

# АВТОМАТИКА ТА ІНФОРМАЦІЙНО-ВІМІРЮВАЛЬНА ТЕХНІКА

УДК 621.3: 389.14

О. М. Васілевський, канд. техн. наук

## ОЦІНЮВАННЯ НЕВИЗНАЧЕНОСТІ ДИНАМІЧНИХ ВІМІРЮВАНЬ

*Запропоновано математичну модель для оцінювання невизначеності динамічних вимірювань з урахуванням невизначеності відновлення вхідного динамічного сигналу на основі даних про частотну характеристику використовуваного засобу вимірювальної техніки і спектральну функцію вхідного сигналу.*

### Вступ і постановка задачі

Динамічні вимірювання отримують щораз більшого розповсюдження в техніці та наукових дослідженнях. Ці вимірювання пов'язані в першу чергу з вивченням закономірностей проходження фізичних процесів в досліджуваних об'єктах. Тому роль динамічних вимірювань особливо велика, по-перше, в галузях науки, пов'язаних з дослідженням структури матерії, аналізом і синтезом нових речовин та матеріалів, вивченням об'єктів в експериментальних умовах, і по-друге, в галузях техніки і виробництва, для яких характерне створення нових технологічних процесів і випробування нових засобів вимірювальної техніки. Під час складання звіту щодо результату вимірювання фізичної величини необхідно подати кількісне значення якості результату так, щоб можна було правильно оцінити його надійність. Без такого значення результату вимірювань у процесі виконання метрологічних робіт не можна порівняти ні між собою, ні з довідниковими величинами. Тому необхідно, щоб була зрозуміла і загальноприйнята методика оцінювання характеристики якості (невизначеності) результату вимірювання, особливо у разі динамічних вимірювань. Оскільки під час проведення динамічних вимірювань фізичних величин завжди виникає перехідний режим роботи засобу вимірювання, за якого сигнал на його виході суттєво змінюється в часі. Ця обставина пояснюється інерційними властивостями засобів вимірювань, оскільки вони складаються в загальному випадку з набору різних мас і пружин, ємностей і індуктивностей або інших інерційних елементів, які зумовлюють появу динамічної невизначеності. Це приводить до того, що рівняння перетворення засобу вимірювання, яке відображає його статику, в динамічному режимі є неприйнятним. В такому випадку переходять до диференціальних рівнянь, які описують динамічний взаємозв'язок вихідної  $y(t)$  і вхідної  $x(t)$  величин засобу вимірювання [1]. В еру світового ринку необхідно, щоб підхід до оцінювання невизначеності динамічних вимірювань був однаковим в цілому світі для того, щоб вимірювання, проведені в різних країнах, можна було легко порівняти. Тому розробка математичної моделі для оцінювання невизначеності динамічних вимірювань на основі частотної характеристики засобу вимірювальної техніки (ЗВТ) і спектральної функції вхідного сигналу є важливою науковою задачею на шляху до взаємного визнання результатів вимірювань в різних країнах світу.

З огляду на вищесказане, метою статті є створення математичної моделі, яка дозволить реалізувати методику оцінювання невизначеності динамічних вимірювань та подавати результат динамічних вимірювань з урахуванням міжнародного підходу до оцінювання якості вимірювань.

### Аналіз стану досліджень та публікацій

Під час вимірювання швидкозмінних процесів необхідно враховувати і корегувати динамічну невизначеність використовуваного ЗВТ. Така невизначеність обумовлена неідеальністю динамічних властивостей використовуваного ЗВТ і пов'язана з ненульовим часом відгуку ЗВТ. Однією з головних задач інформаційно-вимірювальної техніки є також і визначення вимірюваної величини  $x(t)$  за вихідним сигналом ЗВТ  $y(t)$ . Корекція динамічної невизначеності вхідного сигналу передбачає розв'язання операторного рівняння динаміки [1, 2]

$$x(t) = B^{-1}[y(t)], \tag{1}$$

де  $y(t)$  — вихідний сигнал ЗВТ;  $B^{-1}$  — обернений оператор ЗВТ.

При цьому припускається, що відомі оцінки оператора  $B$  і вихідного сигналу  $y(t)$  та їх невизначеності  $u[B]$  і  $u_{\Delta}[y(t)]$ . Невизначеність  $u[B]$  — це або невизначеність знаходження оператора конкретного екземпляра ЗВТ, або відхилення конкретного оператора від нормованого значення. Невизначеність  $u_{\Delta}[y(t)]$  є невизначеністю вихідного динамічного сигналу  $y(t)$ .

Компенсація динамічної невизначеності, на відміну від статичної, де вводяться поправки в результат вимірювання, може бути здійснена лише шляхом складної обробки вихідного сигналу ЗВТ.

Відновлення вхідного сигналу полягає в такому [3]:

а) отримання вихідного сигналу ЗВТ  $y(t)$  з тривалістю  $T$ ;

б) розкладання виміряного сигналу  $y(t)$  в ряд Фур'є з періодом першої гармоніки вигляду [1]

$$y(t) = \frac{m_0}{2} + \sum_{k=1}^K m_k \cos(k\omega_0 t) + \sum_{k=1}^K n_k \sin(k\omega_0 t), \tag{2}$$

де  $\omega_0 = 2\pi/T$ ;  $T$  — тривалість вихідного сигналу  $y(t)$ ;  $m_0, m_k, n_k$  — коефіцієнти, що знаходяться за формулами [1]

$$m_0 = \frac{2}{N} \sum_{n=0}^{N-1} y_n; \tag{3}$$

$$m_k = \frac{2}{N} \sum_{n=0}^{N-1} y_n \cos(k\omega_0 t_n); \tag{4}$$

$$n_k = \frac{2}{N} \sum_{n=0}^{N-1} y_n \sin(k\omega_0 t_n); \tag{5}$$

в) експериментальне визначення амплітудо-частотної  $A(\omega)$  і фазо-частотної  $\Phi(\omega)$  характеристик ЗВТ та знаходження дійсної і уявної частин комплексної частотної характеристики:

$$a(\omega) = A(\omega) \cos \Phi(\omega); \tag{6}$$

$$b(\omega) = A(\omega) \sin \Phi(\omega); \tag{7}$$

г) обчислення коефіцієнтів Фур'є  $c_k$  і  $z_k$  вхідного сигналу  $x(t)$  із системи рівнянь

$$\begin{cases} c_k a(k\omega) + z_k b(k\omega) = m_k; \\ z_k a(k\omega) - c_k b(k\omega) = n_k; \end{cases} \tag{8}$$

$$m_0 = \frac{c_0}{a(0)}; \tag{9}$$

д) визначення вхідного сигналу  $x(t)$  у вигляді ряду Фур'є [1]

$$x(t) = \frac{c_0}{2} + \sum_{k=1}^K c_k \cos(k\omega t) + \sum_{k=1}^K z_k \sin(k\omega t). \tag{10}$$

Недоліком такої послідовності дій є надлишковість обчислень. Оскільки реальний вихідний сигнал  $y(t)$  визначений лише на проміжку  $[0; T]$ , то досить припустити, що функція  $y(t)$  парна, і розкласти її за косинусами, або непарна — і розкласти її за синусами. Це значно скоротить об'єм підрахунків і спростить алгоритм корекції.

У реальних ЗВТ як цифрових, так і аналогових, вихідний сигнал  $y(t)$  поданий у вигляді дискретних відліків  $y(t_i)$ . Тому під час обчислень коефіцієнтів ряду Фур'є знак інтегрування замінюється на знак підсумовування. Припустимо, що функція  $y(t_i)$  парна, і розкладемо її за косинусами, обмежившись  $K$ -ю гармонікою [1, 2]:

$$y(t_i) = \frac{m_0}{2} + \sum_{k=1}^K m_k \cos(k\omega t). \quad (11)$$

Коефіцієнти  $m_0$  та  $m_k$  розраховуються за формулами

$$m_0 = \frac{2}{N} \sum_{i=1}^N [y(t_i) T_a]; \quad (12)$$

$$m_k = \frac{2}{N} \cos(k\omega t) \sum_{i=1}^N [y(t_i) T_a], \quad (13)$$

де  $N = T/T_a$ ;  $T_a$  — крок дискретизації сигналу.

Вхідний сигнал  $x(t_i)$ , розкладений в ряд Фур'є за косинусами, має аналогічний формулі (11) вигляд:

$$x(t_i) = \frac{c_0}{2} + \sum_{k=1}^K c_k \cos(k\omega t), \quad (14)$$

де  $c_0 = \frac{2}{N} \sum_{i=1}^N [x(t_i) T_a]$ ;  $c_k = \frac{2}{N} \cos(k\omega t) \sum_{i=1}^N [x(t_i) T_a]$ .

Коефіцієнти  $c_0$  та  $c_k$  визначаються за формулами:

$$c_0 = \frac{m_0}{a(0)}; \quad (15)$$

$$c_k = \frac{m_k a(k\omega)}{a^2(k\omega) + b^2(k\omega)}. \quad (16)$$

Для більшості ЗВТ  $\Phi(\omega) = 0$ , тому формулу (16) можна спростити до вигляду

$$c_k = \frac{m_k}{a(k\omega)} = \frac{m_k}{A(k\omega)}. \quad (17)$$

Отже, відновлений сигнал можна описати виразом [3]

$$x(t_i) = \frac{T_a \sum_{i=1}^N y(t_i)}{A(0)} + \sum_{k=1}^K \frac{2T_a \sum_{i=1}^N [y(t_i)]}{A(k\omega)} \cos^2(k\omega t). \quad (18)$$

### Методика оцінювання невизначеності динамічних вимірювань

Під час відновлення сигналу потрібно оцінювати його невизначеність. Для цієї задачі вона буває двох видів: методична, пов'язана із заміною нескінченної межі підсумовування гармонік сигналу на кінцеву кількість  $K$ , та інструментальна, що викликана невизначеністю реєстрації вихідного сигналу  $y(t)$  і частотних характеристик ЗВТ.

Вимірювання вхідного сигналу ЗВТ є опосередкованим, тобто шукана величина  $x(t)$  визначається на підставі результатів прямих вимірювань вихідного сигналу ЗВТ  $y(t)$  і амплітудно-частотної характеристики (АЧХ) ЗВТ  $A(\omega)$ , з якими вона функційно пов'язана. Найчастіше величини  $y(t)$  і  $A(\omega)$  корельовані між собою, тому що визначаються за допомогою одного ЗВТ.

Тому методика оцінювання невизначеності динамічних вимірювань така:

а) визначається оцінка вхідного сигналу за формулою (18);

б) знаходиться стандартна невизначеність динамічних вимірювань  $u_d[y(t)]$ .

На практиці результати вимірювання  $y(t)$  частіше отримують одноразово, а АЧХ ЗВТ визначається апріорно (під час метрологічних досліджень) або заздалегідь під час випуску ЗВТ з виробництва. Невизначеність динамічних вимірювань  $u_d[y(t)]$  вихідного сигналу можна виразити через квадратний корінь з інтегралу від добутку квадрата модуля частотної характеристики ЗВТ і квадрата спектральної функції вхідного сигналу на всіх частотах за формулою [4]

$$u_d [y(t)] = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |S(j\omega)|^2 |X(j\omega)|^2 d\omega}, \quad (19)$$

де  $|S(j\omega)|$  — модуль частотної характеристики ЗВТ, що використовується під час динамічних вимірювань, або АЧХ ЗВТ, що визначається за формулою

$$|S(j\omega)| = \sqrt{a^2(\omega) + b^2(\omega)}, \quad (20)$$

де  $a(\omega)$ ,  $b(\omega)$  — відповідно дійсна та уявна частини частотної характеристики  $S(j\omega)$ ;  $X(j\omega)$  — спектральна функція вхідного сигналу, яка пов'язана з вхідною функцією часу  $x(t)$  виразом Лапласа

$$X(j\omega) = \int_0^{\infty} x(t)e^{-j\omega_0 t} dt, \quad (21)$$

де  $\omega_0$  — частота вхідного сигналу.

Верхня границя інтегрування рівняння (21) на скінченному інтервалі часу може бути змінена на сумарний час спостереження  $T$ .

Якщо вимірюваний сигнал  $x(t)$  є дискретизованим, то в рівнянні (21) знак інтегрування можна замінити на знак підсумовування, при цьому виконують такі заміни:  $t$  замінюють на  $nT_a$ , причому  $n$  змінюється від 0 до  $N-1$ , через  $T_a$  позначають період дискретизації, тоді  $x(t)$  має вигляд  $x(nT_a)$ , а  $e^{-j\omega_0 t}$  замінюють на  $e^{-j\omega_0 nT_a}$ .

Провівши такі заміни, рівняння (21) можна записати в дискретному вигляді [4]

$$X_d(j\omega) = \sum_{n=0}^{N-1} x(nT_a)e^{-j\omega_0 nT_a} = \sum_{n=0}^{N-1} x(nT_a) \cos \omega_0 nT_a - j \sum_{n=0}^{N-1} x(nT_a) \sin \omega_0 nT_a, \quad (22)$$

де  $\omega_0 = 2\pi/N T_a k$ , а  $k = 0, 1, \dots, N-1$ .

Для того, щоб дискретна спектральна функція за величиною відповідала неперервній спектральній функції, її необхідно помножити на інтервал дискретизації:

$$X(j\omega) = T_a X_d(j\omega). \quad (23)$$

За динамічних вимірювань дискретних в часі сигналів рівняння для розрахунку невизначеності динамічних вимірювань (19) з урахуванням рівнянь (22) і (23), можна записати у вигляді [4]

$$u_d [y(t)] = \sqrt{\frac{T_a}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} x^2(nT_a) e^{-j\frac{4\pi nk}{N}} A^2\left(k \frac{2\pi}{NT_a}\right)}, \quad (24)$$

де  $A\left(k \frac{2\pi}{NT_a}\right) = A(k\omega) = |S(j\omega)|$  — амплітудо-частотна характеристика ЗВТ;

$\Delta\omega = \frac{2\pi}{NT_a}$  — відстань розташування дискретних значень частоти;  $T_a$  — час дискретизації;  $N$  —

кількість вибірок;  $NT_a$  — сумарний час спостереження;

в) розраховуємо коефіцієнти чутливості

$$\frac{\partial x(t_i)}{\partial y(t_i)} = \frac{NT_a}{A(0)} + \sum_{k=1}^K \frac{2NT_a}{A(k\omega)} \cos^2(k\omega t); \quad (25)$$

$$\frac{\partial x(t_i)}{\partial |S(j\omega)|} = \sum_{k=1}^K \frac{2T_a \sum_{i=1}^N [y(t_i)]}{A^2(k\omega)} \cos^2(k\omega t); \quad (26)$$

г) знаходимо коефіцієнт кореляції  $r(y(t), |S(j\omega)|)$  [5]

$$r(y(t), |S(j\omega)|) = \frac{\sum_{q=1}^L (y(t_q) - \overline{y(t)}) (A(q\omega) - \overline{A(\omega)})}{\sqrt{\sum_{q=1}^L (y(t_q) - \overline{y(t)})^2 \sum_{q=1}^L (A(q\omega) - \overline{A(\omega)})^2}}, \quad (27)$$

де  $L$  — кількість узгоджених пар результатів динамічних вимірювань;

д) розраховуємо квадрат комбінованої невизначеності відновлення сигналу

$$u_{ds}^2 = \left[ \left( \frac{\partial x(t_i)}{\partial y(t_i)} \right)^2 + \left( \frac{\partial x(t_i)}{\partial |S(j\omega)|} \right)^2 \right] u_d^2 [y(t)] + 2 \frac{\partial x(t_i)}{\partial y(t_i)} \frac{\partial x(t_i)}{\partial |S(j\omega)|} u_d^2 [y(t)] r(y(t), |S(j\omega)|); \quad (28)$$

е) знаходимо розширену невизначеність динамічного вимірювання [5]

$$U_d = t_p (v_{eff}) u_{ds}, \quad (29)$$

де  $t_p(v_{eff})$  — коефіцієнт Стюдента для заданого довірчого рівня  $p$  і числа ступенів вільності  $v_{eff}$ .

### Висновки

На основі інформації про частотні характеристики ЗВТ і спектральної функції вхідного сигналу вперше розроблено математичну модель, що дозволяє реалізувати методику оцінювання невизначеності динамічних вимірювань з урахуванням невизначеності відновлення вхідного динамічного сигналу та подавати результат динамічних вимірювань з урахуванням міжнародного підходу до оцінювання якості вимірювань. Для оцінювання невизначеності динамічних вимірювань рекомендується використовувати таку послідовність дій: отримати вихідні відліки ЗВТ; апріорно або експериментально визначити АЧХ ЗВТ; визначити вхідний сигнал  $x(t)$  за виразом (18), обмежившись необхідним числом гармонік  $K$ ; оцінити стандартну невизначеність динамічних вимірювань  $u_d [y(t)]$  вхідного сигналу  $y(t)$ , що визначається за АЧХ ЗВТ і спектральною функцією вхідного сигналу  $x(t)$ ; розрахувати комбіновану невизначеність відновлення сигналу, користуючись формулами (25)—(28).

### СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Шрюфер Е. Обработка сигналов: цифровая обработка дискретизованных сигналов : підручник / Е. Шрюфер ; за ред. В. П. Бабака. — К. : Либідь, 1992. — 296 с. — ISBN 5-325-00310-0.
2. Грановский В. А. Динамические измерения: Основы метрологического обеспечения: книга / В. А. Грановский. — Л. : Энергоатомиздат, 1984. — 224 с.
3. Мокин Б. И. К вопросу о восстановлении сигналов ограниченной длительности / Б. И. Мокин // Метрология. — 1980. — № 9. — С. 3—6.
4. Васілевський О. М. Оцінка невизначеності вихідних сигналів засобів вимірювальної техніки в динамічних режимах роботи / О. М. Васілевський // Системи обробки інформації. — 2010. — № 4 (85). — С. 81—84.
5. Васілевський О. М. Алгоритм оцінювання невизначеності у вимірюваннях при виконанні метрологічних робіт / О. М. Васілевський // Інформаційні технології та комп'ютерна інженерія. — № 3 (7). — 2006. — С. 147—151.

Рекомендована кафедрою метрології та промислової автоматики

Стаття надійшла до редакції 18.01.11

Рекомендована до друку 27.01.11

**Васілевський Олександр Миколайович** — начальник відділу інформаційно-комунікаційних технологій.

Міністерство освіти і науки, молоді та спорту України, Київ