ІНФОРМАЦІЙНІ ТЕХНОЛОГІЇ ТА КОМП'ЮТЕРНА ТЕХНІКА

УДК 519.6

О. Р. Чертов, канд. техн. наук, доц.;
М. В. Александрова, студ.

НЕОБХІДНІ ТА ДОСТАТНІ УМОВИ НА БАЗИС ДИСКРЕТНОГО ВЕЙВЛЕТ-ПЕРЕТВОРЕННЯ

Проводиться порівняльний аналіз відомих умов, що накладаються на функції, для утворення ними базису диадного дискретного вейвлет-перетворення. Також зіставляються різні способи запису вейвлет-перетворень та надаються рекомендації щодо їхнього застосування.

Вступ, постановка задачі

За допомогою вейвлет-перетворень (ВП) здійснюється частотно-часовий аналіз, результати якого містять як загальну частотну характеристику сигналу (розподіл енергії сигналу за частотними складовими), властиву класичному перетворенню Фур'є, так й інформацію про певні локальні координати, на яких відбувається швидка зміна відповідних частотних складових сигналу. Це досягається за рахунок того, що ВП в якості базисних використовує солітоноподібні функції, графік яких має вигляд невеликих хвиль (вейвлетів), на відміну від визначених на всій числовій осі функцій $\sin x$ та $\cos x$, що застосовуються під час перетворення Фур'є.

ВП наразі активно використовуються для апроксимації функцій, стиснення великих обсягів інформації та її відновлення з несуттєвими втратами (формат JPEG2000, деякі відеокодеки MPEG-4), для дослідження особливостей нелінійних (наприклад, турбулентних) полів, обробки, фільтрації та синтезу сигналів (насамперед, аудіосигналів та зображень), аналізу полів та сигналів різного походження та різних предметних областей (астрофізика, квантова механіка, геофізика, біологія, генетика, статистика, економіка тощо).

Шляхом масштабування (диадне вейвлет-перетворення використовує число 2 в якості коефіцієнта масштабування) та зсуву початкової функції (материнського вейвлету) можна отримати базис простору $L^2(\mathbb{R})$, тобто простору дійсних функцій, квадрат котрих є інтегрованим, за яким і розкладається сигнал. Таким чином, визначається ступінь спорідненості аналізованого сигналу, з еталонним вейвлетом, локалізованим у часовому та частотному просторах.

Очевидно, що за материнський вейвлет не може бути взята довільна функція, оскільки умова утворення базису простору $L^2(\mathbb{R})$ операціями зсуву та масштабування є необхідною. Більш того, визначення конкретного вигляду функцій, що можуть використовуватись за материнські вейвлети біортогональних базисів диадного дискретного ВП, зводиться до розв'язання масштабуючих рівнянь $\varphi(x) = \sqrt{2}\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} h_n \varphi(2x-n)$; $\tilde{\varphi}(x) = \sqrt{2}\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} \tilde{h}_n \tilde{\varphi}(2x-n)$ [1, с. 287]. Функції $\varphi(x)$ та $\tilde{\varphi}(x)$ називаються масштабуючими, або скейлинг-функціями, і визначають вейвлети $\psi(x)$, $\tilde{\psi}(x)$ за формулами $\psi(x) = \sqrt{2}\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} g_n \varphi(2x-n)$ та $\tilde{\psi}(x) = \sqrt{2}\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} \tilde{g}_n \tilde{\varphi}(2x-n)$, де відповідні коефіцієнти обчислюються через скалярний добуток: $g_n = \langle \psi(x), \varphi(2x-n) \rangle$; $\tilde{g}_n = \langle \tilde{\psi}(x), \tilde{\varphi}(2x-n) \rangle$ [1, с. 257, 287].

Сучасна література з вейвлет-аналізу [1—7] містить велику кількість теорем, що визначають умови на функції для утворення ними базису ВП. В залежності від характеру доведення, а також уподобань авторів, ці умови сформульовані або в термінах функцій $\varphi(x)$, $\tilde{\varphi}(x)$, $\psi(x)$, $\tilde{\psi}(x)$, або за допомогою матриць, чи операторів, елементами яких є коефіцієнти h_n, $\tilde{h}_n$, g_n, $\tilde{g}_n$, або через перетворення Фур'є відповідних векторів (фільтрів) $\hat{h}$, $\hat{\tilde{h}}$, $\hat{g}$, $\hat{\tilde{g}}$ тощо. Ситуація ускладнюється тим, що часто різні автори однаковим чином позначають близькі, але, усе ж, різні поняття. Це створює певні незручності у використанні відповідної літератури та співставленні отриманих результатів. Тим більше, що в багатьох публікаціях математичні викладки часто скорочуються чи взагалі не наводяться, а у записах деяких формул інколи зустрічаються неточності.

Мета роботи полягає у проведенні зіставлення необхідних і достатніх умов на базис диадного дискретного ВП в різних термінах, формулюваннях та способах запису. Такий огляд, з одного боку, сприятиме кращому розумінню суті зазначених умов, а з іншого боку, дозволяє на його базі сформувати рекомендації щодо застосування певного способу запису (і відповідного алгоритму реалізації) вейвлет-перетворення в тому чи іншому випадку.

Терміни та позначення

Позначимо перетворення Фур'є низькочастотного фільтра розкладення як $\hat{h}(w) \equiv \sum_n h_n e^{-inw}$, а високочастотного фільтра розкладення як $\hat{g}(w) \equiv \sum_n g_n e^{-inw}$. Аналогічно вводяться фільтри відновлення: низькочастотний $\hat{\tilde{h}}(w)$ та високочастотний $\hat{\tilde{g}}(w)$, які інколи називають двоїстими фільтрами [1, с. 281]. В *ортогональному* випадку фільтри розкладення та відновлення дорівнюють одне одному. Часто замість терміну «перетворення Фур'є» фільтра використовують термін «передатна функція» [1, с. 71]. Також в якості альтернативи розглядають так звану маску, тобто функцію $m_0(w) \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_n h_n e^{-inw}$ [2, с. 233], яка в інших авторів уводиться дещо інакше, а саме: $m_0(w) \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_n h_n e^{-2\pi inw}$ [3, с. 302] чи як $m_0(w) \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_n h_n e^{2\pi inw}$ [4, с. 23]. Використовується і так зване
Z-перетворення $h(z) = \sum_n h_n z^n$, де фактично $z \equiv e^{-iw}$ [5, с. 58].

У цій роботі коефіцієнти фільтрів є виключно дійсними числами, усі дискретні сигнали належать простору $L^2(\mathbb{Z})$, де $\mathbb{Z}$ — множина цілих чисел.

Введемо також такі позначення:

$\varphi_{j,n}(x) \equiv \frac{1}{\left(\sqrt{2}\right)^j} \varphi\left(\frac{x}{2^j} - n\right)$; $\psi_{j,n}(x) \equiv \frac{1}{\left(\sqrt{2}\right)^j} \psi\left(\frac{x}{2^j} - n\right)$ [2, с. 187]. Деякі автори використовують ці ж позначення для інших функції: $\varphi_{j,n}(x) \equiv \left(\sqrt{2}\right)^j \varphi\left(2^j x + n\right)$; $\psi_{j,n}(x) \equiv \left(\sqrt{2}\right)^j \psi\left(2^j x + n\right)$ [4, с. 21]. $\overline{h}_n \equiv h_{-n}$, $\overline{g}_n \equiv g_{-n}$; z^* — комплексно спряжене число до комплексного числа z; $\downarrow c_n \equiv c_{2n}$ — децимація (чи неповна двійкова вибірка в термінології Малла [1, с. 281]) сигналу; $\uparrow c_n \equiv \begin{cases} c_{n/2}, & n = 2k \\ 0, & n = 2k+1 \end{cases}$ — інтерполяція (обернена децимація) сигналу (чи підстановка нулів у термінології Малла [1, с. 282]); $(Hc)_k \equiv \downarrow \left(c * \overline{h}\right)_k = \sum_n c_n h_{n-2k}$; $(Gc)_k \equiv \downarrow \left(c * \overline{g}\right)_k = \sum_n c_n g_{n-2k}$ — оператори апроксимації та деталізації відповідно; $\left(H^{\otimes} c\right)_k \equiv \left(\left(\uparrow c\right) * h\right)_k = \sum_n c_n h_{k-2n}$; $\left(G^{\otimes} c\right)_k \equiv \left(\left(\uparrow c\right) * g\right)_k = \sum_n c_n g_{k-2n}$ — оператори, спряжені до операторів апроксимації та деталізації [3, с. 222].

Аналогічно вводяться оператори $\tilde{H}$, $\tilde{H}^{\otimes}$, $\tilde{G}$, $\tilde{G}^{\otimes}$ [3, с. 317].

ISSN 1997-9266. Вісник Вінницького політехнічного інституту. 2011. № 1

$$\mathbf{M}(G) \equiv \begin{pmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & g_{-1} & g_0 & g_1 & g_2 & g_3 & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & g_{-2} & g_{-1} & g_0 & g_1 & g_2 & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & g_{-3} & g_{-2} & g_{-1} & g_0 & g_1 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$$ — матриця оператора деталізації,

$\mathbf{M}(H)$ — матриця оператора апроксимації (рядки матриць — це зміщені один відносно одного значення фільтрів g і h відповідно).

$$\mathbf{M}(H^{\otimes}) \equiv \left(\mathbf{M}(H)\right)^T = \begin{pmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & h_{-1} & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & h_0 & h_{-2} & \cdots & \cdots \\ \cdots & h_1 & h_{-1} & h_{-3} & \cdots \\ \cdots & h_2 & h_0 & h_{-2} & \cdots \\ \cdots & h_3 & h_1 & h_{-1} & \cdots \\ \cdots & \cdots & h_2 & h_0 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & h_1 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$$ — матриця спряженого оператора апроксимації, $\mathbf{M}(G^{\otimes}) = \left(\mathbf{M}(G)\right)^T$ — матриця спряженого оператора деталізації (стовпчики матриць — це зміщені один відносно одного значення відповідних фільтрів). Аналогічний вигляд мають матриці $\mathbf{M}\left(\tilde{H}\right)$, $\mathbf{M}\left(\tilde{H}^{\otimes}\right)$, $\mathbf{M}\left(\tilde{G}\right)$, $\mathbf{M}\left(\tilde{G}^{\otimes}\right)$ операторів $\tilde{H}$, $\tilde{H}^{\otimes}$, $\tilde{G}$, $\tilde{G}^{\otimes}$ [6, с. 33]. В деяких джерелах розглядаються матриці вигляду $\sqrt{2}\mathbf{M}(H)$ [7, с. 42].

I — тотожній оператор, $\mathbf{E}$ — одинична матриця, $\mathbf{O}$ — нульова матриця, $\vec{1}$ — одиничний вектор, $\left(\vec{1_1}\right)_n \equiv \begin{cases} 1, n = 2k-1 \\ 0, n = 2k \end{cases}$ і $\left(\vec{1_2}\right)_n \equiv \begin{cases} 0, n = 2k-1 \\ 1, n = 2k \end{cases}$, де k — натуральне число, $\vec{h}$, $\vec{g}$, $\vec{\tilde{h}}$, $\vec{\tilde{g}}$ — вектори, елементами яких є коефіцієнти відповідних фільтрів, $\left(\mathbf{F}\vec{h}\right)_n \equiv (-1)^{1-n} h_{1-n}$, де $n \in \mathbb{Z}$.

Фільтр називається *стійким*, якщо для будь-якого обмеженого вхідного сигналу згортка із цим фільтром також дає обмежений сигнал. Необхідною і достатньою умовою стійкості є виконання нерівності $\sum\limits_n |h_n| < \infty$, де h_n — коефіцієнти фільтра [1, с. 70]. Тоді $\left|\hat{h}(w)\right| = \left|\sum\limits_n h_n e^{-inw}\right| \le \sum\limits_n \left|h_n e^{-inw}\right| = \sum\limits_n |h_n| < \infty$, тобто перетворення Фур'є стійкого фільтра завжди обмежене.

Фільтри *зі скінченною імпульсною характеристикою* — це фільтри, які мають скінченну кількість коефіцієнтів h_n, відмінних від нуля.

$\left[\mathbf{H} \,|\, \mathbf{G}\right]_{n\times(m+k)}$ — блочна матриця вигляду $\begin{pmatrix} h_{11} & \cdots & h_{1m} & g_{11} & \cdots & g_{1k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ h_{n1} & \cdots & h_{nm} & g_{n1} & \cdots & g_{nk} \end{pmatrix}$,

де $\mathbf{H}_{n\times m} = \left\|h_{i,j}\right\|$, $\mathbf{G}_{n\times k} = \left\|g_{i,\,j}\right\|$.

Аналогічно для $\mathbf{G}_{k\times m} = \left\|g_{i,\,j}\right\|$ визначається блочна матриця

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H} \\ \hline \mathbf{G} \end{bmatrix}_{(n+k)\times m} = \begin{pmatrix} h_{11} & \cdots & h_{1m} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ h_{n1} & \cdots & h_{nm} \\ g_{11} & \cdots & g_{1m} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ g_{k1} & \cdots & g_{km} \end{pmatrix}.$$

Необхідні та достатні умови точного відновлення сигналу

Теорема Веттерлі [1, с. 282] визначає необхідні та достатні умови на набір фільтрів для точного відновлення сигналу (таблиця, комірка в першому рядку та першому стовпчику).

Беручи обернене перетворення Фур'є умов Веттерлі, отримаємо дві рівності $\left(\sum_k h_{-2k}\tilde{h}_{l-2k} + \sum_k g_{-2k}\tilde{g}_{l-2k}\right) = \left(\sum_k h_{1-2k}\tilde{h}_{l+1-2k} + \sum_k g_{1-2k}\tilde{g}_{l+1-2k}\right) = \delta_l$, які зазвичай записуються у вигляді одного еквівалентного їм рівняння

$$\sum_k \tilde{h}_{n-2k}h_{m-2k} + \sum_k \tilde{g}_{n-2k}g_{m-2k} = \delta_{m-n}.$$

Рівнозначність цих записів можна перевірити, розглядаючи останнє рівняння окремо для парного та непарного m.

Відповідність між формулюваннями умов Веттерлі в термінах коефіцієнтів фільтрів та матриць простіше перевіряється для першої форми запису.

Умови Веттерлі також можна записати в матричному вигляді [1, с. 283] (проте там відповідна рівність наведена з помилкою):

$$\begin{pmatrix} \hat{h}^*(w+\pi) & \hat{g}^*(w+\pi) \\ \hat{h}^*(w) & \hat{g}^*(w) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\tilde{h}}(w) \\ \hat{\tilde{g}}(w) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Співвідношення між деякими умовами, що накладаються на функції, для утворення ними базису вейвлет-перетворення

Передатні функції (перетворення Фур'є) вейвлетів	Фільтри (обернене перетворення Фур'є умов із попереднього стовпчика)	Матриці та вектори	Оператори
$\begin{cases} \hat{h}^*(w+\pi)\hat{\tilde{h}}(w) + \hat{g}^*(w+\pi)\hat{\tilde{g}}(w) = 0; \\ \hat{h}^*(w)\hat{\tilde{h}}(w) + \hat{g}^*(w)\hat{\tilde{g}}(w) = 2 \end{cases}$ [1, с. 282]	$\sum_k \tilde{h}_{n-2k}h_{m-2k} + \sum_k \tilde{g}_{n-2k}g_{m-2k} = \delta_{m-n}$ [3, с. 317], [7, с. 41] — для ортогонального випадку	$\left[\mathbf{M}(\tilde{H}^\otimes) \middle\vert \mathbf{M}(\tilde{G}^\otimes)\right] \times \begin{bmatrix} \mathbf{M}(H) \\ \hline \mathbf{M}(G) \end{bmatrix} = \mathbf{E}$ [6, с. 34]	$\tilde{H}^\otimes H + \tilde{G}^\otimes G = I$ [3, с. 318]
$\hat{h}^*(w)\hat{\tilde{h}}(w) + \hat{h}^*(w+\pi)\hat{\tilde{h}}(w+\pi) = 2$	$\sum_n \tilde{h}_n h_{n-2k} = \delta_k$	$\mathbf{M}(H)\mathbf{M}(\tilde{H}^\otimes) = \mathbf{E}$	$H\tilde{H}^\otimes = I$
$\Leftrightarrow$	$\Leftrightarrow$	$\Leftrightarrow$	$\Leftrightarrow$
$\hat{g}^*(w)\hat{\tilde{g}}(w) + \hat{g}^*(w+\pi)\hat{\tilde{g}}(w+\pi) = 2$	$\sum_n \tilde{g}_n g_{n-2k} = \delta_k$	$\mathbf{M}(G)\mathbf{M}(\tilde{G}^\otimes) = \mathbf{E}$	$G\tilde{G}^\otimes = I$
$\hat{g}^*(w)\hat{\tilde{h}}(w) + \hat{g}^*(w+\pi)\hat{\tilde{h}}(w+\pi) = 0$	$\sum_n \tilde{h}_n g_{n-2k} = 0$	$\mathbf{M}(\tilde{H})\mathbf{M}(G^\otimes) = \mathbf{O}$	$\tilde{H}G^\otimes = 0$
$\Leftrightarrow$	$\Leftrightarrow$	$\Leftrightarrow$	$\Leftrightarrow$
$\hat{h}^*(w)\hat{\tilde{g}}(w) + \hat{h}^*(w+\pi)\hat{\tilde{g}}(w+\pi) = 0$	$\sum_n \tilde{g}_n h_{n-2k} = 0$	$\mathbf{M}(\tilde{G})\mathbf{M}(H^\otimes) = \mathbf{O}$	$\tilde{G}H^\otimes = 0$
[1, с. 283, 285]	в [1, с. 285] формула (7.143) містить помилку, проте (7.140) — правильна		[3, с. 223, 227, 318]

Продовження таблиці

Передатні функції (перетворення Фур'є) вейвлетів	Фільтри (обернене перетворення Фур'є умов із попереднього стовпчика)	Матриці та вектори	Оператори
$\hat{g}(w) \equiv e^{-iw}\hat{\tilde{h}}^*(w+\pi)$ $\hat{\tilde{g}}(w) \equiv e^{-iw}\hat{h}^*(w+\pi)$	$g_n \equiv (-1)^{1-n}\tilde{h}_{1-n}$ $\tilde{g}_n \equiv (-1)^{1-n}h_{1-n}$ [1, с. 284]	$\vec{g} = \left(\mathbf{F}\vec{\tilde{h}}\right)$ $\vec{\tilde{g}} = \left(\mathbf{F}\vec{h}\right)$	
$\hat{g}(0) = \hat{\tilde{g}}(0) = 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \hat{h}(0) = \hat{\tilde{h}}(0) = \sqrt{2}$ [1, с. 287]	$\sum_n g_n = \sum_n \tilde{g}_n = 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \begin{cases} \sum_n h_{2n} = \sum_n h_{2n+1}; \\ \sum_n \tilde{h}_{2n} = \sum_n \tilde{h}_{2n+1} \end{cases} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \sum_n h_n = \sum_n \tilde{h}_n = \sqrt{2}$ [7, с. 34, 38]	$\vec{g}\cdot\vec{1} = \vec{\tilde{g}}\cdot\vec{1} = 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \begin{cases} \vec{h}\cdot\vec{1}_2 = \vec{h}\cdot\vec{1}_1; \\ \vec{\tilde{h}}\cdot\vec{1}_2 = \vec{\tilde{h}}\cdot\vec{1}_1 \end{cases} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \vec{h}\cdot\vec{1} = \vec{\tilde{h}}\cdot\vec{1} = \sqrt{2}$	
$\hat{\tilde{h}}^{(k)}(\pi) = 0$ або $\hat{\psi}^{(k)}(0) = 0$ [1, с. 262]	$\sum_n n^k g_n = \sum_n n^k (-1)^{1-n}\tilde{h}_{1-n} = 0$ [5, с. 134]	$\overrightarrow{g}\cdot\overrightarrow{N^{(k)}} = \left(\mathbf{F}\vec{\tilde{h}}\right)\overrightarrow{N^{(k)}} = 0$, де $\left(\overrightarrow{N^{(k)}}\right)_n \equiv (n)^k$, $n \in \mathbb{Z}$	

Шляхом переходу до комплексно спряжених значень і обернення матриці отримаємо що

$$\begin{pmatrix} \hat{\tilde{h}}^*(w) \\ \hat{\tilde{g}}^*(w) \end{pmatrix} = \frac{2}{\Delta(w)} \begin{pmatrix} \hat{g}(w+\pi) \\ -\hat{h}(w+\pi) \end{pmatrix}, \tag{1}$$

де $\Delta(w) \equiv \hat{h}(w)\hat{g}(w+\pi) - \hat{h}(w+\pi)\hat{g}(w)$.

Таким чином, фільтри відновлення будуть стійкими тільки за умови $\forall w \in [-\pi;\ \pi] : \Delta(w) \neq 0$.

Необхідні умови точного відновлення

Якщо $\Delta(w)$ не є тотожнім нулем, то з умов Веттерлі можна вивести умови дискретної біортогональності (табл. другий рядок), виразивши з матричного рівняння (1) високочастотні фільтри через низькочастотні.

Якщо всі фільтри є фільтрами зі скінченною імпульсною характеристикою, то визначник $\Delta(w)$ можна обчислити. Це встановлює простіші зв'язки між фільтрами розкладення та відновлення [1, с. 283]: знайдуться такі $a \in \mathbb{R},\ l \in \mathbb{Z}$, що

$$\hat{g}(w) = ae^{-i(2l+1)w}\hat{\tilde{h}}^*(w+\pi);$$

$$\hat{\tilde{g}}(w) = a^{-1}e^{-i(2l+1)w}\hat{h}^*(w+\pi),$$

де a — коефіцієнт підсилення; l — зворотній зсув, a та l можуть бути довільними.

Дотримуючись [1, с. 284; 2, с. 347], для того щоб зробити рівняння для $\hat{g}(w)$ і $\tilde{g}(w)$ симетричними, візьмемо $a = 1,\ l = 0$ (у подальших викладках приймемо саме такі значення). Тоді отримаємо визначення з третього рядка таблиці.

Якщо перетворення Фур'є фільтрів точного відновлення обмежені, то фільтри $\{h_{n-2l},\ g_{n-2l}\}_{l\in\mathbb{Z}}$ і $\{\tilde{h}_{n-2l}, \tilde{g}_{n-2l}\}_{l\in\mathbb{Z}}$ формують біортогональні базиси Рісса простору $L^2(\mathbb{Z})$ [1, с. 285].

Умови нормування та гладкості вейвлетів

Згідно з [1, с. 287] для побудови вейвлет-базисів необхідне виконання умов нормування $\hat{g}(0) = \hat{\tilde{g}}(0) = 0$. Еквівалентні форми запису умов нормування наведено в четвертому рядку таблиці.

В більшості практичних випадків бажано, щоб вейвлети були гладкими функціями. Для забезпечення цього на них накладаються умови нульових моментів (табл., рядок 5).

Необхідні та достатні умови утворення вейвлетами біортогональних базисів Рісса

Згідно з [1, с. 243; 4, с. 16] сім'я функцій $\left\{\psi\left(x-n\right)\right\}_{n\in\mathbb{Z}}$ є базисом Рісса породжуваного нею простору тоді й тільки тоді, коли знайдуться такі $\alpha,\ \beta>0$, що $\forall w\in\left[-\pi;\pi\right]$ $\alpha\le\sum\limits_{k}\left|\widehat{\psi}\left(w+2\pi k\right)\right|^2\le\beta$. Необхідною та достатньою умовою біортогональності є виконання рівності $\sum\limits_{k}\widehat{\psi}\left(w+2\pi k\right)\widehat{\tilde{\psi}}^*\left(w+2\pi k\right)=1$ [3, с. 293; 4, с. 19].

Теорема Коена, Добеши та Фово визначає необхідні та достатні умови на вейвлети для утворення ними біортогональних базисів Рісса простору $L^2\left(\mathbb{R}\right)$ [2, с. 351].

Якщо вейвлети ψ та $\tilde{\psi}$ визначені відповідно через фільтри $\hat{g}$ та $\hat{\tilde{g}}$, то такі твердження еквівалентні:

1. $\varphi,\ \tilde{\varphi}\in L^2(\mathbb{R})$ та $\left\langle\varphi_{0,k}\left(x\right),\ \tilde{\varphi}_{0,m}\left(x\right)\right\rangle=\delta_{k,m}$. Остання формула еквівалентна рівності $\left\langle\psi_{j,k}\left(x\right),\psi_{r,m}\left(x\right)\right\rangle=\delta_{j,r}\ \delta_{k,m}$ [2, с. 350]. При цьому функції $\varphi,\ \tilde{\varphi}$ визначаються за формулами $\hat{\varphi}\left(w\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}\prod\limits_{p=1}^{+\infty}\hat{h}\left(\frac{w}{2^p}\right)$ та $\hat{\tilde{\varphi}}\left(w\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}\prod\limits_{p=1}^{+\infty}\hat{\tilde{h}}\left(\frac{w}{2^p}\right)$ [1, с. 287].

2. Знайдуться такі строго додатні тригонометричні поліноми $f\left(w\right)$, $\tilde{f}\left(w\right)$, що $\left(Pf\right)\left(w\right)=2f\left(w\right)$, $\left(\tilde{P}\tilde{f}\right)\left(w\right)=2\tilde{f}\left(w\right)$.

Тут $\left(Pf\right)\left(w\right)\equiv\frac{1}{2}\left|\hat{h}\left(\frac{w}{2}\right)\right|^2 f\left(\frac{w}{2}\right)+\frac{1}{2}\left|\hat{h}\left(\frac{w}{2}+\pi\right)\right|^2 f\left(\frac{w}{2}+\pi\right)$, або в по елементному вигляді: $\left(Pf\right)_l=\sum\limits_{k}\left(\sum\limits_{n}h_n h_{k-2l+n}\right)f_k$ [2, с. 260, 261]. Оператор $\left(\tilde{P}\tilde{f}\right)\left(w\right)$ вводиться аналогічно.

Також існує така компактна множина *K*, конгруентна $[-\pi;\pi]$ за модулем 2π, що $\inf\limits_{k\ge1,w\in K}\left|\hat{h}\left(2^{-k}w\right)\right|>0$ і $\inf\limits_{k\ge1,w\in K}\left|\hat{\tilde{h}}\left(2^{-k}w\right)\right|>0$, де $k\in\mathbb{N}$.

Під компактною множиною *K*, конгруентною множині $[-\pi;\pi]$ за модулем 2π, розуміють [2, с. 250] множину, для якої:

а) $\left|K\right|=2\pi$;

б) $\forall w\in[-\pi;\pi]\quad\exists l\in\mathbb{Z}:\quad\left(w+2\pi l\right)\in K$.

1. Знайдуться такі строго додатні тригонометричні поліноми $f\left(w\right)$, $\tilde{f}\left(w\right)$, єдині з точністю до нормування, що $\left(Pf\right)\left(w\right)=2f\left(w\right)$, $\left(\tilde{P}\tilde{f}\right)\left(w\right)=2\tilde{f}\left(w\right)$.

2. Матриці $\mathbf{A}$, $\tilde{\mathbf{A}}$ мають просте (не кратне) власне значення 1, а елементи відповідних власних векторів визначають строго додатні тригонометричні многочлени [2, с. 352].

Ці матриці вводяться таким чином: $\mathbf{A}_{(2N-1)\times(2N-1)}=\left\|A_{lk}\right\|$,

де $A_{lk}=\sum\limits_{n=0}^{N}h_n h_{k-2l+n}$, $-N+1\le l,k\le N-1$, $[0;N]$ — носій, тобто відрізок, на якому визначена масштабуюча функція [2, с. 259].

Аналогічно визначається матриця $\tilde{\mathbf{A}}_{(2N-1)\times(2N-1)}=\left\|\tilde{A}_{lk}\right\|$.

Висновки

Теорема Веттерлі накладає умови на набір фільтрів для забезпечення точного відновлення вхідного сигналу. На практиці, зазвичай, застосовуються фільтри зі скінченними імпульсними характеристиками, тому цей набір визначає біортогональні базиси Рісса простору $L^2(\mathbb{Z})$, тобто простору дискретних сигналів зі скінченною енергією.

Якщо відомі фільтри розкладення, то шляхом обернення матриці $\left[\dfrac{\mathbf{M}(H)}{\mathbf{M}(G)}\right]$ (таблиця, перший рядок, третій стовпчик) можна знайти матрицю $\left[\mathbf{M}\left(\tilde{H}^{\otimes}\right)\middle|\mathbf{M}\left(\tilde{G}^{\otimes}\right)\right]$ і, відповідно, побудувати фільтри відновлення (або навпаки). Ці фільтри використовують, наприклад, для субсмугового кодування [7, с. 22]. Однак, отримані таким чином фільтри визначають функції, які не обов'язково утворюють вейвлет-базис простору $L^2(\mathbb{R})$, бо ряди, що обумовлюють масштабуючі функції та материнські вейвлети, можуть виявитися розбіжними [1, с. 287]. Тому одночасно накладаються додаткові умови, а саме: певна залежність між низькочастотними та високочастотними фільтрами (див. табл., третій рядок), умови нормування та умови утворення вейвлетами базисів Рісса простору $L^2(\mathbb{R})$.

Таким чином, для побудови вейвлет-базису за коефіцієнтами фільтрів можна, наприклад, спочатку підібрати їх так, щоб задовольнялися умови Веттерлі, нормування та умови з третього рядка таблиці. Для забезпечення гладкості вейвлетів необхідно додати виконання умов нульових моментів. Після цього перевіряється виконання однієї з умов теореми Коена, Добеші, Фово.

Вейвлет-перетворення може бути записане різними способами, кожний з яких має свої переваги та недоліки. Так матрична форма запису є найбільш прийнятною для запису неоднорідних нестаціонарних перетворень [6, с. 34]. Дійсно, матричні рівняння не відображають конкретний вигляд елементів фільтрів. Отже, таким чином можуть бути записані перетворення, значення коефіцієнтів фільтрів яких змінюються, тобто рядки та стовпчики відповідних матриць вже не є зсунутими копіями один одного.

Операторна форма в загальному випадку еквівалентна матричній, адже вони описують те саме відображення, проте, характер дії перетворення на деякий вектор зображується менш наочно. Запис в термінах коефіцієнтів фільтрів фактично формує чисельні алгоритми, наприклад, алгоритм Малла [1, с. 277]. Передатні функції відображають зв'язок вейвлет-перетворення зі субсмуговим кодуванням [7, с. 22], а запис в термінах функцій вейвлетів найчастіше використовується для доведення фундаментальних теоретичних положень.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Малла Стефан. Вейвлеты в обработке сигналов / Стефан Малла; пер. с англ. Я. М. Жилейкина. — М. : «Мир», 2005. — 671 с. — ISBN 5-03-003691-1.
2. Добеши Ингрид. Десять лекций по вейвлетам / Ингрид Добеши. — Ижевск : НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001. — 464 с. — ISBN 5-93972-044-7.
3. Walnut David F. An introduction to Wavelet Analysis / David F. Walnut. — Boston-Basel-Berlin: Birkhauser, 2002. — 449 p. — ISBN 0-8176-3962-4.
4. Новиков И. Я. Теория всплесков / И. Я. Новиков, В. Ю. Протасов, М. А. Скопина. — М. : ФИЗМАТЛИТ, 2006. — 616 с. — ISBN 5-9221-0642-2.
5. Смоленцев Н. К. Основы теории вейвлетов. Вейвлеты в MATLAB / Н. К. Смоленцев. — М. : МДК Пресс, 2005. — 304 с. — ISBN 5-9407-122-3.
6. Переберин А. В. О систематизации вейвлет-преобразований / А. В. Переберин // Вычислительные методы и программирование. — 2001. — Т. 2. — С. 15 — 40.
7. Воробьев В. / Теория и практика вейвлет-преобразования / Владимир Воробьев, Вадим Грибунин. — С.-Петербург : ВУС, 1999. — 204 с.

Рекомендована кафедрою захисту інформації

Стаття надійшла до редакції 5.10.10
Рекомендована до друку 14.10.10

Чертов Олег Романович — доцент, ***Александрова Маргарита Володимирівна*** — студентка.

Кафедра прикладної математики, Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут», Київ