УДК 519.651.2

Р. Н. Квєтний, д-р. техн. наук, проф.;
О. Р. Бойко, канд. техн. наук;
Т. О. Степова, студ.

БАГАТОВИМІРНА ПОЛІНОМІАЛЬНА АПРОКСИМАЦІЯ ЗАЛЕЖНОСТЕЙ ЗАДАНИХ МАСИВАМИ ІНТЕРВАЛЬНИХ ДАНИХ ЗА МЕТОДОМ НАЙМЕНШИХ КВАДРАТІВ

Розглянуто багатовимірну поліноміальну апроксимацію залежностей інтервальних даних. Проведено тестування програм на інтервальних та неінтервальних величинах для визначення ефективності підходу. Розроблений метод дозволяє підвищити точність в задачах обробки експериментальних даних, заданих в умовах невизначеності.

Вступ

У зв’язку з розвитком таких напрямів науки і техніки, як механіка, теплотехніка, математична хімія, літакобудування, виникла необхідність обчислення не тільки наближених розв’язків різноманітних задач, але й гарантованих оцінок їх близькості до точних розв’язків [1]. Використання методів інтервальної математики дозволяє подати опис невизначених даних та врахувати неточність результатів обчислювальних операцій [2] водночас. Інтервальні методи можуть бути використані для розв’язання таких проблем управління, як робастні аналіз та управління, інтервальне імітаційне моделювання і цифрове управління в умовах невизначеності [3, 4].

На сьогоднішній день в галузі інтервального аналізу відсутні розробки для задач багатовимірної апроксимації, хоча в багатьох випадках експериментальні дані, отримані в умовах певної невизначеності даних, містять похибку, що не враховується під час розв’язання задачі апроксимації. Тому розробка методів багатовимірної апроксимації залежностей інтервальних даних є актуальною науковою задачею.

Метою досліджень є розширення функціональних можливостей методів апроксимації шляхом поширення їх на задачі з інтервальними даними. В статті проводиться розробка математичної моделі та програмної реалізації багатовимірної поліноміальної апроксимації залежностей інтервальних даних за методом найменших квадратів на прикладі двовимірної апроксимації поліномом другого порядку.

Постановка задачі

Інтервалом $[a,b]$ дійсної осі R називають множину всіх чисел, що розташовані між заданими числами a і b, включаючи їх самих, тобто

$$[a,b] = \{x \in R \mid a \le x \le b\}. \tag{1}$$

Правила проведення операцій над інтервалами згідно з класичною інтервальною арифметикою полягають у виконанні таких дій:

$$\begin{aligned} x + y &= [\underline{x} + \underline{y}, \overline{x} + \overline{y}]; \\ x - y &= [\underline{x} - \overline{y}, \overline{x} - \underline{y}], \end{aligned} \tag{2}$$

де *x, y* — інтервали з межами $[\underline{x}, \overline{x}]$, $[\underline{y}, \overline{y}]$ відповідно.

У разі множення інтервалу на дійсне число необхідне виконання таких умов:

$$\mu \cdot x = \begin{cases} \left[\mu \cdot \underline{x}, \mu \cdot \overline{x}\right], & \mu \ge 0; \\ \left[\mu \cdot \overline{x}, \mu \cdot \underline{x}\right], & \mu < 0. \end{cases} \tag{3}$$

де μ — деяке дійсне число, що множиться на інтервал.

В статті розглядається така постановка задачі апроксимації: багатовимірна поліноміальна апроксимація залежностей заданих масивами інтервальних даних, що зводиться до визначення апроксимувальної функції з інтервальними параметрами, яка максимально точно відтворює невідому апроксимовану функцію.

В результаті двовимірної апроксимації залежності поліномом другого степеня отримується аналітичний вираз

$$Z(x,y) = c_0 + c_1 x + c_2 y + c_3 xy + c_4 x^2 + c_5 y^2, \tag{4}$$

де $c_1 \ldots c_m$ — невідомі інтервали коефіцієнтів шуканої функції.

Задача зводиться до знаходження інтервалів коефіцієнтів системи лінійних рівнянь, утворених за методом найменших квадратів:

$$\begin{cases}
c_0 n + c_1 \sum\limits_{i=0}^{7} x_i + c_2 \sum\limits_{i=0}^{7} y_i + c_3 \sum\limits_{i=0}^{7} x_i y_i + c_4 \sum\limits_{i=0}^{7} x_i^2 + c_5 \sum\limits_{i=0}^{7} y_i^2 = \sum\limits_{i=1}^{7} f_i; \\
c_0 \sum\limits_{i=0}^{7} x_i + c_1 \sum\limits_{i=0}^{7} x_i^2 + c_2 \sum\limits_{i=0}^{7} x_i y_i + c_3 \sum\limits_{i=0}^{7} x_i^2 y_i + c_4 \sum\limits_{i=0}^{7} x_i^3 + c_5 \sum\limits_{i=0}^{7} x_i y_i^2 = \sum\limits_{i=1}^{7} x_i f_i; \\
c_0 \sum\limits_{i=0}^{7} y_i + c_1 \sum\limits_{i=0}^{7} y_i x_i + c_2 \sum\limits_{i=0}^{7} y_i^2 + c_3 \sum\limits_{i=0}^{7} x_i y_i^2 + c_4 \sum\limits_{i=0}^{7} y_i x_i^2 + c_5 \sum\limits_{i=0}^{7} y_i^3 = \sum\limits_{i=1}^{7} y_i f_i; \\
c_0 \sum\limits_{i=0}^{7} x_i y_i + c_1 \sum\limits_{i=0}^{7} x_i^2 y_i + c_2 \sum\limits_{i=0}^{7} y_i^2 + c_3 \sum\limits_{i=0}^{7} x_i^2 y_i^2 + c_4 \sum\limits_{i=0}^{7} x_i^3 y_i + c_5 \sum\limits_{i=0}^{7} y_i^3 x_i = \sum\limits_{i=1}^{7} x_i y_i f_i; \\
c_0 \sum\limits_{i=0}^{7} x_i^2 + c_1 \sum\limits_{i=0}^{7} x_i^3 + c_2 \sum\limits_{i=0}^{7} x_i^2 y_i + c_3 \sum\limits_{i=0}^{7} x_i^3 y_i + c_4 \sum\limits_{i=0}^{7} x_i^4 + c_5 \sum\limits_{i=0}^{7} x_i^2 y_i^2 = \sum\limits_{i=1}^{7} x_i^2 f_i; \\
c_0 \sum\limits_{i=0}^{7} y_i^2 + c_1 \sum\limits_{i=0}^{7} y_i^2 x_i + c_2 \sum\limits_{i=0}^{7} y_i^3 + c_3 \sum\limits_{i=0}^{7} x_i y_i^3 + c_4 \sum\limits_{i=0}^{7} y_i^2 x_i^2 + c_5 \sum\limits_{i=0}^{7} y_i^4 = \sum\limits_{i=1}^{7} y_i^2 f_i,
\end{cases} \tag{5}$$

де $x_1 \ldots x_n$, $y_1 \ldots y_n$ — значення аргументів шуканої залежності; $f_1 \ldots f_n$ — інтервали значень шуканої залежності.

Для отримання детермінованої кривої значення коефіцієнтів інтервальної кривої (4) можна відцентрувати по середині відповідних інтервалів, таким чином замінюючи інтервальні дані на визначені.

Розробка функціональної схеми знаходження коренів системи лінійних рівнянь модифікованим методом Гаусса

Для розв'язання системи (5) в інтервальному вигляді модифіковано метод Гаусса, блок-схему алгоритму якого наведено на рис. 1.

Прямий хід методу приводить матрицю коефіцієнтів системи до трикутного вигляду: всі елементи нижче головної діагоналі стають нулями. Першим кроком є обчислення коефіцієнта, множенням сусіднього рядка на який, можна домогтися чисельної рівності його елемента з поточним. На цьому етапі метод Гаусса для розв'язання системи лінійних рівнянь, що містить інтервали, не відрізняється від класичного.

На другому кроці відбувається віднімання від поточного рядка сусіднього. Для елементів, що не належать стовпчику з вільними коефіцієнтами системи, ніяких особливих дій не передбачається, для інших — відбувається перевірка умови, чи менший коефіцієнт, на який множиться інтервал, за нуль. Ця умова є необхідною для виконання правила множення інтервалу на дійсне число (3).

У разі зворотного ходу, крім множення інтервалу на дійсне число, також використовуються правила проведення операцій інтервальної класичної арифметики (2).

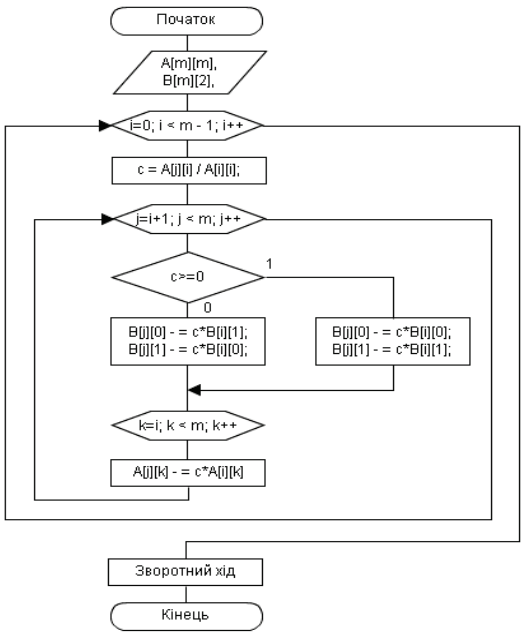

Рис. 1. Блок-схема алгоритму модифікованого методу Гаусса

Багатовимірна апроксимація залежностей інтервальних та неінтервальних величин

Розроблений метод дозволяє розглядати неінтервальні дані як окремий випадок інтервальних. Це дає можливість перевірити коректність методу та програмного забезпечення.

Для аналізу ефективності використання інтервальної арифметики створено програму. Вхідними даними програми є введений користувачем або зчитаний з файлу масив чисел, першим та другим стовпчиками якого є *n* значень x_i та y_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ деякої функції $f(x,\ y)$, інші два — верхня та нижня межі інтервалу $[\underline{f}_i;\ \overline{f}_i]$ значень самої функції за заданої величини аргументу. Вихідними даними програми є коефіцієнти поліному шуканої багатовимірної функції.

Проведено багатовимірну поліноміальну апроксимацію залежності неінтервальних величин. За вхідні дані взято десять точок деякої невідомої функції, координати яких наведені у табл. 1.

Таблиця 1

Вхідні дані програми для неінтервальних величин

i	x_i	y_i	$f(x_i, y_i)$	i	x_i	y_i	$f(x_i, y_i)$
1	–1,00	–1,00	–24,00	6	8,00	1,00	63,00
2	–3,00	–4,00	– 7,00	7	10,00	3,00	96,00
3	–4,00	6,00	7,00	8	12,00	3,00	135,00
4	–5,00	–2,00	21,00	9	14,00	9,00	180,00
5	–6,00	2,00	35,00	10	15,00	5,00	220,00

Результати роботи програми наведено у табл. 2.

Таблиця 2

Результати роботи програми для неінтервальних величин

i	c_i	i	c_i
1	0,0	4	2,3350432205115055E28
2	–6,304690038176616E30	5	3,578670956714301E30
3	–6,428237806833076E28	6	–1,4369416667053986E31

За вхідні дані для тестування програми на інтервальних величинах обрано діапазони точок попереднього тестування. Значення аргументів, межі інтервалів значень функцій наведено у табл. 3.

Таблиця 3

Вхідні дані програми для інтервальних величин

i	x	y	$f(x, y)$		i	x	y	$f(x, y)$	
			$\underline{f}$	$\overline{f}$				$\underline{f}$	$\overline{f}$
1	–1,00	–1,00	–24,02	–23,98	6	8,00	1,00	62,99	64,02
2	–3,00	–4,00	–8,01	–6,97	7	10,00	3,00	95,96	97,01
3	–4,00	6,00	6,99	8,01	8	12,00	3,00	134,99	136,01
4	–5,00	–2,00	20,98	22,04	9	14,00	9,00	179,97	181,05
5	–6,00	2,00	34,97	36,03	10	15,00	5,00	219,98	221,02

Вихідні дані програми у вигляді інтервалів значень коефіцієнтів наведено у табл. 4.

Таблиця 4

Вихідні дані програми для інтервальних величин

i	c_i		i	c_i	
	$\underline{c}$	$\overline{c}$		$\underline{c}$	$\overline{c}$
1	–2,3889E42	2,3889E42	4	–1,699E29	2,334E40
2	–3,583E41	1,74E30	5	–3,674E30	3,722E30
3	–4,72E30	3,735E41	6	–1,495E31	1,475E31

Підставивши у (4) центри значень інтервалів, отримано детерміновану криву, значення якої у вузлових точках наведено у табл. 5.

Таблиця 5

Значення детермінованої кривої в вузлових точках

i	x_i	y_i	$f(x_i, y_i)$	i	x_i	y_i	$f(x_i, y_i)$
1	–1,00	–1,00	4,09E39	6	8,00	1,00	–1,15E42
2	–3,00	–4,00	–6,95E40	7	10,00	3,00	–8,81E41
3	4,00	6,00	1,56E42	8	12,00	3,00	–1,17E42
4	–5,00	–2,00	6,39E41	9	14,00	9,00	6,43E41
5	–6,00	2,00	1,31E42	10	15,00	5,00	–8,78E41

Висновки

Використання принципів інтервального аналізу та правил проведення операцій над величинами, які задані лише діапазоном можливих значень, є ефективним підходом до розв'язання задач з вхідними даними, заданими в умовах невизначеності, а також є дієвим методом для включення у результати обчислень точного розв'язання задачі з урахуванням похибок обчислення, округлення, тощо.

Таким чином, задаючи замість визначених величин інтервал, на якому вони розташовані, та застосовуючи метод апроксимації з використанням інтервальної арифметики, отримано інтервали, які включають в себе вихідні дані, отримані під час розв'язання задачі для неінтервальних величин, що підтверджує дієвість обраного для дослідження підходу.

Для того, щоб отримати детерміновану криву, замість інтервалів коефіцієнтів можна підставити значення середин інтервалів, таким чином отримати досить наближену функцію, що не використовує інтервали. Точність такої функції залежить від кількості початкових точок, ширини інтервалів та степеня полінома, обраного для аналітичного опису функції.

Розроблений метод дозволяє розв'язувати задачі багатовимірної апроксимації методом найменших квадратів для інтервальних величин, що дозволяє підвищити точність в задачах обробки експериментальних даних.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Шарый С. П. Интервальные алгебраические задачи : моног. / С. П. Шарый. — Новосибирск : XYZ, 2005. — 680 с.
2. Добронец Б. С. Интервальная математика / Б. С. Добронец. — Красноярск : КрасГУ, 2003. — 216 с.
3. Applied Interval Analysis / [L. Jaulin, M. Kieffer, O. Didrit, E. Walter]. — London : Verlag London Limited, 2001. — 379 p.
4. Шокин Ю. И. Интервальный анализ / Ю. И. Шокин. — Новосибирск : Наука, 1981. — 112 с.
5. Moore R. E. Interval analysis / R. E. Moore. — N.-Y. : Prentice-Hall, 1966 p.

Рекомендована кафедрою автоматики та інформаційно-вимірювальної техніки

Стаття надійшла до редакції 7.02.11
Рекомендована до друку 10.03.11

Квєтний Роман Наумович — завідувач кафедри, ***Бойко Олексій Романович*** — старший викладач,

Кафедра автоматики та інформаційно-вимірювальної техніки;

Степова Тетяна Олександрівна — студентка Інституту автоматики, електроніки та комп'ютерних систем управління.

Вінницький національний технічний університет, Вінниця