АВТОМАТИКА ТА ІНФОРМАЦІЙНО-ВИМІРЮВАЛЬНА ТЕХНІКА

УДК 517.977

О. Б. Мокін[1]
В. Б. Мокін[1]
Б. І. Мокін[1]
І. О. Чернова[1]

ІДЕНТИФІКАЦІЯ ЕКВІВАЛЕНТНОЇ ЗА КРИТИЧНОЮ ЧАСТОТОЮ МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ МІНІМАЛЬНОГО ПОРЯДКУ ДЛЯ БАГАТОВИМІРНОГО ДИНАМІЧНОГО ОБ'ЄКТА

[1]Вінницький національний технічний університет

Запропоновано метод ідентифікації еквівалентної за критичною частотою математичної моделі мінімального порядку для багатовимірного динамічного об'єкта, що допускає лінеаризацію. Підтверджено, що мінімальний порядок еквівалентної моделі дорівнює трьом і що алгоритм методу її ідентифікації базується на сумісному розв'язанні системи чотирьох нелінійних рівнянь, два з яких синтезуються із граничних умов, обумовлених мінімальною та критичною частотами спектра динамічного об'єкта, а інші два синтезуються шляхом застосування процедури методу найменших квадратів до критерію оптимізації, пов'язаного з логарифмічними амплітудними частотними характеристиками об'єкта.

Ключові слова: динамічна система, математична модель, критична частота, диференціальне рівняння, еквівалентування.

Постановка задачі і вихідні передумови

В роботі [1] визначені умови, яких потрібно дотримуватись при синтезі еквівалентної математичної моделі для багатовимірного динамічного об'єкта, що допускає лінеаризацію, і показано, що в разі еквівалентування цього об'єкта в задачі управління із замиканням одиничним зворотним зв'язком і критичною частотою $\omega_{кр}$ меншою частоти зрізу $\omega_{зр}$ цього об'єкта, тобто за виконання нерівності

$$\omega_{зр} > \omega_{кр}\,, \tag{1}$$

мінімальний порядок еквівалентної моделі цього багатовимірного об'єкта, процеси в якому адекватно описуються диференціальним рівнянням *n*-го порядку —

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \ldots + a_1 \frac{dy}{dt} + y = K_n x,\ \ n > 3, \tag{2}$$

дорівнює трьом. Тобто, еквівалентною математичною моделлю цього об'єкта може бути диференціальне рівняння 3-го порядку —

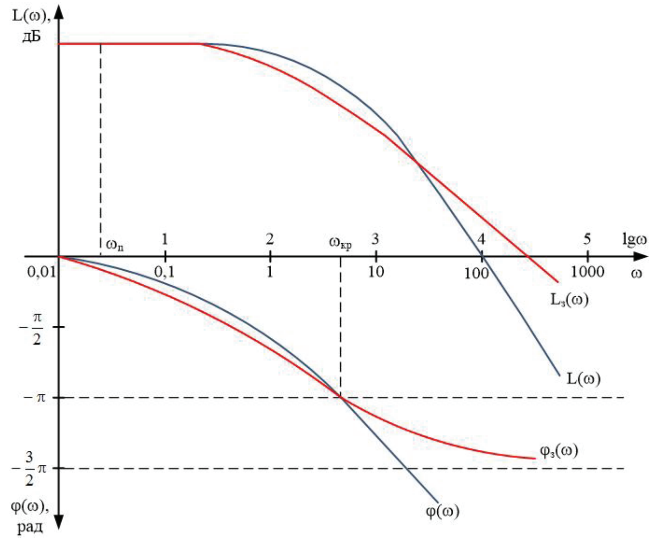
$$a_3 \frac{d^3 y}{dt^3} + a_2 \frac{d^2 y}{dt^2} + a_1 \frac{dy}{dt} + y = K_3 x\,. \tag{3}$$

Нагадаємо, що критична частота $\omega_{кр}$ динамічного об'єкта та його частота зрізу $\omega_{зр}$ визначаються з рівнянь

$$\phi(\omega_{кр}) = -\pi; \tag{4}$$

$$L(\omega_{зр}) = 0, \tag{5}$$

де $\phi(\omega)$ — логарифмічна фазова частотна характеристика (ЛФЧХ) об'єкта, а $L(\omega)$ — логарифмічна амплітудна частотна характеристика (ЛАЧХ) цього об'єкта [2], орієнтовні графіки яких показані на рис.



Орієнтовні графіки логарифмічних амплітудної та фазової частотних характеристик багатовимірного динамічного об'єкта та його еквівалентної моделі

Сформульована вище умова обумовлена тим, що рівняння (4) в принципі не може бути виконаним для математичних моделей, що мають вигляд (2), при їх порядку, меншому трьох, оскільки при $n=1$ маємо

$$\phi_1(\omega) > -\frac{\pi}{2}, \quad \forall\omega \in [0, \infty), \tag{6}$$

а при $n=2$ маємо

$$\phi_2(\omega) > -\pi, \quad \forall\omega \in [0, \infty)\,, \tag{7}$$

і лише при $n=3$ справедливою є система нерівностей

$$\begin{aligned} &\phi_3(\omega) \geq -\pi, && \forall\omega \in [0,\, \omega_{кр}]; \\ &\phi_3(\omega) < -\pi, && \forall\omega \in (\omega_{кр},\, \infty), \end{aligned} \tag{8}$$

з якою збігається рівність (4) на критичній частоті $\omega_{кр}$.

І нашою задачею у цій статті буде побудова такого методу ідентифікації еквівалентної математичної моделі (3), щоби вона з допустимою похибкою описувала процес в багатовимірному динамічному об'єкті, який адекватно описується математичною моделлю (2), за умови, що виконується нерівність (1).

Розв'язання поставленої задачі

В еквівалентній математичній моделі (3) невідомими є чотири параметри $\left(a_1, a_2, a_3, K_3\right)$, для визначення яких потрібно мати сумісну систему чотирьох рівнянь, в яких ці параметри виступатимуть невідомими.

Оскільки ми ці рівняння збираємось синтезувати з використанням логарифмічних частотних характеристик $L(\omega), \phi(\omega)$ об'єкта та $L_3(\omega), \phi_3(\omega)$ еквівалентної математичної моделі (3), то спочатку зупинимось на експериментальному та математичному визначенні цих характеристик.

Для визначення логарифмічних частотних характеристик $L(\omega), \phi(\omega)$ об'єкта поставимо активний експеримент з використанням стандартного комплекту для зняття амплітудної частотної характеристики $A(\omega)$ та фазової частотної характеристики $\phi(\omega)$ у вигляді генератора синусоїдальних сигналів змінної частоти, подвійного пікового вольтметра та фазометра-частотоміра. Експериментально знявши ці характеристики, задамо їх на частотній осі, вираженій в логарифмічному масштабі, в результаті чого одразу ж отримуємо точково задану ЛФЧХ $\phi(\omega)$. А для отримання точково заданої ЛАЧХ $L(\omega)$ використовуємо відому формулу

$$L(\omega) = 20\lg A(\omega). \tag{9}$$

Що ж до визначення логарифмічних частотних характеристик еквівалентної математичної моделі (3), то спочатку перетворимо цю модель по Лапласу [2] і отримаємо передаточну функцію $W_3(p)$ у вигляді

$$W_3(p) = \frac{y(p)}{x(p)} = \frac{K_3}{a_3 p^3 + a_2 p^2 + a_1 p + 1}, \tag{10}$$

потім отримаємо АФЧХ $W_3(j\omega)$ у вигляді

$$\begin{aligned} W_3(j\omega) = W_3(p)\Big|_{p=j\omega} = \frac{K_3}{1 - a_2\omega^2 + j\left(a_1\omega - a_3\omega^3\right)} = \\ = \frac{K_3\left(1 - a_2\omega^2\right)}{\left(1 - a_2\omega^2\right)^2 + \left(a_1\omega - a_3\omega^3\right)^2} + j\frac{(-K_3)\left(a_1\omega - a_3\omega^3\right)}{\left(1 - a_2\omega^2\right)^2 + \left(a_1\omega - a_3\omega^3\right)^2} = R_3(\omega) + jQ_3(\omega), \end{aligned} \tag{11}$$

а потім отримаємо АЧХ $A_3(\omega)$ та ФЧХ $\phi_3(\omega)$ у вигляді

$$A_3(\omega) = \sqrt{R_3^2(\omega) + Q_3^2(\omega)} = \frac{K_3}{\sqrt{\left(1 - a_2\omega^2\right)^2 + \left(a_1\omega - a_3\omega^3\right)^2}}; \tag{12}$$

$$\phi_3(\omega) = \operatorname{arctg}\frac{Q_3(\omega)}{R_3(\omega)} = -\operatorname{arctg}\frac{a_1\omega - a_3\omega^3}{1 - a_2\omega^2}. \tag{13}$$

Задаючи частоту у виразі (13) в логарифмічному масштабі, ми одразу отримаємо ЛФЧХ $\phi_3(\omega)$, а застосовуючи формулу (9) до виразу (12), отримаємо ЛАЧХ $L_3(\omega)$ у вигляді

$$L_3(\omega) = 20\lg A_3(\omega) = 20\lg K_3 - 10\lg\left[\left(1 - a_2\omega^2\right)^2 + \left(a_1\omega - a_3\omega^3\right)^2\right]. \tag{14}$$

Як видно з рис., на малій частоті ω_n буде справедливою рівність

$$L(\omega_n) = L_3(\omega_n). \tag{15}$$

Із виразів (14) і (15), враховуючи другий порядок малості степенів чисел, суттєво менших нуля, матимемо:

$$L(\omega_n) \approx 20\lg K_3, \tag{16}$$

звідки

$$K_3 = 10^{\frac{L(\omega_n)}{20}}. \tag{17}$$

Отримуючи параметр K_3, ми використали ліву граничну умову, обумовлену необхідністю забезпечення рівності коефіцієнтів передачі динамічного об'єкта та його еквівалентної моделі в усталеному режимі (коли усі похідні від вихідної координати стають такими, що дорівнюють нулю).

А тепер подивимось, що нам дає використання правої граничної умови, що задається рівністю (4), підставляючи в яку вираз (13), матимемо:

$$-\operatorname{arctg}\frac{a_1\omega_{kp} - a_3\omega_{kp}^3}{1 - a_2\omega_{kp}^2} = -\pi \tag{18}$$

або

$$a_1\omega_{kp} - a_3\omega_{kp}^3 = 0, \tag{19}$$

звідки

$$a_1 = a_3\omega_{kp}^2 . \tag{20}$$

Тож із чотирьох необхідних нам рівнянь для визначення параметрів a_1, a_2, a_3, K_3 еквівалентної моделі (3) ми уже маємо два, що задаються виразами (17) і (20).

А для отримання ще двох рівнянь спочатку сформуємо функціонал

$$\Sigma^L = \sum_{s=1}^{N}\left[L(\omega_s) - L_3(\omega_s)\right]^2 = \sum_{s=1}^{N}\left\{L(\omega_s) - 20\lg K_3 + 10\lg\left[\left(1 - a_2\omega_s^2\right)^2 + \left(a_1\omega_s - a_3\omega_s^3\right)^2\right]\right\}^2, \tag{21}$$

потім підставимо у нього вираз (20) та отримаємо цей функціонал у вигляді

$$\Sigma^L = \sum_{s=1}^{N}\left[L\left(\omega_s\right) - L_3\left(\omega_s\right)\right]^2 = \sum_{s=1}^{N}\left\{L(\omega_s) - 20\lg K_3 + 10\lg\left[\left(1 - a_2\omega_s^2\right)^2 + a_3^2\left(\omega_{kp}^2\omega_s - \omega_s^3\right)^2\right]\right\}^2, \tag{22}$$

а потім знайдемо частинні похідні від функціонала (22) по a_2 та по a_3 і прирівняємо кожну з них до нуля. В результаті отримаємо два нелінійних рівняння відносно невідомих параметрів a_2 та a_3:

$$\sum_{s=1}^{N}\frac{\left\{L(\omega_s) - 20\lg K_3 + 10\lg\left[\left(1 - a_2\omega_s^2\right)^2 + a_3^2\left(\omega_{kp}^2\omega_s - \omega_s^3\right)^2\right]\right\}\left(1 - a_2\omega_s^2\right)\omega_s^2}{\left(1 - a_2\omega_s^2\right)^2 + a_3^2\left(\omega_{kp}^2\omega_s - \omega_s^3\right)^2} = 0; \tag{23}$$

$$\sum_{s=1}^{N}\frac{\left\{L(\omega_s) - 20\lg K_3 + 10\lg\left[\left(1 - a_2\omega_s^2\right)^2 + a_3^2\left(\omega_{kp}^2\omega_s - \omega_s^3\right)^2\right]\right\}\left(\omega_{kp}^2\omega_s - \omega_s^3\right)^2}{\left(1 - a_2\omega_s^2\right)^2 + a_3^2\left(\omega_{kp}^2\omega_s - \omega_s^3\right)^2} = 0, \tag{24}$$

розв'язуючи які сумісно, за стандартною процедурою пакета прикладних програм Mathcad [3], знайдемо числові значення цих параметрів. А підставляючи знайдене із системи рівнянь (23), (24) значення параметра a_3 у вираз (20), знайдемо і числове значення параметра a_1, чим і завершується розв'язання задачі еквівалентування багатовимірного динамічного об'єкта математичною моделлю (3), два із чотирьох параметрів якої знаходяться із граничних умов на частотній осі, а два інших знаходяться шляхом застосування методу найменших квадратів до квадратичного функціоналу, сформованого із ЛАЧХ об'єкта та еквівалентної моделі в частотній області пропускання динамічного об'єкта, обмеженій максимальною частотою $\omega_{\max}$, яку ще здатен пропускати об'єкт, з урахуванням N дискрет частотного спектра, кількість яких визначається з виразу

$$N = \frac{\omega_{\max}}{\Delta}, \tag{25}$$

в якому Δ — це вибраний інтервал дискретизації.

Висновки

1. Запропоновано метод ідентифікації еквівалентної за критичною частотою математичної моделі мінімального порядку для багатовимірного динамічного об'єкта, що допускає лінеаризацію.

2. Підтверджено, що мінімальний порядок еквівалентної моделі дорівнює трьом і що алгоритм методу її ідентифікації базується на сумісному розв'язанні системи чотирьох нелінійних рівнянь, два з яких синтезуються з граничних умов, обумовлених мінімальною та критичною частотами спектра динамічного об'єкта, а інші два синтезуються шляхом застосування процедури методу найменших квадратів до критерію оптимізації, пов'язаного з логарифмічними амплітудними частотними характеристиками об'єкта.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Мокін. О. Б. Визначення умов, за яких рух динамічних об'єктів з порядком математичних моделей, вищим трьох, можна описувати еквівалентними моделями з порядком, не вищим трьох / О. Б. Мокін, В. Б. Мокін, Б. І. Мокін // Вісник Вінницького політехнічного інституту. — 2014. — № 4. — С. 7—14.
2. Макаров И. М. Линейные автоматические системы / И. М. Макаров, Б. М. Менский. — Москва : Машиностроение. — 1977. — 464 с.
3. Макаров Е. Г. Mathcad : учебный курс / Е. Г. Макаров. — Санкт-Петербург : Питер, 2009. — 384 с.

Рекомендована кафедрою комп'ютерного еколого-економічного моніторингу та інженерної графіки

Стаття надійшла до редакції 16.09.2014

Мокін Олександр Борисович — д-р техн. наук, професор, завідувач кафедри відновлювальної енергетики та транспортних електричних систем і комплексів, e-mail: abmokin@gmail.com;

Мокін Віталій Борисович — д-р техн. наук, професор, завідувач кафедри комп'ютерного еколого-економічного моніторингу та інженерної графіки, e-mail: vbmokin@gmail.com;

Мокін Борис Іванович — академік НАПН України, д-р техн. наук, професор, професор кафедри відновлювальної енергетики та транспортних електричних систем і комплексів;

Чернова Ірина Олександрівна — інженер Науково-дослідної частини, здобувач кафедри відновлювальної енергетики та транспортних електричних систем і комплексів.

Вінницький національний технічний університет, Вінниця

O. B. Mokin[1]
V. B. Mokin[1]
B. I. Mokin[1]
I. O. Chernova[1]

Identification of equivalent mathematical model with minimum order by the critical frequency for multidimensional dynamic object

[1]Vinnytsia National Technical University

A method for identification of equivalent mathematical model with minimum order by the critical frequency for multidimensional dynamic object that allows linearization is suggested in the paper. It is confirmed that the minimum order of equivalent model is three and that algorithm of the method of identification of its model based on the joint solution of the system of four nonlinear equations, two of which are synthesized from the boundary conditions for the minimum and the critical frequency of the dynamic object range, and the other two are synthesized by application of the least squares method to the optimization criteria related to the logarithmic amplitude frequency characteristics of the object.

Keywords: dynamical system, mathematical model, critical frequency, differential equation, equivalenting.

Mokin Oleksandr B. — Dr. Sc. (Eng.), Professor, Head of the Chair of Renewable Energy and Transport Electrical Systems and Complexes, e-mail: abmokin@gmail.com;

Mokin Vitalii B. — Dr. Sc. (Eng.), Professor, Head of the Chair of Computer-Aided Ecological and Economic Monitoring and Engineering Graphics, e-mail: vbmokin@gmail.com;

Mokin Borys I. — Academician of NAPS of Ukraine, Dr. Sc. (Eng.), Professor, Professor of the Chair of Renewable Energy and Transport Electrical Systems and Complexes;

Chernova Iryna O. — Engineer of Science Research Department, Researcher of the Chair of Renewable Energy and Transport Electrical Systems and Complexes

А. Б. Мокин[1]
В. Б. Мокин[1]
Б. И. Мокин[1]
И. А. Чернова[1]

Идентификация эквивалентной по критической частоте математической модели минимального порядка для многомерного динамического объекта

[1]Винницкий национальный технический университет

Предложен метод идентификации эквивалентной по критической частоте математической модели минимального порядка для многомерного динамического объекта, допускающего линеаризацию. Подтверждено, что минимальный порядок эквивалентной модели равен трем и алгоритм метода ее идентификации базируется на совместном решении системы четырех нелинейных уравнений, два из которых синтезируются из граничных условий, обусловленных минимальной и критической частотами спектра динамического объекта, а другие два синтезируются путем применения процедуры метода наименьших квадратов к критерию оптимизации, связанном с логарифмическими амплитудными частотными характеристиками объекта.

Ключевые слова: динамическая система, математическая модель, критическая частота, дифференциальное уравнение, эквивалентирование.

Мокин Александр Борисович — д-р техн. наук, профессор, заведующий кафедрой возобновляемой энергетики и транспортных электрических систем и комплексов, e-mail: abmokin@gmail.com;

Мокин Виталий Борисович — д-р техн. наук, профессор, заведующий кафедрой компьютерного эколого-экономического мониторинга и инженерной графики, e-mail: vbmokin@gmail.com;

Мокин Борис Иванович — академик НАПН Украины, д-р техн. наук, профессор, профессор кафедры возобновляемой энергетики и транспортных электрических систем и комплексов.

Чернова Ирина Александровна — инженер Научно-исследовательской части, соискатель кафедры возобновляемой энергетики и транспортных электрических систем и комплексов