

УДК 621.372

Г. Г. Бортник¹
 М. В. Васильківський¹
 О. В. Стальченко¹

ЦИФРОВИЙ МЕТОД СПЕКТРАЛЬНОГО ОЦІНЮВАННЯ ВИПАДКОВИХ СИГНАЛІВ

¹Вінницький національний технічний університет

Запропоновано цифровий метод підвищення ефективності спектрального оцінювання випадкових сигналів на базі періодограмно-корелограмного оброблення дискретних вибірок досліджуваного сигналу. Перевагою запропонованого методу є високе частотне розрізнення та статистична стійкість результатів аналізу випадкових сигналів.

Ключові слова: спектральний аналіз, випадкові сигнали, спектральна густина потужності, вагові функції.

Вступ

Аналіз випадкових сигналів знаходить широке використання в галузі радіотехніки та зв'язку. Останнім часом спостерігається швидкий розвиток цифрового спектрального аналізу випадкових сигналів і це знаходить відображення у відповідних публікаціях [1—3]. Існуючі методи оцінювання спектрів дискретизованих сигналів базуються на використанні швидкого перетворення Фур'є (ШПФ) [2, 3]. Класичний підхід до цифрового спектрального аналізу сигналів дає можливість отримати достовірні оцінки для класу досліджуваних сигналів, що задовольняють умови стаціонарності, ергодичності та наявності масиву даних великого обсягу. Тому методологічний підхід, що базується виключно на виконанні ШПФ, має низку принципів обмежень. Одним з найзначущих є обмеження частотного розрізнення, тобто здатності розрізняти сусідні спектральні складові досліджуваного сигналу ФД. Друге суттєве обмеження обумовлене наявністю реалізації дискретизованого сигналу малого обсягу. Ця обставина призводить до порушення фундаментальної операції усереднення за ансамблем реалізацій за класичного визначення спектральної густини потужності (СГП) і, як наслідок, до отримання недостовірних спектральних оцінок для кінцевих обсягів вибірок. Вказані обмеження класичних спектральних методів є типовими для більшості задач спектрального оцінювання, оскільки досліджувані процеси в радіотехніці та зв'язку характеризуються малою тривалістю та швидкозмінними у часі спектрами.

Останнім часом запропоновано декілька цифрових методів спектрального оцінювання, які було розроблено для того, щоб послабити обмеження, властиві спектральному методу на базі ШПФ.

У роботах [3, 4] наведено періодограмний метод оцінювання, згідно з яким СГП для вхідних відліків $x(n)$ та обсягу реалізації N можна визначити так:

$$S(k) = \left| \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cdot e^{-j \frac{2\pi nk}{N}} \right|^2 = |X(k)|^2. \quad (1)$$

Періодограма є асимптотично незміщеною оцінкою СГП. Для великих масивів даних N її дисперсія наближається до квадрату істинної СГП [2]. Вибірковий спектр сигналу, обчислений за допомогою (1), буде давати статистично нестійкі оцінки СГП, оскільки у виразі відсутня операція математичного сподівання.

Відомо, що СГП може бути знайдена непрямым методом, а саме шляхом виконання дискретного перетворення Фур'є (ДПФ) автокореляційної послідовності [3]. Дисперсія та розрізнявальна здатність корелограмного методу залежить від функції зважування $\omega_c(n)$.

Наведені методи оцінювання СГП не є оптимальними для аналізу випадкових сигналів через низьку роздільну здатність та недостатню статистичну стійкість отриманих результатів.

Тому актуальною задачею є розробка методів спектрального оцінювання сигналів, що характеризуються високим частотним розрізненням та статистичною стійкістю результатів під час аналізу випадкових сигналів.

Метою роботи є підвищення ефективності спектрального оцінювання випадкових сигналів за рахунок багатоетапного оброблення вибірок сигналу в часовому та частотному поданні.

Задачами дослідження є:

- періодограмно-корелограмно оцінювання СГП сигналу;
- синтез вагових віконних функцій;
- аналіз ефективності методу спектрального оцінювання.

Періодограмно-корелограмно оцінювання СГП сигналу

Для отримання згладжених і статистично стійких оцінок СГП на кінцевому масиві відліків досліджуваного сигналу необхідно здійснювати згладжувальне оцінювання у часовому та частотному вимірі. Тому на першому етапі оброблення необхідно вхідний масив розділити на P сегментів по M відліків зі зсувом, що дорівнює B відліків між сусідніми сегментами.

Підпоследовності $x_p(n)$ довжиною по M відліків зсувені одна відносно одної на B відліків, при цьому p -й сегмент пов'язано зі вхідним масивом $x(n)$ співвідношенням

$$x_p(n) = x[n + B(p-1)], \quad (2)$$

де $p = 1, 2, \dots, P$.

Перед знаходженням періодограми кожен сегмент обробляється оптимальною віконною функцією. Зважений сегмент має такий вигляд:

$$x_{p\omega} = \omega_d(n) \cdot x[n + B(p-1)], \quad (3)$$

де $\omega_d(n)$ — віконна функція даних.

Для кожної зі зважених підпоследовностей знаходяться коефіцієнти ДПФ за формулою

$$X_p(k) = \frac{1}{U_d} \sum_{n=0}^{M-1} \omega_d(n) \cdot x_p(n) e^{-j \frac{2\pi nk}{M}}, \quad (4)$$

де $U_d = \frac{1}{M} \left| \sum_{n=0}^{M-1} \omega_d(n) \right|^2$ — енергія віконної функції.

Величина $I_p(k)$, що називається модифікованою періодограмою (через використання віконної функції, що відрізняється від прямокутного «вікна»), знаходиться за виразом

$$I_p(k) = \frac{1}{U_d} |X_p(k)|^2. \quad (5)$$

Середнє значення періодограм зважених сегментів дає оцінку СГП сигналу для заданого значення зсуву B

$$S(k) = \frac{1}{PU_d} \sum_{p=1}^P \left| \sum_{n=0}^{M-1} \omega_d(n) \cdot x_p[n + B(p-1)] e^{-j \frac{2\pi nk}{M}} \right|^2. \quad (6)$$

Таким чином, завдяки перекриванню для заданого масиву даних можна сформулювати більшу кількість сегментів і тим самим зменшити значення дисперсії результуючої періодограми. Модифікована періодограма згідно з виразом (6) дає можливість отримати згладжені оцінки СГП сигналу за рахунок усереднення кількох періодограм. При цьому кількість оброблюваних сегментів обмежується необхідною розрізнявальною здатністю за частотою. Для подальшого підвищення ефективності оцінювання пропонується застосувати корелограмно оброблення спектрів, що додатково підвищить статистичну стійкість отриманих результатів за рахунок усереднювального ефекту

процесу автокореляції. Тому наступним етапом оброблення даних є виконання зворотного ДПФ для $S(k)$ з метою отримання симетричної оцінки автокореляції для $2M + 1$ часових зсувів:

$$R(m) = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} S(k) \cdot e^{j \frac{2\pi km}{M}}. \quad (7)$$

У подальшому оцінка $R(m)$ обробляється за допомогою симетричної кореляційної віконної функції $\omega_c(m)$ непарної довжини $2L + 1$. У результаті отримуємо зважену кореляційну оцінку

$$R_\omega(m) = R(m) \cdot \omega_c(m). \quad (8)$$

На останньому етапі виконується ДПФ для $R_\omega(m)$, що дає можливість отримати кінцевий вираз для оцінки СГП сигналу:

$$S_c(k) = \frac{1}{U_c} \sum_{m=0}^{M-1} R_\omega(m) \cdot \omega_c(m) e^{-j \frac{2\pi mk}{M}}. \quad (9)$$

Статистична стійкість оцінки $S_c(k)$ забезпечується усередненням по сегментах та частотних згладжуваннях. Комбіноване часове та кореляційне зважування дозволяє керувати рівнем бічних паразитних пелюсток спектра.

Синтез вагових віконних функцій

Однією з базових операцій, що використовуються під час спектрального оцінювання СГП сигналу є оброблення за допомогою віконних функцій. У запропонованому спектральному методі оцінювання використовується два класи вікон: вікна даних $\omega_d(n)$ і кореляційні вікна $\omega_c(m)$.

Вікна є ваговими функціями, що застосовуються для зменшення ефекту розмивання спектральних складових, обумовленого кінцевим інтервалом дослідження сигналу. Найважливішими якісними характеристиками зважувальних функцій є рівень бічних пелюсток A_S і асимптотична швидкість спадання рівня бічних пелюсток V_S .

Вибір конкретної віконної функції визначається особливостями процедури спектрального оцінювання та класом досліджуваних сигналів. Вікна $\omega_d(n)$ і $\omega_c(m)$ відрізняються областями визначення. Вікно даних $\omega_d(n)$ має ненульові значення для усіх N невід'ємних часових відліків. Кореляційне вікно $\omega_c(m)$ є симетричною функцією у часі. Ці віконні функції мають також різні початкові точки відліку. Для вікна даних $\omega_d(n)$ точкою відліку є значення $n = 0$. А для кореляційного вікна $\omega_c(m)$ такою точкою є значення $m = -M$.

Процедура синтезу оптимальної віконної функції полягає у розв'язанні задачі пошуку обмеженої у часі функції, ДПФ якої найкращим способом апроксимує обмежений за частотою спектр потужності сигналу. Відомі віконні функції за своїми основними параметрами (A_S , V_S) не задовольняють вимог, що висуваються до них під час використання у періодограмно-корелограмному обробленні випадкового сигналу.

В теорії спектрального аналізу широкого поширення набуло сімейство косинусних вагових функцій, які формуються на базі кінцевого тригонометричного ряду і мають такий вигляд [4]:

$$\omega(t) = \sum_{r=0}^R a_r \cdot \cos\left(\frac{2\pi r t}{T}\right), \quad (10)$$

де r — номер коефіцієнта ряду; T — інтервал зважування сигналу.

Задача синтезу вагової функції даних полягає в знаходженні коефіцієнтів, які забезпечують максимальну асимптотичну швидкість спадання бічних пелюсток СП сигналу. Для знаходження коефіцієнтів вагової функції залежно від порядку вікна R необхідно розв'язати таку систему із $R + 1$ рівнянь:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{r=0}^R a_r = 1; \\ \sum_{r=0}^R (-1)^r \cdot a_r = 0; \\ \dots \\ \sum_{r=0}^R (-1)^r \cdot r^{2R-2} a_r = 0. \end{array} \right. \quad (11)$$

З роботи [5] відомо, що швидкість спадання бічних пелюсток пропорційна кількості косинусних членів у віконній функції:

$$V_S = V_R (2l - 1), \quad (12)$$

де $V_R = -6 \frac{\text{дБ}}{\text{окт}}$ — асимптотична швидкість спадання для прямокутної вагової функції.

Для ефективного періодограмного оброблення сигналу значення $V_S \geq 40 \frac{\text{дБ}}{\text{окт}}$, тому порядок вікна $R = 3$. В результаті розв'язання системи (11) отримано коефіцієнти для оптимальної вагової функції даних:

$$\omega_d(n) = 0,3558 - 0,4874 \cdot \cos\left(\frac{2\pi n}{N}\right) + 0,1442 \cdot \cos\left(\frac{4\pi n}{N}\right) - 0,0126 \cdot \cos\left(\frac{6\pi n}{N}\right). \quad (13)$$

Максимального значення $\omega(n) = 1$ функція досягає в середній точці області визначення $\frac{N}{2}$. На краях функція зважування плавно спадає до нуля, тобто відбувається згладжування крайніх відліків масиву даних у кінцевих точках розриву.

Кореляційне вагове вікно $\omega_c(m)$ впливає на середнє значення періодограми. Бічні пелюстки кореляційної вагової функції збільшують зміщення оцінки СГП, а також змінюють амплітуди сусідніх спектральних складових досліджуваного сигналу. Тому основним критерієм ефективності синтезу кореляційного вікна $\omega_c(m)$ для періодограмно-корелограмного оброблення сигналу є мінімізація рівня бічних пелюсток A_S відносно рівня головної пелюстки спектра. З метою отримання вікна $\omega_c(m)$ можна здійснити множення чотиричленного вікна Кайзера-Бесселя на відповідні масштабувальні коефіцієнти. Узагальнений вираз для симетричного кореляційного вікна має такий вигляд:

$$\omega_c(m) = \sum_{r=0}^R a_r \cdot \cos\left[\frac{2\pi}{M} rm\right]. \quad (14)$$

Підставивши у вираз (16) знайдені коефіцієнти a_r , отримаємо кореляційне вікно

$$\omega_c(m) = 0,4024 + 0,498 \cos\left[\frac{2\pi m}{M}\right] + 0,983 \cos\left[\frac{4\pi m}{M}\right] + 0,0012 \cos\left[\frac{6\pi m}{M}\right]. \quad (15)$$

Таким чином, побудовані вагові функції є ефективнішими порівняно з відомими функціями зважування за основними критеріями, що висуваються до вікон даних і кореляційних вікон.

Аналіз ефективності методу спектрального оцінювання

Для зручності та наочності аналізу ефективності запропонованого методу введемо коефіцієнт ефективності спектрального оцінювання Q_S , який показує, у скільки разів зменшується дисперсія оцінювання СГП згідно із запропонованим методом порівняно з класичним спектральним методом. Обробляючи перекривні підпоследовності, необхідно враховувати кореляцію зважених відліків сигналу в перетвореннях сусідніх ділянок підпоследовностей. Значення коефіцієнта кореляції

як функції степеня перекривання B можна визначити за формулою [5]

$$C(B) = \frac{\left\{ \sum_{m=0}^{M-1} \omega(m) \cdot \omega(m + [1-b]M) \right\}^2}{\left[\sum_{m=0}^{M-1} \omega^2(m) \right]^2}. \quad (16)$$

Слід зазначити, що значення ступеня перекривання даних обирається з урахуванням особливостей реалізації, алгоритму ШПФ. Тому значення зсуву B має бути кратним цілочисловому степеню двійки. Окрім того, перекривання сегментів менше 50 % не використовується через мале число оброблюваних підпоследовностей для таких режимів оброблення даних. Для 75 %-го перекривання сегментів, тобто для значень зсуву $B = 0,25M$ збільшується кількість оброблюваних підпоследовностей. Тобто, за такого значення перекривання сегментів однойменні відліки сигналу використовуються 2—4 рази, за винятком двох кінцевих сегментів, у яких $0,25 \cdot M$ відліків використовуються один раз. Для значення зсуву $0,25 \cdot M$ коефіцієнт ефективності дорівнює

$$Q_{S_{0,75}} = \frac{P_{0,75}}{P_0 [1 + 1,5C^2(0,75) + C^2(0,5) + 0,5C^2(0,25)]}, \quad (17)$$

де $P_{0,75}$ — кількість перекривних сегментів для $B = 0,25M$.

На рис. 1 наведено залежність коефіцієнта ефективності запропонованого методу оцінювання ФД від числа неперервних сегментів даних для 50 %-го та 75 %-го перекривання підпоследовностей.

Аналіз графіків свідчить, що навіть для 50 %-го перекривання дисперсія оцінювання СГП знижується в 1,5—1,9 разів залежно від числа оброблюваних сегментів. Мінімальна дисперсія досягається за 75 %-го перекривання, коли коефіцієнт ефективності залежно від числа оброблюваних даних набуває значення від 2,2 до 3,6. Це можна пояснити тим, що таке перекривання вирівнює оброблення більшості відліків сигналу, оскільки ті відліки, що набували малої ваги в одному сегменті, отримували вищу значимість в інших оброблюваних сегментах. Подальше збільшення значення перекривання

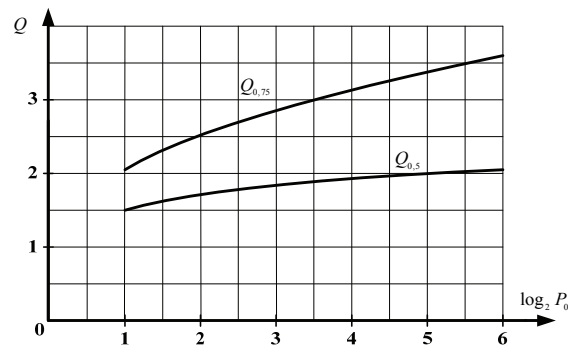


Рис. 1. Залежність коефіцієнта ефективності від числа сегментів для 50 %-го і 75 %-го перекривання

сегментів, наприклад, до $B = \frac{M}{8}$, недоцільне, тому що при цьому зростає коефіцієнт кореляції між

підпоследовностями ($C(B) > 0,5$), що призведе до зміщення оцінок СГП сигналу.

Роздільна здатність може бути визначена як модуль мінімальної різниці частотних складових сигналу: $\Delta f = \min |f_1 - f_2|$, при якій ще можливе роздільне оцінювання цих складових СГП сигналу. Поділивши Δf на частоту дискретизації, отримаємо пронормоване значення роздільної здатності $\beta_f = \frac{\Delta f}{f_s}$. Основним чинником, який

впливає на значення частотної роздільної здатності, є обсяг вибірок сигналу M , що використовується для здійснення ДПФ та подальшого знаходження СГП сигналу. На рис. 2 показано залежності роздільної здатності від вхідного масиву вибі-

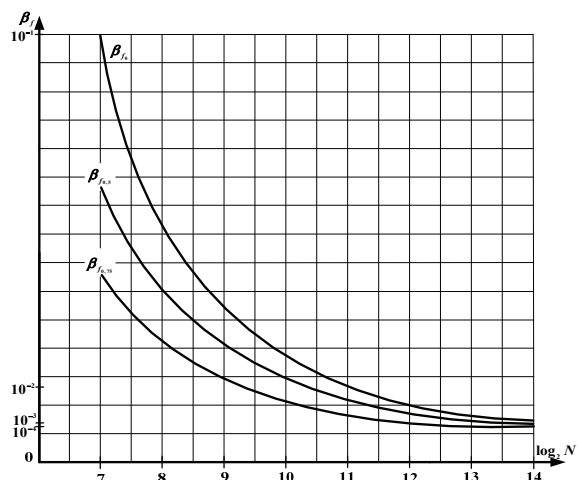


Рис. 2. Залежності роздільної здатності від обсягу масиву вхідних даних

рок для класичного методу оцінювання (β_{f_0}) та запропонованого методу оцінювання з 50 %-м перекриванням сегментів ($\beta_{f_{0,5}}$) і 75 %-м перекриванням ($\beta_{f_{0,75}}$).

Найвищою роздільною здатністю характеризується запропонований метод з 75 %-м перекриттям, причому для $P_0 = 4$ критерій $\beta_{f_{0,75}}$ сягає значень $2 \cdot 10^{-4}$, що у 4 рази перевищує показники класичного методу спектрального оцінювання.

Висновки

Запропоновано метод спектрального оцінювання випадкових сигналів, що базується на багатоетапному обробленні вибірок сигналу. На перших етапах оброблення формуються перекривні сегменти даних, що підлягають оптимальному віконному зважуванню. У подальшому виконується періодограмне оброблення зважених підпоследовностей. Наступний етап пов'язаний зі здійсненням корелограмного оброблення періодограм та отриманням зваженої автокореляційної оцінки. На останньому етапі за допомогою ШПФ визначається оцінка СГП-сигналу.

Виконано синтез віконних функцій зважування, що сформовані на базі сімейства косинусних вагових функцій. Побудовано чотиричленну функцію даних, що характеризується максимальною швидкістю спадання бічних пелюсток, та симетричне кореляційне вікно, яке характеризується мінімальним рівнем паразитних пелюсток.

Проведено аналіз ефективності методу спектрального оцінювання. Доведено, що найкращою ефективністю характеризується запропонований метод із 75 %-м перекриванням оброблюваних сегментів, який порівняно з класичним методом дає змогу зменшити дисперсію оцінювання СГП у 2,2—3,6 рази залежно від числа оброблюваних підпоследовностей. Аналіз роздільної здатності показав, що спектральне оцінювання згідно із запропонованим методом здійснюється з частотним розрізненням, що у 4 рази вище, ніж для класичного методу. Реалізація спектрального оцінювання з використанням базових процедур ШПФ знижує обчислювальну складність запропонованого методу.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Бендат Дж. Прикладной анализ случайных данных : пер. с англ. / Дж. Бендат, А. Пирсол. — М. : Мир, 1989. — 540 с. — ISBN 5-03-001071-8.
2. Айфичер Э. С. Цифровая обработка сигналов: практический подход : пер. с англ. / Э. С. Айфичер, Б. У. Джервис. — М. : ИД «Вильямс», 2008. — 992 с. — ISBN 978-5-8459-0710-3.
3. Марпл-мл. С. Л. Цифровой спектральный анализ и его приложения : пер. с англ. / С. Л. Марпл-мл. — М. : Мир, 1990. — 584 с. — ISBN 5-03-001191-9.
4. Оппенгейм А. Цифровая обработка сигналов : пер. с англ. / А. Оппенгейм, Р. Шафер. — М. : Техносфера, 2006. — 856 с. — ISBN 5-94836-077-6.
5. Бортник Г. Г. Методи та засоби обробки високочастотних сигналів / Г. Г. Бортник, В. М. Кичак — Вінниця : УНІВЕРСУМ-Вінниця, 1998. — 132 с. — ISBN 966-7199-23-1.

Рекомендована кафедрою телекомунікаційних систем і телебачення ВНТУ

Стаття надійшла до редакції 30.01.2014

Бортник Геннадій Григорович — канд. техн. наук, доцент, доцент кафедри телекомунікаційних систем і телебачення, **Васильківський Микола Володимирович** — аспірант кафедри телекомунікаційних систем і телебачення, **Стальченко Олександр Володимирович** — старший викладач кафедри телекомунікаційних систем і телебачення, e-mail: stat1978@mail.ru.

Вінницький національний технічний університет, Вінниця

G. G. Bortnyk¹
M. V. Vasylykivskyi¹
O. V. Stalchenko¹

Digital method of spectral estimation of random signals

¹Vinnitsia National Technical University

A method for increasing the efficiency of digital spectral estimation based on random signals periodogram-correctiongram processing of discrete samples of the random signal is suggested in the paper. The advantage of the proposed method is the frequency discrimination and resistance statistical analysis results of random signals.

Key words: spectral analysis, random signals, power spectral density, weight function.

Bortnyk Genadii G. — Cand. Sc. (Eng.), Assistant Professor, Assistant Professor of the Chair of Telecommunication Systems and Television, **Vasylykivskyi Mykola V.** — Post-Graduate Student of the Chair of Telecommunication Systems and Television, **Stalchenko Oleksandr V.** — Senior Lecturer of the Chair of Telecommunication Systems and Television, e-mail: stat1978@mail.ru.

Г. Г. Бортник¹
М. В. Васильковський¹
А. В. Стальченко¹

Цифровой метод спектральной оценки случайных сигналов

¹Винницкий национальный технический университет

Предложен цифровой метод повышения эффективности спектральной оценки случайных сигналов на базе периодограммно-корелограмной обработки дискретных выборок исследуемого сигнала. Преимуществом предложенного метода является частотное различие и статистическая стойкость результатов анализа случайных сигналов.

Ключевые слова: спектральный анализ, случайные сигналы, спектральная плотность мощности, весовые функции.

Бортник Геннадий Григорьевич — канд. техн. наук, доцент, доцент кафедры телекоммуникационных систем и телевидения **Васильковский Николай Владимирович** — аспирант кафедры телекоммуникационных систем и телевидения, **Стальченко Александр Владимирович** — старший преподаватель кафедры телекоммуникационных систем и телевидения, e-mail: stat1978@mail.ru.