x - y \rceil = \lceil x \rceil - \lceil y \rceil + \lceil \{x\} - \{y\} \rceil, \tag{29}$$

де через $\{x\}$ позначена дробова частина числа x, то із (25) отримаємо:

$$k_n = \left\lceil \frac{1}{\lg\alpha} \right\rceil - \left\lceil \left\{ \frac{0,5 \cdot \lg 5 + m - \lg\left(\frac{u_2 - u_1}{\alpha} + u_1\right)}{\lg\alpha} \right\} - \left\{ \frac{1}{\lg\alpha} \right\} \right\rceil. \tag{30}$$

Оскільки $\frac{1}{\lg\alpha} \approx 4,784972$, то

$$\left\lceil \frac{1}{\lg\alpha} \right\rceil = 5, \left\{ \frac{1}{\lg\alpha} \right\} \approx 0,78972. \tag{31}$$

тоді співвідношення (27) набуде вигляду

$$k_n = 5 - \left\lceil \left\{ \frac{0,5 \cdot \lg 5 + m - \lg\left(\frac{u_2 - u_1}{\alpha} + u_1\right)}{\lg\alpha} \right\} - \left\{ \frac{1}{\lg\alpha} \right\} \right\rceil, \tag{32}$$

причому очевидно, що

$$\left\lceil \left\{ \frac{0,5 \cdot \lg 5 + m}{\lg\alpha} \right\} - \left\{ \frac{1}{\lg\alpha} \right\} \right\rceil = \begin{cases} 0, & \left\{ \frac{0,5 \cdot \lg 5 + m - \lg\left(\frac{u_2 - u_1}{\alpha} + u_1\right)}{\lg\alpha} \right\} \le \left\{ \frac{1}{\lg\alpha} \right\} \approx 0,79; \\ 1, & \left\{ \frac{0,5 \cdot \lg 5 + m - \lg\left(\frac{u_2 - u_1}{\alpha} + u_1\right)}{\lg\alpha} \right\} > \left\{ \frac{1}{\lg\alpha} \right\} \approx 0,79. \end{cases} \tag{33}$$

Звідси і випливає, що число n може набувати тільки два значення — 4 або 5:

$$k_n = \begin{cases} 5, & \left\{ \frac{0,5 \cdot \lg 5 + m - \lg\left(\frac{u_2 - u_1}{\alpha} + u_1\right)}{\lg\alpha} \right\} \le \left\{ \frac{1}{\lg\alpha} \right\} \approx 0,78972; \\ 4, & \left\{ \frac{0,5 \cdot \lg 5 + m - \lg\left(\frac{u_2 - u_1}{\alpha} + u_1\right)}{\lg\alpha} \right\} > \left\{ \frac{1}{\lg\alpha} \right\} \approx 0,78972. \end{cases} \tag{34}$$

У разі $u_1 = u_2$ співвідношення (34) набуває вигляду:

$$k_n = \begin{cases} 5, & \left\{ \frac{0,5 \cdot \lg 5 + m - \lg(u_1)}{\lg\alpha} \right\} \le \left\{ \frac{1}{\lg\alpha} \right\} \approx 0,78972; \\ 4, & \left\{ \frac{0,5 \cdot \lg 5 + m - \lg(u_1)}{\lg\alpha} \right\} > \left\{ \frac{1}{\lg\alpha} \right\} \approx 0,78972. \end{cases} \tag{35}$$

Для $u_1 = u_2 = 1$ матимемо послідовність чисел Фібоначчі, для якої співвідношення (34) набуває вигляду:

$$k_n = \begin{cases} 5, & \left\{ \frac{0,5 \cdot \lg 5 + m}{\lg\alpha} \right\} \le \left\{ \frac{1}{\lg\alpha} \right\} \approx 0,78972; \\ 4, & \left\{ \frac{0,5 \cdot \lg 5 + m}{\lg\alpha} \right\} > \left\{ \frac{1}{\lg\alpha} \right\} \approx 0,78972. \end{cases} \tag{36}$$

Шляхом проведення безпосередніх обчислювальних експериментів в середовищі системи символьної математики Maple було проведено перевірку правильності співвідношення (34) для таких діапазонів варіювання аргументів: $m = 8…20$, $u_1 = 1…300$, $u_2 = 1…300$.

Фіксуванням двох параметрів із трьох і зміною третього параметра в указаному діапазоні досліджували відносну частоту появи значень $k_n = 4$, $k_n = 5$. На основі отриманих даних побудовано таблицю розподілу можливої кількості k_n m-значних чисел послідовності (1)

$(k_n)_i$	4	5
p_i	0,21	0,79

Цей самий результат випливає зі співвідношення (34) та припущення про рівномірний розподіл чисел $\left\{ \left(0,5 \cdot \lg 5 + m - \lg \left(u_2 - u_1/\alpha + u_1 \right) \right) \big/ \lg \alpha \right\}$.

Другий варіант доведення дозволив:

1. Визначити, що можлива кількість k_n m-значних чисел послідовності (1) може дорівнювати 4 або 5 в залежності від значень m, u_1, u_2;
2. Здобути співвідношення для визначення порядкових номерів m-значних чисел в послідовності (1) (нерівності (24));
3. Отримати формулу (36) для обчислення кількості k_n m-значних чисел послідовності (1) в залежності від значень m, u_1, u_2.

Очевидно, що щільність заповнення ряду натуральних чисел членами окремої рекурентної послідовності (1) є дуже малою уже для $m > 4$ і швидко зменшується з ростом m. Це спричиняє необхідність подальших досліджень. В подальших роботах планується отримати оцінки для визначення кількості m-значних чисел серед членів найбільш загальних лінійних послідовностей другого порядку.

Висновки

1. Подано два варіанти доведення властивості про кількість m-значних чисел послідовності (1).
2. Встановлено кількість k_n m-значних чисел послідовності (1) дорівнює 4 або 5 в залежності від m та значень перших двох чисел послідовності.
3. Отримано співвідношення для обчислення, як порядкових номерів m-значних чисел в послідовності, так і кількості таких чисел.
4. Установлено таблицю розподілу можливої кількості m-значних чисел послідовності (1).
5. Сформульовано задачі подальших досліджень.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Алфутова Н. Б. Алгебра и теория чисел. Сборник задач для математических школ. / Н. Б. Алфутова, А. В. Устинов. — М. : МЦНМО, 2002. — 264 с. — ISBN 5-94057-038-0.
2. Гарднер М. Крестики — нолики ; пер. с англ. / М. Гарднер. — М. : Мир, 1988. —352 с. — ISBN 5-03-001234-6.
3. Воробьёв Н. Н. Числа Фибоначчи / Н. Н. Воробьёв. — Наука, 1978. — 144 с.
4. Маркушевич А. И. Возвратные последовательности / А. И. Маркушевич. — М. : Наука, 1975.
5. Грэхем Р. Конкретная математика. Основание информатики ; пер. с англ. / Р. Грэхем, Д. Кнут, О. Паташник. — М. : Мир, 1998. — 703 с. — ISBN 5-03-001793-3.

Рекомендована кафедрою захисту інформації

Надійшла до редакції 19.02.10
Рекомендована до друку 25.02.10

Лужецький Володимир Андрійович — завідувач кафедри, ***Михалевич Олексій Володимирович*** — студент, ***Каплун Валентина Аполінаріївна*** — старший викладач;

Кафедра захисту інформації;

Михалевич Володимир Маркусович — завідувач кафедри вищої математики.

Вінницький національний технічний університет