УДК 621.317

О. М. Васілевський, канд. техн. наук, доц.

МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ОЦІНЮВАННЯ ТА ВИРАЖЕННЯ ДИНАМІЧНОЇ ЧУТЛИВОСТІ ЗАСОБІВ ВИМІРЮВАЛЬНОЇ ТЕХНІКИ

Запропоновано математичну модель оцінювання та вираження чутливості в динамічному режимі роботи засобів вимірювальної техніки, яка дозволяє будувати характеристики її зміни і аналізувати динамічну чутливість в процесі вимірювання періодичних функцій часу на основі розробленого математичного апарату.

Вступ і постановка задачі

Динамічні вимірювання, тобто вимірювання з використанням засобів вимірювальної техніки (ЗВТ) в динамічному режимі, отримують все більшого розповсюдження в техніці та наукових дослідженнях. Ці вимірювання пов'язані в першу чергу з вивченням закономірностей проходження фізичних процесів в досліджуваних об'єктах. Тому роль динамічних вимірювань та методів оцінювання метрологічних характеристик ЗВТ в динамічному режимі особливо велика, по-перше, в галузях науки, пов'язаних з дослідженням структури матерії, аналізом і синтезом нових речовин та матеріалів, вивченням об'єктів у експериментальних умовах і, по-друге, в галузях техніки і виробництва, для яких характерне створення нових технологічних процесів і випробування нових ЗВТ з підвищеною вірогідністю контролю та точністю вимірювань.

Значення чутливості в заданих умовах використання, як правило, визначається виробником засобу вимірювання. Ця характеристика (чутливість) дозволяє споживачу оцінити вихідний сигнал засобу вимірювання, знаючи межі зміни вимірюваної величини, і вибрати сенсор для вимірювального каналу, який відповідатиме вимогам і умовам вимірювання.

Частота зміни вимірюваної величини є одним із найважливіших параметрів, що впливає на чутливість засобу вимірювання. В залежності від частоти зміни вимірюваної величини існує два різних режими роботи засобів вимірювання, з якими пов'язані відповідні параметри чутливості:

1) статичний режим роботи, за якого вимірювана величина постійна або змінюється дуже повільно;

2) динамічний режим роботи, за якого вимірювана величина змінюється швидко (модульований потік випромінювання, прискорення, що пов'язане з вібраціями конструкції тощо).

Деякі технічні засоби за своєю природою працюють тільки в динамічному режимі (наприклад, мікрофони).

Способи оцінювання статичної чутливості ЗВТ детально розглянуті в літературних джерелах [1—4]. Що стосується методики оцінювання та вираження динамічної чутливості засобів вимірювання, то в літературних джерелах з метрології [1—4] їм приділено недостатньо уваги. Тому розробка математичного апарату, який дозволить визначати динамічну чутливість ЗВТ під час вимірювань періодичних функцій часу, є актуальною науковою задачею кожного точного вимірювання.

З огляду на вищесказане *метою статті* є створення математичних моделей, які дозволять оцінювати та виражати чутливість ЗВТ в динамічному режимі роботи на основі вимірюваних періодичних сигналів.

Викладення основного матеріалу

Динамічна чутливість може бути визначена тоді, коли вимірювана величина є періодичною функцією часу. За таких умов вихідний сигнал Y ЗВТ в усталеному режимі має таку саму періодичність, як і вимірювана величина X.

Нехай вимірювана (вхідна) величина X описується виразом

$$X(t) = x_0 + x_1 \cos(\omega t), \tag{1}$$

де x_0 — постійна складова вхідного сигналу ЗВТ, на яку накладається синусоїдна змінна з амплітудою x_1 і частотою $f = \omega/(2\pi)$.

Вихідний сигнал засобу вимірювання при цьому набуває вигляду

$$Y(t) = y_0 + y_1 \cos(\omega t + \varphi), \tag{2}$$

де y_0 — постійна складова вихідного сигналу ЗВТ, що відповідає вхідному сигналу x_0 (обидві ці величини визначають робочу точку Q_0 на статичній градуювальній характеристиці); y_1 — амплітуда змінної складової вихідного сигналу, що утворюється під дією змінної складової вимірюваної величини; φ — зсув фази між варіаціями на виході і на вході ЗВТ.

Чутливість ЗВТ, яка в загальному вигляді є відношенням зміни вихідного сигналу ΔY до зміни вхідного сигналу ΔX [1], в цьому випадку (в динамічному режимі) визначається за формулою

$$S = \left.\frac{y_1}{x_1}\right|_{Q_0}. \tag{3}$$

Залежність динамічної чутливості від частоти f, тобто $S(f)$, є частотною характеристикою засобу вимірювання. Коли зміна вимірюваної (вхідної) величини ΔX не описується синусоїдним законом, але має період $T = 2\pi/\omega$, то залежність $X(t)$ можна розкласти в ряд Фур'є:

$$X(t) = x_0 + \sum_{n=1}^{N} x_n \cos(n\omega t + \phi_n). \tag{4}$$

Тоді вихідний сигнал засобу вимірювання набуде вигляду

$$Y(t) = y_0 + \sum_{n=1}^{N} y_n \cos(n\omega t + \varphi_n) \tag{5}$$

і буде являти собою суперпозицію різних складових $x_n \cos(n\omega t + \phi_n)$. Кожна з цих складових визначається своїм значенням чутливості, що визначається частотною характеристикою

$$\left.\frac{y_n}{x_n}\right|_{Q_0} = S(f_n), \tag{6}$$

де $f_n = n\omega/(2\pi)$.

Зміна чутливості від функції частоти пов'язані, як правило, з механічною, тепловою або електричною інерцією складових частин засобу вимірювальної техніки — сенсора — і засобів, що безпосередньо пов'язані з ним, — яка заважає тому, щоб сигнал миттєво прямував за вимірюваною величиною, і чим вища частота, тим сильніше ця інерція проявляється.

Виражений в загальній формі зв'язок між величинами Y і X є диференціальним рівнянням, яке в залежності від конкретного випадку може бути рівнянням першого або другого порядку. Вихідний сигнал в режимі неперервної синусоїдальної дії можна описати просто, привівши диференціальне рівняння до еквівалентної комплексної форми шляхом перетворення

$$\frac{d}{dt} \to j\omega \quad \text{та} \quad \frac{d^2}{dt^2} \to -\omega^2 . \tag{7}$$

Засоби вимірювань за умови роботи в динамічному режимі в більшості практичних випадків описують диференціальними рівняннями першого або другого порядку. Спочатку розглянемо випадок, коли вимірюваний сигнал у засобі вимірювання в динамічному режимі описується диференціальним рівнянням першого порядку

$$A\frac{dy(t)}{dt} + By(t) = x(t), \tag{8}$$

де A і B — постійні величини; $x(t) = x_1 \cos(\omega t)$ — вимірюваний сигнал, що змінюється за синусоїдним законом; $y(t) = y_1 \cos(\omega t + \varphi)$ — вихідний сигнал ЗВТ в усталеному режимі, що змінюється за синусоїдним законом.

Представимо відповідні члени рівняння (8) у комплексному вигляді так:

$$x(t) \to x_1 \exp(j\omega t); \tag{9}$$

$$y(t) \to y_1 \exp\left[j(\omega t + \varphi)\right], \tag{10}$$

де x_1 і y_1 — дійсні величини.

Підставляючи рівняння (9) і (10) у диференціальне рівняння (8) та провівши деякі математичні перетворення, отримаємо комплексну форму диференціального рівняння першого порядку (8), що має вигляд:

$$j\omega A y_1 e^{j\varphi} + B y_1 e^{j\varphi} = x_1. \tag{11}$$

Підставляючи у рівняння (11) граничну частоту, що описується виразом $f_c = \dfrac{B}{2\pi A}$, отримаємо:

$$y_1 = \frac{B^{-1} x_1}{\sqrt{1 + \left(\dfrac{f}{f_c}\right)^2}}; \tag{12}$$

$$\varphi = -\mathrm{arctg}\left(\frac{f}{f_c}\right). \tag{13}$$

Тоді вираз для динамічної чутливості ЗВТ в залежності від частоти запишеться у вигляді

$$S(f) = \frac{y_1}{x_1} = \frac{B^{-1}}{\sqrt{1 + \left(\dfrac{f}{f_c}\right)^2}}. \tag{14}$$

Якщо $f = 0$, то динамічна чутливість прямує до значення статичної чутливості ЗВТ $S(0) = 1/B$. Враховуючи таку властивість, динамічну чутливість ЗВТ можна записати у вигляді

$$S(f) = S(0)\frac{1}{\sqrt{1 + \left(\dfrac{f}{f_c}\right)^2}}. \tag{15}$$

На рис. 1 показано характеристики зміни частотної характеристики динамічної чутливості ЗВТ, що описується рівнянням (15).

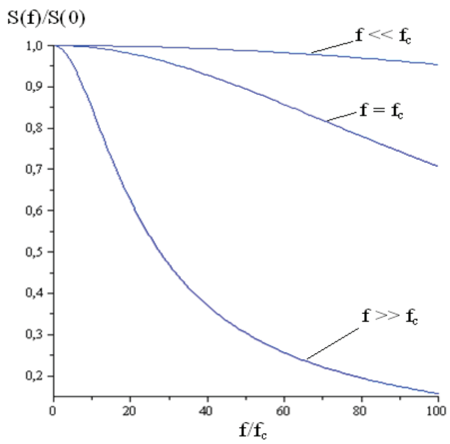

Рис. 1. Амплітудно-частотні характеристики чутливості ЗВТ в динамічному режимі

З рис. 1 видно, що за $f \ll f_c$, динамічна чутливість ЗВТ практично наближається до статичної чутливості (див. рис. 1), тобто $S(f) \approx S(0)$. Якщо $f = f_c$ (див. рис. 1), то чутливість ЗВТ в динамічному режимі зменшується на 3 дБ $\left(S(f) = \dfrac{S(0)}{\sqrt{2}} \right)$, а за $f \gg f_c$ (у разі росту частоти сигналу на порядок) динамічна чутливість ЗВТ зменшується на 20 дБ.

Далі розглянемо випадок, коли вимірюваний сигнал у засобі вимірювання в динамічному режимі описується диференціальним рівнянням другого порядку:

$$A\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + B\frac{dy(t)}{dt} + Cy(t) = x(t), \tag{16}$$

де A, B і C — постійні величини.

Використовуючи комплексні позначення (9) і (10) та підставляючи їх у диференціальне рівняння другого порядку (16), отримаємо рівняння коливальної системи вигляду

$$-A\omega^2 y_1 e^{j\varphi} + j\omega B y_1 e^{j\varphi} + C y_1 e^{j\varphi} = x_1. \tag{17}$$

Підставляючи у рівняння (17) значення $f_0 = \dfrac{\sqrt{C}}{2\pi\sqrt{A}}$ і $\varepsilon = \dfrac{B}{2\sqrt{AC}}$, де f_0 і ε — власна частота незатухаючої системи і коефіцієнт затухання, отримаємо:

$$y_1 = \frac{x_1}{C\sqrt{\left[1 - \left(\dfrac{f}{f_0}\right)^2\right]^2 + 4\varepsilon^2\left(\dfrac{f}{f_0}\right)^2}}; \tag{18}$$

$$\varphi = -\mathrm{arctg}\left(\frac{2f\varepsilon}{f_0\left[1 - (f/f_0)^2\right]} \right). \tag{19}$$

З рівняння (18) можна отримати вираз для частотної залежності динамічної чутливості ЗВТ, що описується виразом

$$S(f) = \frac{y_1}{x_1} = \frac{1}{C\sqrt{\left[1 - \left(\dfrac{f}{f_0}\right)^2\right]^2 + 4\varepsilon^2\left(\dfrac{f}{f_0}\right)^2}}. \tag{20}$$

Підставляючи значення частоти $f = 0$, отримаємо чутливість засобу вимірювання в статичному режимі, що описується рівнянням

$$S(0) = \frac{1}{C}. \tag{21}$$

Враховуючи вираз для статичної чутливості ЗВТ (21), рівняння для вираження динамічної чутливості можна представити у вигляді

$$S(f) = \frac{S(0)}{\sqrt{\left[1 - \left(\dfrac{f}{f_0}\right)^2\right]^2 + 4\varepsilon^2\left(\dfrac{f}{f_0}\right)^2}}. \tag{22}$$

На рис. 2 показано залежні зміни частотної характеристики динамічної чутливості ЗВТ, що описується рівнянням (22).

З рис. 2 видно, що за $f \ll f_0$, то динамічна чутливість ЗВТ практично наближається до статичної чутливості, тобто $S(f) \approx S(0)$; для значень коефіцієнта затухання ε між 0,6 і 0,7 динамічна чутливість є найстабільнішою у всьому діапазоні частот. Коли $\varepsilon \geq 0,7$, характеристика монотонно спадає і рівнішою стає у разі $\varepsilon = 0,7$. При цьому смуга пропускання рівна f_0. Коли $\varepsilon < 0,7$, динамічна характеристика має максимум на частоті $f_{\max} = f_0\sqrt{1-2\varepsilon^2}$. Для розширення смуги пропускання необхідно дозволити невелике підіймання характеристики динамічної чутливості $S(f)$, для цього можна зменшити значення коефіцієнта затухання ε до 0,6 (див. рис. 2).

Отже, будуючи вимірювальні канали, первинним вимірювальним перетворювачем яких є сенсор, доцільно вибирати коефіцієнт затухання ЗВТ ε між значеннями 0,6 і 0,7. При цьому ордината амплітудної характеристики приблизно однакова по всій смузі пропускання.

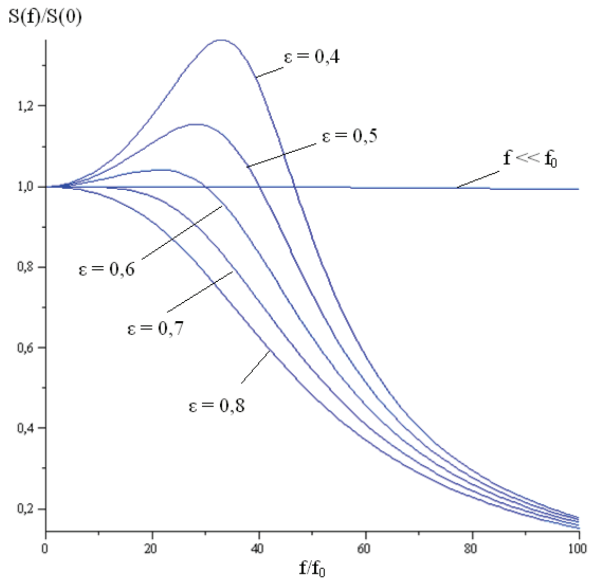

Рис. 2. Характеристики зміни динамічної чутливості ЗВТ, що описується диференціальним рівнянням другого порядку

Висновки

В динамічному режимі роботи ЗВТ у разі зміни вимірюваної величини з частотою f чутливість змінюється за законами (15) або (22). Лінійність в динамічному режимі залежить від чутливості статичного режиму $S(0)$ і параметрів частотної характеристики $(f_c,\ f_0,\ \varepsilon)$, які не залежать від вимірюваної величини у діапазоні, де чутливість $S(0)$ постійна.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Метрологічне забезпечення вимірювань і контролю : навч. пос. / [Є. Т. Володарський, В. В. Кухарчук, В. О. Поджаренко, Г. Б. Сердюк]. — Вінниця : ВДТУ, 2001. — 219 с.

2. Метрологія та вимірювальна техніка : навч. пос. / [В. В. Кухарчук, В. Ю. Кучерук, В. П. Долгополов, Л. В. Грумінська]. — Вінниця : УНІВЕРСУМ-Вінниця, 2004. — 252 с. — ISBN 966-641-084-2.

3. Основи метрології та вимірювальної техніки. Основи метрології. Т. 1 / [Дорожовець М., Мотало В., Стадник Б. та ін.] ; за ред. Б. Стадника. — Львів : вид-во Львівської політехніки, 2005. — 532 с. — ISBN 966-553-311-8.

4. Орнатський П. П. Вступ до метрології науки про вимірювання : підруч. / П. П. Орнадський. — К. : ІСДО, 1994. — 246 с.

Рекомендована кафедрою метрології та промислової автоматики

Стаття надійшла до редакції 21.09.12
Рекомендована до друку 2.10.12

Васілевський Олександр Миколайович — начальник відділу захисту інформації та інформаційно-технічного забезпечення МОН України, Київ; доцент кафедри метрології та промислової автоматики Вінницького національного технічного університету, Вінниця