УДК 519.63

А. Ю. Алієв, канд. ф-м. наук, доц.

ЧИСЕЛЬНЕ РОЗВ'ЯЗАННЯ НЕЛОКАЛЬНОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ РІВНЯННЯ ЕЛІПТИЧНОГО ТИПУ

Розглянуто нелокальну задачу для рівняння еліптичного типу в прямокутній області. Побудовано прямокутну сітку і відповідну різницеву задачу. Оцінено похибку наближеного розв'язання нелокальної задачі.

Вступ

Різні прикладні задачі (задачі теплопровідності [1—3], гідромеханіки [4—5], теорії пружності і оболонок [6] та ін.) приводяться до нелокальних крайових задач. Поява нелокальних крайових умов ускладнює насамперед обґрунтування класичних різницевих схем у зв'язку з ускладненням структури матриць отриманих систем рівнянь. Ця складність виявляє себе особливо під час обґрунтування чисельних методів у випадку нелінійних рівнянь. В цій роботі розглядається нелінійна нелокальна крайова задача для квазілінійного рівняння. Для чисельного розв'язання поставленої задачі застосовується метод кінцевих різниць і оцінюється похибка наближеного рішення нелокальної задачі.

Основна частина

Нехай $\Omega = \{o < x < a,\ 0 < y < b\}$. Позначимо:

$$\Gamma^1 = \{0 \le x \le a,\ y = b\};\ \Gamma^2 = \{x = 0,\ 0 < y < b\};\ \Gamma^3 = \{0 \le x \le a,\ y = 0\};\ \Gamma^4 = \{x = a,\ 0 < y < b\};$$

$$\Gamma^l = \{x = l,\ 0 < y < b,\ 0 < l < b\};\ \Gamma = \bigcup_{i=1}^{4} \Gamma^i;\ \ \sigma = \Gamma^1 \bigcup \Gamma^3;\ \ \bar{\Omega} = \Omega \bigcup \Gamma .$$

Нехай $f(x, y, z, p, q)$ — деяка задана неперервна функція, визначена $\forall (x, y) \in \bar{\Omega}$ і для всіх $z,\ p,\ q$. Будемо вважати, що часткові похідні $f'_z,\ f'_p,\ f'_q$ існують і задовольняють нерівності

$$f'_z \ge 0; \tag{1}$$

$$|\ f'_p\ |,\ \ |\ f'_q\ | \le M < \infty . \tag{2}$$

Нехай $L[u] \equiv \Delta u - f\left(x,\ y,\ u,\ u_x,\ u_y\right)$. Вважатимемо, що $\phi,\ \psi$ — задані неперервні функції в області своїх визначень.

Необхідно знайти неперервну в $\bar{\Omega}$ функцію $u(x,\ y)$, яка буде двічі безперервно диференційовану в Ω та задовольняє рівняння

$$L[u] = 0 \tag{3}$$

і граничні умови

$$u\big|_{\sigma} = \phi ; \tag{4}$$

$$l[u] = u(l,\ y) - \alpha(y)\ u\ (a, y) = \psi(y),\quad 0 < y < b; \tag{5}$$

$$\alpha(y) \ge 1,\ \ 0 < y < b; \tag{6}$$

$$l^{(1)}[u] = \left. \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \beta(y) \frac{\partial u}{\partial y} + \delta(y) u \right) \right|_{\Gamma^2} = \gamma(y),\ \ \delta(y) \le 0 . \tag{7}$$

Нехай $h_1 = a/N_1$; $h_2 = b/N_2$. Побудуємо сіткову область за допомогою ліній $x = x_i$; $y = y_j$; $i = 0, 1, \ldots N_1$; $j = 0, 1, \ldots N_2$, і нехай $x_k < l \le x_{k+1}$.

Введемо позначення:

$$\Omega_h = \left\{ \left(x_i, y_j \right) : i = 1,2,...,N_1 - 1,\ \ j = 1,2,...,N_2 - 1 \right\};$$

$$\Gamma_h^1 = \left\{ \left(x_i, b \right) : i = 1,2,...,N_1 \right\};\ \Gamma_h^2 = \left\{ \left(0, y_j \right) : j = 1,2,...,N_2 - 1 \right\};$$

$$\Gamma_h^3 = \left\{ \left(x_i, 0 \right) : i = 1,2,...,N_1 \right\};\ \Gamma_h^4 = \left\{ \left(a, y_j \right) : j = 1,2,...,N_2 - 1 \right\};$$

$$\sigma_h = \Gamma_h^1 \bigcup \Gamma_h^3;\ \Gamma_h = \bigcup_{i=1}^{4} \Gamma_h^i;\ \bar{\Omega}_h = \Omega_h \bigcup \Gamma_h .$$

Апроксимуємо оператори L і l різницевими операторами L_h, l_h, визначеними таким чином:

$$L_h \left[u_{ij} \right] \equiv \Delta_h \left[u_{ij} \right] - f\left(x_i, y_j, u_{ij}, D_{h_1 \overset{o}{x}} \left[u_{ij} \right], D_{h_2 \overset{o}{y}} \left[u_{ij} \right] \right); \tag{8}$$

$$l_h \left[u_{N_1 j} \right] \equiv \frac{l - x_k}{h_1} u_{k+1 j} + \frac{x_{k+1} - l}{h_1} u_k - \alpha_j u_{N_1 j}, \tag{9}$$

де

$$\left. \begin{aligned} \Delta_h \left[u_{ij} \right] = u_{\bar{x}x} + u_{\bar{y}y};\ u_{\bar{x}x} = \frac{u_{i+1 j} - 2u_{ij} + u_{i-1 j}}{h_1^2}; \\ u_{\bar{y}y} = \frac{u_{ij+1} - 2u_{ij} + u_{ij-1}}{h_2^2};\ D_{h_1 \overset{o}{x}} \left[u_{ij} \right] = \frac{u_{i+1 j} - u_{i-1 j}}{2h_1}; \\ D_{h_2 \overset{o}{y}} \left[u_{ij} \right] = \frac{u_{ij+1} - u_{ij-1}}{2h_2}. \end{aligned} \right\} \tag{10}$$

Сформулюємо різницеву задачу, що відповідає поставленій задачі. Знайти функцію U, визначену в $\bar{\Omega}_h$, таку, що

$$L_h \left[U_{ij} \right] = 0 \ \text{ на } \ \Omega_h; \tag{11}$$

$$l_h \left[U_{N_1 j} \right] = \psi_j \ \text{ на } \ \Gamma_h^4; \tag{12}$$

$$U_{ij} = \phi_{ij} \ \text{ на } \ \sigma_h; \tag{13}$$

$$l_h^{(1)} \left[U_{0j} \right] = \frac{U_{1j} - U_{0j}}{h_1} + \beta_j^+ \frac{U_{0j+1} - U_{0j}}{h_2} + \beta_j^- \frac{U_{0j} - U_{0j-1}}{h_2} + \delta_j U_{0j} = \gamma_j \ \text{ на } \ \Gamma_h^2, \tag{14}$$

де

$$\beta_j^+ = \frac{\beta_j + \left| \beta_j \right|}{2} \ge 0; \quad \beta_j^- = \frac{\beta_j - \left| \beta_j \right|}{2} \le 0 .$$

Будемо вважати, що область $\bar{\Omega}_h$ зв'язна, і виконується нерівність

$$Mh < 2\theta , \tag{15}$$

де $h = \max\left\{ h_1, h_2 \right\}$, $0 < \theta < 1$ — деяке фіксоване число.

Розглянемо лінійний різницевий оператор

$$\Lambda_h [U_{ij}] = \begin{cases} \Lambda'_h \left[U_{ij} \right] \ \text{ на } \ \Omega_h; \\ l_h \left[U_{N_1 j} \right] \ \text{ на } \ \Gamma_h^4; \\ l_h^{(1)} \left[U_{0j} \right] \ \text{ на } \ \Gamma_h^2; \end{cases} \tag{16}$$

де

$$\Lambda'_h \left[U_{ij} \right] = \Delta_h \left[U_{ij} \right] + \xi_{ij} D_{h_1 \overset{o}{x}} \left[U_{ij} \right] + \eta_{ij} D_{h_2 \overset{o}{y}} \left[U_{ij} \right] - \mu_{ij} U_{ij};$$

$$\left| \xi_{ij} \right|, \left| \eta_{ij} \right| \le M; \tag{17}$$

$$\mu_{ij} \ge 0. \tag{18}$$

За стандартною схемою доводиться така лема.

Лема 1. Нехай $V \not\equiv \text{const}$ — деяка функція, визначена в $\bar{\Omega}_h$, яка задовольняє нерівності $\Lambda_h[V] \geq 0$ $\left(\Lambda_h[V] \leq 0\right)$. Тоді V може набувати найбільше додатне (найменше від'ємне) значення лише у вузлових точках з σ_h.

Нехай U є наближеним розв'язком задачі (11)—(14).

Теорема 1. *Нехай точний розв'язок и задачі* (3)—(7) *має в* Ω *обмежені треті похідні та неперервні другі похідні в* $\bar{\Omega}$. *Тоді для похибки* $\varepsilon_{ij} = u_{ij} - U_{ij}$ *наближеного розв'язання справедливою є оцінка*

$$\varepsilon_{ij} = O(h).$$

*Доведення***.** На основі формули Тейлора маємо:

$$\begin{cases} \Lambda'_h\left[\varepsilon_{ij}\right] = O(h) \text{ на } \Omega_h; \\ l_h\left[\varepsilon_{N_1 j}\right] = O\left(h^2\right) \text{ на } \Gamma_h^4; \\ \varepsilon_{ij} = 0, \text{ на } \sigma_h; \\ l_h^{(1)}\left[\varepsilon_{0j}\right] = O(h) \text{ на } \Gamma_h^2. \end{cases} \tag{19}$$

Представимо розв'язок системи (19) у вигляді

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^1 + \varepsilon_{ij}^2, \tag{20}$$

де

$$\begin{cases} \Lambda'_h\left[\varepsilon_{ij}^1\right] = O(h) \text{ на } \Omega_h; \\ \varepsilon_{N_1 j}^1 = 0 \text{ на } \Gamma_h^4; \\ \varepsilon_{ij}^1 = 0, \text{ на } \sigma_h; \\ l_h^{(1)}\left[\varepsilon_{0j}^1\right] = O(h) \text{ на } \Gamma_h^2. \end{cases} \tag{21}$$

$$\begin{cases} \Lambda'_h\left[\varepsilon_{ij}^2\right] = 0 \text{ на } \Omega_h; \\ l_h\left[\varepsilon_{N_1 j}^2\right] = -l_h\left[\varepsilon_{N_1 j}^1\right] + O\left(h^2\right) \text{ на } \Gamma_h^4; \\ \varepsilon_{ij}^2 = 0, \text{ на } \sigma_h; \\ l_h^{(1)}\left[\varepsilon_{0j}^2\right] = 0 \text{ на } \Gamma_h^2. \end{cases} \tag{22}$$

Спочатку оцінимо розв'язок системи (21). Розглянемо функцію

$$g(x,y) = \frac{1}{K}\left(e^{\nu_0 a} - e^{\nu_0 x}\right),$$

де

$$\nu_0 = \frac{M}{\theta}\operatorname{arcth}\left(\frac{3\theta - \theta^2}{2}\right); \ k = \mu_0 \nu_0; \ \mu_0 = \min\left\{1, \frac{M}{2}(1-\theta)\right\}.$$

Неважко перевірити, що

$$\begin{cases} \Lambda'_h\left[g_{ij}\right] \leq -1 \text{ на } \Omega_h; \\ l_h^{(1)}\left[g_{0j}\right] \leq -1 \text{ на } \Gamma_h^2. \end{cases} \tag{23}$$

На основі (21), (23) и леми 1 випливає, що функція

$$G_{ij}^{\pm} = c \cdot h \cdot g_{ij} \pm \varepsilon_{ij}^1$$

додатна на $\bar{\Omega}_h$ (вибирається кінцева постійна C).

Звідси випливає нерівність

$$\max_{\bar{\Omega}_h}\left|\varepsilon_{ij}^1\right| \le C_1 h,\ \ C_1 = \text{const} > 0 . \tag{24}$$

Позначимо через $w = \max_{\Gamma_h^4}\left|\varepsilon_{N_1 j}^2\right|$ і нехай $\bar{\omega}_{ij}$ — розв'язок системи

$$\Lambda_h'\left[\bar{\omega}_{ij}\right] = 0 \ \text{ на } \ \Omega_h ;$$

$$\bar{\omega}_{N_1 j} = w \ \text{ на } \ \Gamma_h^4 ;$$

$$\bar{\omega}_{ij} = 0 \ \text{ на } \ \sigma_h ;$$

$$l_h^{(1)}\left[\bar{\omega}_{0j}\right] = 0 \ \text{ на } \ \Gamma_h^2 .$$

З леми 1 випливає

$$\left|\varepsilon_{ij}^2\right| \le \bar{\omega}_{ij} \ \text{ на } \ \bar{\Omega}_h ; \tag{25}$$

$$\bar{\omega}_{ij} \le \tau_i w,\ \ 0 < \tau_i < 1 \ \text{ на } \ \Omega_h . \tag{26}$$

З іншого боку

$$l_h\left[\varepsilon_{N_1 j}^2\right] = -l_h\left[\varepsilon_{N_1 j}^1\right] + O\left(h^2\right) \ \text{ на } \ \Gamma_h^4 .$$

І звідси на основі (25), (26) маємо:

$$\alpha_j\left|\varepsilon_{N_1 j}^2\right| \le \frac{l - x_k}{h_1}\left|\varepsilon_{k+1\,j}^2\right| + \frac{x_{k+1} - l}{h_1}\left|\varepsilon_{kj}^2\right| + \frac{l - x_k}{h_1}\left|\varepsilon_{k+1\,j}^1\right| + \frac{x_{k+1} - l}{h_1}\left|\varepsilon_{kj}^1\right| + C_2 h^2$$

або

$$\alpha_j w \le \tau w + C_1 h + C_2 h ,$$

де

$$\tau = \max\left\{\tau_{k+1}, \tau_k\right\} .$$

Звідси маємо:

$$w \le \frac{C_3 h}{\alpha_j - \kappa_i} \le C_4 h , \tag{27}$$

де

$$C_4 = \frac{C_3}{\min\limits_j\left(\alpha_j - \tau\right)} .$$

Тоді з (25)—(27) маємо:

$$\max_{\bar{\Omega}_h}\left|\varepsilon_{ij}^2\right| \le C_5 h,\ \ C_5 = \max_i \tau_i C_4 . \tag{28}$$

На основі (20), (24) и (28) маємо:

$$\max_{\bar{\Omega}_h}\left|\varepsilon_{ij}\right| \le C_6 h , \tag{29}$$

де $C_6 = C_1 + C_5$.

Теорему 1 доведено.

Висновки

За методом кінцевих різниць у випадку нелінійної нелокальної крайової задачі для квазілінійного рівняння побудовано відповідну різницеву задачу. Отримано оцінку похибки порядку $O(h)$ наближеного розв'язання нелокальної задачі.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Ионкин Н. И. О нахождении численного решения одной неклассической задачи / Н. И. Ионкин // Вестн. Моск. ун-та, сер.15, Вычислительная математика и кибернетика. — 1979. — № 1. — С. 64—68.

2. Макаров В. Л. Метод прямых для квазилинейного уравнения параболического типа с неклассическим краевым условием / В. Л. Макаров, Д. Т. Кулыев // Укр. матем. журнал. — 1985. — Т. 37, № 1. — С. 42—48.

3. Чегис Р. Ю. Исследование двумерной задачи теплопроводности с нелокальным условием / Р. Ю. Чегис // Дифференциальные уравнения и их приложения. — Вильнюс : ИМК АН Лит. ССР. — 1984. — Вып. 35. — С. 74—82.

4. Сапаговас М. П. Численные методы для двумерной задачи с нелокальным условием / М. П. Сапаговас // Дифференциальные уравнения — 1984. — Т. 20, № 7. — С. 1258—1266.

5. Луковский И. А. Приближенные методы решения задач динамики ограниченного объема жидкости / И. А. Луковский, М. Я. Барняк, А. Н. Комаренко. — К. : Наукова думка, 1984. — 232 с.

6. Гордезиани Д. Г. Об одном классе нелокальных краевых задач в теории упругости и теории оболочек / Д. Г. Гордезиани // Теория и численные методы расчета пластин и оболочек : тр. Всесоюзн. совещания-семинара. — Тблиси, 1984. — С. 106—127.

7. Алиев А. Ю. Применимость метода сеток в решении одной нелокальной задачи для эллиптических уравнений / А. Ю. Алиев // Приближенные методы решения операторных уравнений : темат. сб. научн. тр. — Баку : БГУ, 1991. — С. 3—9.

8. Досиев А. А. Об одном приближенном методе решения нелокальных задач для уравнения Лапласа / А. А. Досиев, А. Ю. Алиев // Актуальные проблемы фундаментальных наук : сб. докл. Международной науч.-тех. конф. — М. : МГТУ, 1991. — Т. 2. — С. 115—117.

9. Вабишевич П. Н. О численном решении нелокальных эллиптических задач / П. Н. Вабишевич // Изв. высш. учебн. зав., Математика. — 1983 — Т. 252, № 5. — С. 13—19.

Рекомендована кафедрою вищої математики

Стаття надійшла до редакції 9.01.2013
Рекомендована до друку 18.01.2013

Алієв Айдин Юнус огли — доцент.

Кафедра обчислювальної математики, Бакинський державний університет, Азербайджан, Баку