СТРАТЕГІЯ, ЗМІСТ ТА НОВІ ТЕХНОЛОГІЇ ПІДГОТОВКИ СПЕЦІАЛІСТІВ З ВИЩОЮ ТЕХНІЧНОЮ ОСВІТОЮ

УДК 512.53

А. А. Барковська[1]
В. Д. Дереч[1]

ПРО ОДНУ ІНВЕРСНУ НАПІВГРУПУ, ЩО ПОВ'ЯЗАНА З ГРУПОЮ АФІННИХ ПЕРЕТВОРЕНЬ ПОЛЯ F_5

[1]Вінницький національний технічний університет

Нехай AF_5 — група афінних перетворень поля F_5. Множина усіх ін'єкцій, кожна з яких включається в деяке афінне перетворення, відносно звичайної операції композиції бінарних відношень утворює інверсну напівгрупу, яку ми позначаємо через $I(AF_5)$. В статті вивчаються різноманітні властивості напівгрупи $I(AF_5)$. Зокрема, дано опис групи автоморфізмів і конгруенцій напівгрупи $I(AF_5)$. Також дані відповіді на деякі комбінаторні питання.

Ключові слова: група, інверсна напівгрупа, афінне перетворення, поле.

Вступ

Нехай G — довільна група бієкцій на скінченній множині $N = \{1, 2, ..., n\}$, а IS_n — симетрична інверсна напівгрупа на N. Розглянемо множину $I(G) = \{\varphi \in IS_n : \varphi \subseteq \eta \text{ для деякого } \eta \in G\}$. Легко перевірити, що відносно звичайної операції композиції бінарних відношень отримується інверсний моноїд. Якщо, приміром, взяти симетричну групу S_n, то, зрозуміло, що $I(S_n)$ — симетрична інверсна напівгрупа. З означення інверсного моноїда $I(G)$ безпосередньо випливає, що він є розкладним (factorizable), тобто будь-який його елемент можна продовжити (відносно звичайного включення) до бієкції, що належить групі G. В роботі [1] вивчаються деякі властивості інверсного моноїда $I(A_n)$, де A_n — альтернативна група. Зокрема, в цій роботі показано, що конгруенції $I(A_n)$ утворюють ланцюг відносно включення. В статті [2] дано опис групи автоморфізмів скінченного моноїда $I(G)$ а також знайдено необхідні і достатні умови, за яких будь-який стабільний порядок на $I(G)$ є фундаментальним або антифундаментальним. В роботі [3], крім іншого, знайдено необхідні і достатні умови для того, щоби моноїд $I(G)$ був переставним. Також в цій роботі дано опис конгруенцій на $I(G)$ у випадку, коли група G є глобально-транзитивною. Для моноїда $I(A_n)$ з'ясована структура довільного стабільного порядку.

У цій статті вивчаються властивості цілком конкретної інверсної напівгрупи. А саме. Нехай F_5 — п'ятиелементне поле. Позначимо через AF_5 групу афінних перетворень поля F_5. Автори вивчають різноманітні властивості інверсного моноїда $I(AF_5)$. Зокрема, дано опис конгруенцій (теорема [1]), групи автоморфізмів (твердження [2]). З'ясовані деякі комбінаторні питання.

1. Термінологія і основні означення

Напівгрупа S називається інверсною, якщо для довільного елемента $x \in S$ існує (причому єдиний) елемент x^{-1} такий, що виконуються рівності $xx^{-1}x = x$ і $x^{-1}xx^{-1} = x^{-1}$. Відомо [4], що напівгрупа є інверсною тоді і лише тоді, коли вона регулярна і будь-які два її ідемпотенти комутують. Одним з основних прикладів інверсної напівгрупи є моноїд усіх ін'єкцій довільної множини відносно звичайної операції композиції бінарних відношень.

Нехай F_5 — п'ятиелементне поле. Зафіксуємо два елемента $a, b \in F_5$, причому $a \neq 0$. Відображення $f_{a,b} : x \mapsto ax + b$ називається афінним перетворенням поля F_5. Множина усіх афінних перетворень відносно операції композиції утворює групу афінних перетворень, яку ми позначимо через AF_5. Легко перевірити, що афінне перетворення $f_{a,b}$ взаємно однозначно визначається парою елементів $\langle a, b \rangle$, де $a \neq 0$. Звідси безпосередньо випливає, що $|AF_5| = 20$.

Група перетворень G на множині $N = \{1, 2, ..., n\}$ називається *k*-транзитивною, якщо для довільних двох послідовностей $a_1, a_2, ..., a_k \in N$ і $b_1, b_2, ..., b_k \in N$ існує перетворення $\varphi \in G$ таке, що $(a_i)\varphi = b_i$ для кожного $i \in \{1, 2, ..., k\}$. Відомо, що група AF_5 є 2-транзитивною.

Групу перетворень G на множині $N = \{1, 2, ..., n\}$ назвемо *глобально-транзитивною* [3], якщо для будь-яких двох рівнопотужних підмножин A і B множини N існує перетворення $\varphi \in G$ таке, що $(A)\varphi = B$. У статті [3] зазначено, що група AF_5 є глобально-транзитивною.

Область визначення і множину значень перетворення ω позначимо відповідно через $dom(\omega)$ і $im(\omega)$. Число $|im(\varphi)|$ називають рангом перетворення φ і позначають через $rank(\varphi)$.

Напівгрупа S називається переставною, якщо для будь-яких двох її конгруенцій η і ψ виконується рівність $\eta \circ \psi = \psi \circ \eta$.

Якщо A — довільна множина, то через Δ_A будемо позначати відношення рівності на множині A.

Цілком 0-проста інверсна напівгрупа називається напівгрупою Брандта. Нехай G — група, I — довільна множина. Крім того, нехай $B = B(G, I) = (I \times G \times I) \cup \{0\}$, де $\{0\} \notin I \times G \times I$. Визначимо операцію множення на множині B таким чином: $(i, g, j) \cdot (j, h, k) = (i, gh, k)$, а всі інші добутки дорівнюють 0. Тоді $B(G, I)$ є напівгрупою Брандта і будь-яку напівгрупу Брандта можна подати у такій формі. Групу G називають базисною групою напівгрупи Брандта.

Нехай σ — довільна конгруенція на групі G. На напівгрупі Брандта $B(G, I)$ визначимо бінарне відношення Σ таким чином: $((i, g, j), (k, h, l)) \in \Sigma$ тоді і тільки тоді, коли $i = k$, $j = l$ і $(g, h) \in \sigma$. Відношення Σ є конгруенцією на напівгрупі Брандта. Кожна конгруенція відмінна від універсальної на $B(G, I)$ має таку форму.

Всі інші необхідні поняття з теорії напівгруп можна знайти в [4].

2. Деякі комбінаторні питання

В цьому пункті дамо відповідь на два питання:

1. Скільки елементів містить інверсний моноїд $I(AF_5)$?

2. Яка кількість ідемпотентів моноїда $I(AF_5)$?

Для відповіді на перше питання спочатку доведемо лему.

Лема 1. *Нехай* $\varphi \in I(AF)_5$, *причому* $rank(\varphi) \geq 2$. *Тоді існує точно одне афінне перетворення* $\eta \in AF_5$ *таке, що* $\varphi \subseteq \eta$.

Доведення. Твердження достатньо довести для випадку, коли $rank(\varphi) = 2$. Припустимо, що $\eta_1, \eta_2 \in AF_5$, причому $\varphi \subseteq \eta_1$ і $\varphi \subseteq \eta_2$. Покажемо, що $\eta_1 = \eta_2$. Нехай $\eta_1 = f_{a_1, b_1}$, $\eta_2 = f_{a_2, b_2}$ і $dom(\varphi) = \{x_1, x_2\}$. Оскільки $\varphi \subseteq \eta_1$ і $\varphi \subseteq \eta_2$, то

$$a_1 x_1 + b_1 = a_2 x_1 + b_2 \tag{1}$$

і

$$a_1 x_2 + b_1 = a_2 x_2 + b_2. \tag{2}$$

Віднімаємо від рівності (1) рівність (2): $a_1(x_1 - x_2) = a_2(x_1 - x_2)$. Оскільки $x_1 \neq x_2$, то $x_1 - x_2 \neq 0$. Звідси $a_1 = a_2$. Позаяк $a_1 x_1 + b_1 = a_1 x_1 + b_2$, то $b_1 = b_2$. Отже, $f_{a_1, b_1} = f_{a_2, b_2}$. Тобто,

$\eta_1 = \eta_2$.

Твердження 1. *Інверсна напівгрупа* $I\left(AF_5\right)$ *містить 546 елементів і* $2^5 = 32$ *ідемпотента.*

Доведення. Оскільки група AF_5 є транзитивною, то для будь-яких $x, y \in F_5$ $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in I\left(AF_5\right)$. Позаяк $\left|F_5\right| = 5,$ то кількість елементів рангу один напівгрупи $I\left(AF_5\right)$ дорівнює $5^2 = 25.$ Тепер підрахуємо число елементів моноїда $I\left(AF_5\right)$, ранг кожного з яких дорівнює 2. Розглянемо фіксоване $\Psi \in AF_5$. Зрозуміло, що афінне перетворення Ψ включає $\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} = \dfrac{5!}{2!\cdot 3!} = 10$ елементів інверсного моноїда $I\left(AF_5\right)$ рангу 2. Далі, застосовуючи лему 1, обчислюємо число всіх елементів рангу 2 моноїда $I\left(AF_5\right)$: $\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot 20 = 200.$ Аналогічно число усіх елементів рангу 3 дорівнює $\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot 20 = 10 \cdot 20 = 200.$ Так само діємо для підрахунку елементів рангу 4: $\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot 20 = 100.$ Вище ми вже зазначали, що число елементів групи AF_5 дорівнює 20. Іншими словами кількість елементів рангу 5 моноїда $I\left(AF_5\right)$ дорівнює 20. Отже, загальна число елементів інверсного моноїда $I\left(AF_5\right)$ дорівнює: 1 + 25 + 200 + + 200 + 100 + 20 = 546 (звісно, що враховано і порожнє перетворення).

Тепер щодо кількості ідемпотентів. Легко довести, що відношення рівності Δ_A на множині A (де $A \subseteq F_5$) є ідемпотентом інверсного моноїда $I\left(AF_5\right)$ і кожний ідемпотент напівгрупи $I\left(AF_5\right)$ має таку форму. Отже, число ідемпотентів моноїда $I\left(AF_5\right)$ в точності дорівнює кількості підмножин множини F_5. Позначимо через $B\left(F_5\right)$ множину усіх підмножин поля F_5. Позаяк $\left|F_5\right| = 5,$ то $\left|B\left(F_5\right)\right| = 2^5 = 32.$

3. Група автоморфізмів інверсного моноїда $I\left(AF_5\right)$

Нехай G — довільна підгрупа симетричної групи S_n. Через $N\left(G\right)$ позначимо нормалізатор групи G в симетричній групі S_n. В статті [2] доведено, що група автоморфізмів інверсного моноїда $I(G)$ізоморфна $N\left(G\right)$. Тепер конкретизуємо це загальне твердження для нашого випадку. Отже, нам треба розібратися, що являє собою нормалізатор афінної групи AF_5 в симетричній групі S_5. Відомо, що група AF_5 є максимальною (відносно включення) підгрупою симетричної групи S_5. Крім того добре відомо, що нормальні підгрупи групи S_5 вичерпуються самою групою S_5, тривіальною і альтернативною підгрупами. З останніх двох тверджень безпосередньо випливає, що нормалізатор групи AF_5 в симетричній групі S_5 дорівнює самій групі AF_5. Таким чином отримуємо таке твердження.

Твердження 2. *Група автоморфізмів інверсного моноїда* $I\left(AF_5\right)$ *ізоморфна групі* AF_5.

4. Конгруенції інверсного моноїда $I\left(AF_5\right)$

В статті [3] доведено, що інверсний моноїд $I\left(AF_5\right)$ є переставним. Як відомо (див. [5], теорема 4) ідеали переставної напівгрупи лінійно впорядковані відносно включення. Звідси випливає (див. [6], теорема 2), що кожний ідеал моноїда $I\left(AF\right)_5$ має форму: $I_m = \left\{\varphi \in I\left(AF_5\right) : rank(\varphi) \le m\right\}$. Нехай $k\,(k < 5)$ — невід'ємне ціле число. Легко перевірити, що факторнапівгрупа I_{k+1}/I_k є напівгрупою Брандта. Нехай σ — конгруенція, відмінна від універсальної, на факторі I_{k+1}/I_k. Зазначимо, що опис конгруенцій на напівгрупі Брандта добре відомий (див. [4] або п. 1 цієї статті). На моноїді

$I(AF_5)$ визначимо бінарне відношення Σ таким чином: $\Sigma = I_k \times I_k \cup \left(\left(D_{k+1} \times D_{k+1}\right) \cap \sigma\right) \cup \Delta,$ де Δ — відношення рівності на $I(AF_5)$ і $D_{k+1} = \left\{\varphi \in I(AF_5) : rank(\varphi) = k+1\right\}.$ Позаяк інверсний моноїд $I(AF_5)$ є переставним, то згідно з теоремою 4 зі статті [3] кожна конгруенція (відмінна від універсальної) має вищенаведену форму. Таким чином, щоб отримати вичерпний опис конгруенцій на $I(AF_5)$ нам потрібно знайти нормальні підгрупи будь-якого $H-$класу моноїда $I(AF_5)$, який є групою. Почнемо з самої групи $AF_5.$ Вона містить підгрупу D_5 порядку 10, яка ізоморфна групі симетрій правильного п'ятикутника. Оскільки індекс підгрупи D_5 в групі AF_5 дорівнює 2, то підгрупа D_5 є нормальною. Легко перевірити, що група AF_5 містить єдину підгрупу порядку 5, яка, звісно, є нормальною. Позначимо її через $B.$ Прямі підрахунки показують, що група AF_5 містить п'ять підгруп порядку 4 і п'ять підгруп порядку 2, кожна з яких не є нормальною. Отже, повний список нормальних підгруп афінної групи AF_5 такий: сама група AF_5, одинична підгрупа, підгрупи D_5 і $B.$ Очевидно, що решітка нормальних підгруп групи AF_5 є лінійно впорядкованою. Тепер з'ясуємо, що собою являє базисна група факторнапівгрупи $I_4/I_3.$ Випишемо усі її елементи: $\left\{\begin{pmatrix}0123\\0123\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0123\\1302\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0123\\2031\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0123\\3210\end{pmatrix}\right\}.$ Легко перевірити, що ця група породжується елементом $\begin{pmatrix}0123\\1302\end{pmatrix}$ а, отже, є циклічною. Зазначимо також, що решітка підгруп цієї групи є лінійною. Базисними групами факторнапівгруп I_3/I_2 і I_2/I_1 є, відповідно, двоелементна група $\left\{\begin{pmatrix}012\\012\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}012\\210\end{pmatrix}\right\}$ і одноелементна група $\left\{\begin{pmatrix}01\\01\end{pmatrix}\right\}.$

Тепер ми вже готові сформулювати основний результат цього пункту.

Теорема 1. *Кожна (відмінна від універсальної) конгруенція на моноїді* $I(AF_5)$ *має форму* $\Sigma = I_k \times I_k \cup \left(\left(D_{k+1} \times D_{k+1}\right) \cap \sigma\right) \cup \Delta,$ *де* Δ *— відношення рівності на* $I(AF_5),$ σ *— конгруенція, відмінна від універсальної, на фактор-напівгрупі* I_{k+1}/I_k *і* $D_{k+1} = \left\{\varphi \in I(AF_5) : rank(\varphi) = k+1\right\}.$ *Решітка конгруенцій інверсного моноїда* $I(AF_5)$ *лінійно впорядкована відносно включення.*

5. Інші властивості інверсного моноїда $I(AF_5)$

В цьому пункті перелічимо низку властивостей інверсного моноїда $I(AF_5)$, які безпосередньо випливають з більш загальних теорем статей [2] і [3]. Спочатку дамо кілька означень. Частковий порядок Ω на довільній напівгрупі S називають *фундаментальним*, якщо існує гомоморфізм ξ напівгрупи S у напівгрупу $PT(X)$ усіх часткових перетворень деякої множини X такий, що виконується еквівалентність $(a,b) \in \Omega \Leftrightarrow (a)\xi \subseteq (b)\xi.$ Легко показати, що за цих умов частковий порядок Ω є стабільним, а гомоморфізм ξ — є ізоморфізмом. Якщо Υ — фундаментальне відношення порядку на напівгрупі $S,$ то відношення порядку Υ^{-1} називають *антифундаментальним.*

Твердження 3. *Будь-який стабільний порядок на інверсному моноїді* $I(AF_5)$ *є фундаментальним або антифундаментальним*.

Далі, нехай $S = (S,\cdot)$ — довільна напівгрупа. Зафіксуємо елемент $a \in S$ і визначимо на множині S нову операцію $*_a$ згідно правила $x *_a y = x \cdot a \cdot y.$ Легко перевірити, що операція $*_a$ є асоціативною. Напівгрупа $(S,*_a)$ називається *варіантом* напівгрупи $(S,\cdot).$ Одне з найважливіших питань, яке виникає при вивченні варіантів цієї напівгрупи, формулюється таким чином: нехай a і b

— елементи напівгрупи $(S,\cdot)$. За яких умов напівгрупи $(S,*_a)$ і $(S,*_b)$ будуть ізоморфними?

Твердження 4. *Напівгрупи* $(I(AF_5),*_\alpha)$ *і* $(I(AF_5),*_\beta)$ *ізоморфні тоді і лише тоді, коли* $rank(\alpha)=rank(\beta)$.

Інверсна напівгрупа називається *фундаментальною,* якщо довільна конгруенція, яка включається в H-відношення Гріна є відношенням рівності.

Твердження 5. *Інверсний моноїд* $I(AF_5)$ *є фундаментальним.*

Висновки

Основне призначення загальних теорем будь-якої теорії — це застосування їх для отримання конкретних результатів при вивченні того чи іншого об'єкту дослідження. Так, наприклад, пошук і вивчення структури конкретної групи симетрій — це основна задача конкретної теорії груп. Накопичення таких результатів врешті може дати поштовх для отримання загальних теорем. В цій статті вивчаються різноманітні властивості цілком конкретної інверсної напівгрупи, група симетрій якої ізоморфна афінній групі поля F_5. Цей експериментальний матеріал може стати в нагоді для опосередкованого підтвердження чи навпаки — спростування (як нетривіальний контрприклад) тієї чи іншої гіпотези в галузі теорії часткових симетрій, репрезентантом якої є теорія інверсних напівгруп.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Lipscomb S. L. The alternating semigroups: generators and congruences / S. L. Lipscomb // Semigroup Forum. — 1992. — V. 44. — P. 96—106.

2. Derech V. D. On one class of factorizable fundamental inverse monoids / V. D. Derech // Ukr. Mat. Zh. — 2013. — V. 65, № 6. — P. 864—871.

3. Derech V. D. Stable quasi-orders on some permutable inverse monoids / V. D. Derech // Ukr. Mat. Zh. — 2014. — V. 66, № 4. — P. 445—457.

4. Клиффорд А. Алгебраическая теория полугрупп / А. Клиффорд, Г. Престон. — М. : Мир, 1972, — Т. 1. — 286 с. — Т. 2. — 422 с.

5. Hamilton H. Permutability of congruences on commutative semigroups / H. Hamilton // Semigroup Forum. — 1975. — V. 10. — P. 55—66.

6. Derech V. D. Congruences of a permutable inverse semigroups of finite rank / V. D. Derech // Ukr. Mat. Zh. — 2005. — V. 57, № 4. — P. 565—570.

Рекомендована кафедрою вищої математики ВНТУ

Стаття надійшла до редакції 18.02.2014

Барковська Алла Андріївна — старший викладач кафедри вищої математики;

Дереч Володимир Дмитрович — канд. фіз.-мат. наук, доцент, доцент кафедри вищої математики, e-mail: derechvd@gmail.com.

Вінницький національний технічний університет, Вінниця

A. A. Barkovska[1]
V. D. Derech[1]

Concerning one inverse semigroup related to the group of affine transformations of the field F_5

[1]Vinnytsia National Technical University

Let AF_5 be a group of affine transformations of the field F_5. The set of all injections, each of which is included in some affine transformations with respect to the usual operations of composition of binary relations forming inverse semigroup, which we denoted by $I(AF_5)$. In this paper we study various properties of semigroup $I(AF_5)$. In particular, we describes the group of automorphisms and congruency on $I(AF_5)$. Also we give answers to some combinatorial questions.

Keywords: group, inverse semigroup, affine transformation, field.

Barkovska Alla A. — Senior Lecturer of the Chair of Higher Mathematics;

Derech Volodymyr D. — Cand. Sc. (Ph.-Math.), Assistant Professor, Assistant Professor of the Chair of Higher Mathematics, e-mail: derechvd@gmail.com

А. А. Барковская[1]
В. Д. Дереч[1]

Про одну инверсную полугруппу, которая связана с группой аффинных преобразований поля F_5

[1]Винницкий национальный технический университет

Пусть AF_5 — группа аффинных преобразований поля F_5. Множество всех инъекций, каждая из которых включается в некоторое аффинное преобразование, относительно обычной операции композиции бинарных отношений образует инверсную полугруппу, которую мы обозначим через $I(AF_5)$. В статье изучаются различные свойства полугруппы $I(AF_5)$. В частности, дано описание группы автоморфизмов и конгруэнций полугруппы $I(AF_5)$. Также дан ответ на некоторые комбинаторные вопросы.

Ключевые слова: группа, инверсная полугруппа, аффинное преобразование, поле.

Барковская Алла Андреевна — старший преподаватель кафедры высшей математики;
Дереч Владимир Дмитриевич — канд. физ.-мат. наук, доцент, доцент кафедры высшей математики, e-mail: derechvd@gmail.com