УДК 519.63

А. Ю. Алієв, канд. ф-м. наук, доц.

ЧИСЕЛЬНЕ РОЗВ'ЯЗАННЯ НЕЛОКАЛЬНОЇ ЗАДАЧІ ДІРІХЛЕ ДЛЯ РІВНЯННЯ ЛАПЛАСА

Розглянуто нелокальну задачу Діріхле для рівняння Лапласа. Для чисельного розв'язання задачі використано дискретний аналог методу Фур'є. Побудовано дев'ятиточкову різницеву схему, що дозволяє оцінити похибки підвищеного порядку точності. Отримано ефективну оцінку похибки порядку $O\left(h^4\right)$*, тобто в цій оцінці похибки беруть участь тільки відомі дані задачі.*

Вступ

Використовуючи метод сіток, оцінки похибок наближеного розв'язку рівняння Лапласа зазвичай містять максимуми модулів похідних шуканого рішення. Це природно ускладнює використання оцінок на практиці. В літературі відомі оцінки похибок деяких методів, виражені через вихідні дані задачі. Так, Вазов [1] оцінив похибку дискретного методу Фур'є для задачі Діріхле для рівняння Лапласа через відомі дані. Подальший розвиток цієї роботи є в роботах [2, 3]. Е. А. Волков [4], на відміну від цих робіт, використовуючи мажоран тний метод Гершгоріна [5] і метод підсумовування по шарах [6], оцінив похибку також лише з відомими даними.

Представлення розв'язання різницевої задачі (п'ятиточкової схеми) для рівняння Лапласа на прямокутнику за допомогою дискретного аналога методу Фур'є, запропонований і обґрунтований в [1], є основним інструментом для створення нових раціональних методів для знаходження її розв'язку як на всій сітковій області [7, 8], так і на сіткових відрізках [9], причому не тільки прямокутній, але і на багатоступінчастій області. Крім того, оцінки похибки (другого порядку відносно кроку сітки h), виведені в [1], є ефективними, тобто залежать тільки від відомих величин.

У роботах [7, 8] хоча і використано представлення розв'язків дев'ятиточкової схеми, але не обґрунтовано її збіжність до розв'язання диференціальної задачі.

У цій роботі отримано ефективну оцінку порядку $O\left(h^4\right)$ для похибки між розв'язками дев'ятиточкової різницевої задачі, представлену аналогом методу Фур'є і точного розв'язання нелокальної задачі Діріхле для рівняння Лапласа.

Основна частина

Позначимо через Π прямокутник з вершинами $(0,0), (1,0), (1,b), (0,b)$, де b — раціональне число. Нехай Γ — границя цього прямокутника.

Введемо квадратну сітку прямими

$$x = x_i = ih;\;\; y = y_j = jh\;\; \left(i = 0,1,...,1/h,\; j = 0,1,...,b/h\right),$$

де $1/h$ и b/h — цілі числа. Нехай

$$\Pi_h = \left\{(x,y): x = x_i = ih,\;\; i = 0,1,...,1/h,\;\; y = y_j = jh,\;\; j = 0,1,...,b/h\right\},$$

а Γ_h — множина вузлів сітки, що лежать на Γ.

Розглянемо таку задачу:

$$\left.\begin{aligned}&\Delta u=0 \text{ в } \Pi;\\&u(x,0)=u(x,b)=0,\ (0<x<1);\\&u(1,y)=\phi(y),\ (0<y<b);\\&u(0,y)=\alpha u(c,y),\ (0<y<b),\end{aligned}\right\}\tag{1}$$

де $\phi(y)$ — п'ять разів безперервно диференційована функція, причому $\phi(0)=\phi(b)=0$.

Відповідну різницеву схему для задачі (1) побудуємо таким чином:

$$\left.\begin{aligned}&\Delta_h u_h=0 \quad \text{в} \quad \Pi_h;\\&u_h(x,0)=u_h(x,b)=0,\ (0<x<1);\\&u_h(1,y)=\phi_h(y),\ (0<y<b);\\&u_h(0,y)=\alpha u_h(c,y),\ (0<y<b).\end{aligned}\right\}\tag{2}$$

Тут припущено, що точка $x=c$ збігається з однією з точок x_i.

Доведено [10], що розв'язок задачі (1) визначається формулою

$$u(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}c_n g(x,n\pi)\sin\frac{n\pi y}{b}.$$

Доведемо, що розв'язок задачі (2) має вигляд

$$u_h(x,y)=\sum_{n=1}^{1/h}\gamma_n g\left(x,\beta_n/h\right)\sin\frac{n\pi y}{b};$$

$$c_n=\frac{2}{b}\int_0^b\phi(t)\sin\frac{n\pi t}{b}dt;$$

$$\gamma_n=\frac{2h}{b}\sum_{r=1}^{1/h}\phi(rh)\sin\frac{n\pi rh}{b};$$

$$g(x,z)=\frac{\operatorname{sh}\frac{x}{b}z-\alpha\operatorname{sh}\frac{(x-c)}{b}z}{\operatorname{sh}\frac{z}{b}-\alpha\operatorname{sh}(1-c)\frac{z}{b}};$$

β_n визначається з

$$\operatorname{sh}\frac{\beta_n}{2b}=\frac{\sin\frac{nh\pi}{2b}}{\sqrt{1-\frac{2}{3}\sin^2\frac{nh\pi}{2b}}}.$$

Очевидно, що $u_h(x,y)$ задовольняє крайові умови. Доведемо, що вона задовольняє і різницеву схему.

$$u_h(x-h,\,y\pm h)=\sum_{n=1}^{1/h}\gamma_n A\sin\frac{n\pi y}{b}\cos\frac{n\pi h}{b}\pm\sum_{n=1}^{1/h}\gamma_n B\cdot\sin\frac{n\pi h}{b}\cos\frac{n\pi y}{b}\pm\sum_{n=1}^{1/h}\gamma_n A\cos\frac{n\pi y}{b}\sin\frac{n\pi h}{b}\pm$$
$$\pm\sum_{n=1}^{1/h}\gamma_n B\cos\frac{n\pi y}{b}\sin\frac{n\pi h}{b};$$

$$u_h(x+h,y-h)+u_h(x-h,y+h)=2\sum_{n=1}^{1/h}\gamma_n A\cos\frac{n\pi h}{b}\sin\frac{n\pi y}{b}+2\sum_{n=1}^{1/h}\left[\gamma_n B\sin\frac{n\pi h}{b}\right]\cos\frac{n\pi y}{b};$$

$$u_h\left(x+h,y\right)+u_h\left(x,y+h\right)+u_h\left(x-h,y\right)+u_h\left(x,y-h\right)-4u_h\left(x,y\right)=$$
$$=2\sum_{n=1}^{1/h}\gamma_n g\left(x,\beta_n/h\right)\left[\cos\frac{n\pi h}{b}+\operatorname{ch}\beta_n/h-2\right]\sin\frac{n\pi y}{b};$$

$$u_h(x-h,y+h)=\sum_{n=1}^{1/h}\gamma_n A\cos\frac{n\pi h}{b}\sin\frac{n\pi y}{b}+\sum_{n=1}^{1/h}\gamma_n A\sin\frac{n\pi h}{b}\cos\frac{n\pi y}{b}-$$

$$-\sum_{n=1}^{1/h}\gamma_n B\cos\frac{n\pi h}{b}\sin\frac{n\pi y}{b}-\sum_{n=1}^{1/h}\gamma_n B\sin\frac{n\pi h}{b}\cos\frac{n\pi y}{b};$$

$$u_h\left(x+h,y-h\right)=\sum_{n=1}^{1/h}\gamma_n A\cos\frac{n\pi h}{b}\,\sin\frac{n\pi y}{b}-\sum_{n=1}^{1/h}\gamma_n A\sin\frac{n\pi h}{b}\cos\frac{n\pi y}{b}+$$

$$+\sum_{n=1}^{1/h}\gamma_n B\cos\frac{n\pi h}{b}\sin\frac{n\pi y}{b}-\sum_{n=1}^{1/h}\gamma_n B\sin\frac{n\pi h}{b}\cos\frac{n\pi y}{b};$$

$$u_h(x+h,y-h)+u_h(x-h,y+h)=2\sum_{n=1}^{1/h}\gamma_n A\cos\frac{n\pi h}{b}\sin\frac{n\pi y}{b}-2\sum_{n=1}^{1/h}\gamma_n B\sin\frac{n\pi h}{b}\cos\frac{n\pi y}{b};$$

$$\Delta_h u_h=4\sum_{n=1}^{1/h}\gamma_n g\left(x,\beta_n/h\right)\left[\operatorname{ch}\beta_n/b\cos\frac{n\pi h}{b}+2\cos\frac{n\pi h}{b}+2\frac{\operatorname{ch}\beta_n}{b}-5\right]\sin\frac{n\pi y}{b},$$

де

$$A=\frac{\left(\operatorname{sh}\frac{x}{b}-\alpha\operatorname{sh}\frac{x-c}{b}\right)\frac{\beta_n}{h}\operatorname{ch}\frac{\beta_n}{h}}{\operatorname{sh}\frac{\beta_n/h}{b}-\alpha\operatorname{sh}\left(1-c\right)\frac{\beta_n/h}{b}};\quad B=\frac{\left(\operatorname{ch}\frac{x}{b}-\alpha\operatorname{ch}\frac{x-c}{b}\right)\frac{\beta_n}{h}\operatorname{sh}\frac{\beta_n}{h}}{\operatorname{sh}\frac{\beta_n/h}{b}-\alpha\operatorname{sh}\left(1-c\right)\frac{\beta_n/h}{b}}.$$

Доведемо, що

$$\left(\operatorname{ch}\frac{\beta_n}{b}+2\right)\cos\frac{n\pi h}{b}+2\frac{\operatorname{ch}\beta_n}{b}-5=0. \tag{3}$$

Маємо

$$\left(\operatorname{ch}\frac{\beta_n}{b}+2\right)\cos\frac{n\pi h}{b}+2\operatorname{ch}\frac{\beta_n}{b}-5=3\operatorname{ch}\frac{\beta_n}{b}-3-2\sin^2\frac{n\pi h}{2b}\left(\operatorname{ch}\frac{\beta_n}{b}+2\right)=3\operatorname{sh}^2\frac{\beta_n}{2b}-$$

$$-\sin^2\frac{n\pi h}{2b}\left(2\operatorname{sh}^2\frac{\beta_n}{2b}+3\right)=3\operatorname{sh}^2\frac{\beta_n}{2b}-2\sin^2\frac{n\pi h}{2b}\operatorname{sh}^2\frac{\beta_n}{2b}-3\sin^2\frac{n\pi h}{2b}=\left[3-2\sin^2\frac{n\pi h}{2b}\right]\operatorname{sh}^2\frac{\beta_n}{2b}-3\sin^2\frac{n\pi h}{2b}.$$

Враховуючи, що

$$\operatorname{sh}\frac{\beta_n}{2b}=\frac{\sin\frac{n\pi h}{2b}}{\sqrt{1-\frac{2}{3}\sin^2\frac{n\pi h}{2b}}},$$

отримаємо (3).

Оцінимо похибки методу. Відомо

$$\left|c_n\right|\le Kn^{-5}, \tag{4}$$

де

$$K=\frac{2b^4}{\pi^5}\left[\left|f^{IV}(b)\right|+\left|f^{IV}(0)\right|\right]+\frac{4b^5}{\pi^6}\max\left|f^{V}(t)\right|.$$

Також

$$\left|\beta_n-nh\pi\right|\le\frac{\left(nh\pi\right)^5}{480b^4}. \tag{5}$$

Відомо, що [10]

$$\left|\frac{\partial g(x,z)}{\partial z}\right|\le\frac{1}{16b}\left(1-\exp\left(-\frac{8}{3b}\right)-\alpha\exp\left(-\frac{4}{3b}\right)\right)^{-2}\left[x\exp\left(-\frac{x}{b}z\right)+\alpha(x+c)\exp\left(-\frac{x+c}{b}z\right)\right],$$

$$1\le n\le 1/h;\quad 0\le y\le b;\quad \sqrt{3}n\pi\ge z\ge\frac{\beta_n}{h}.$$

Тоді, враховуючи (5), маємо:

$$\left|g\left(x,\beta_n/h\right)-g(x,n\pi)\right|\le\frac{1}{16b}\left(1-\exp\left(-\frac{8}{3b}\right)-\alpha\exp\left(-\frac{4}{3b}\right)\right)^{-2}\times$$

$$\times\left[x\exp\left(-\frac{x}{b}z\right)+\alpha(x+c)\exp\left(-\frac{(x+c)}{b}z\right)\right]\frac{(n\pi)^5}{480b^4}h^4\le \tag{6}$$

$$\le\frac{\pi^5}{7680b^5}\left(1-\exp\left(-\frac{8}{3b}\right)-\alpha\exp\left(-\frac{4}{3b}\right)\right)^{-2}\left[x\exp\left(-\frac{4x}{3b}n\right)+\alpha(x+c)\exp\left(-\frac{4(x+c)}{3b}n\right)\right]n^5h^4.$$

Насамкінець, зазначимо, що

$$0\le g(x,z)\le\frac{1}{1-\alpha}\quad\left(0\le x\le 1,\ z\ge\frac{4b}{3}\right). \tag{7}$$

Тепер оцінимо $\left|u-u_h\right|$. Маємо:

$$\left|u-u_h\right|\le R_1+R_2,$$

де

$$R_1=\sum_{n=1}^{1/h}\left|c_n\right|\left|g\left(x,\beta_n/h\right)-g\left(x,n\pi\right)\right|;$$

$$R_2=\sum_{n=1+1/h}^{\infty}\left|c_n\right|g\left(x,n\pi\right).$$

З (4) і (7) випливає:

$$R_2\le K\sum_{n=1+1/h}^{\infty}n^{-5}\le K\frac{h^4}{2}.$$

Використовуючи (4) і (6), отримаємо:

$$\left|R_1\right|\le K\frac{1}{b}\left\{\sum_{n=1}^{1/h}n^{-5}n^5\left((a-x)\exp\left(-\frac{a-x}{b}\frac{4}{3}n\right)\right)+\alpha\left(a+c-x\right)\exp\left(-\frac{a+c-x}{b}\frac{4}{3}n\right)+\left(a-|x-c|\right)\times\right.$$

$$\left.\times\exp\left(-\frac{a-|x-c|}{b}\frac{4}{3}n\right)+\alpha\left(a+|x-c|\right)\exp\left(-\frac{a-|x-c|}{b}\frac{4}{3}n\right)\right\}C\frac{\pi^5}{480b^4}h^4=$$

$$=K\frac{\pi^5}{480b^5}h^4C\sum_{n=1}^{1/h}(nh)^5\left\{(a-x)\exp\left(-\frac{a-x}{b}\frac{4}{3}n\right)+\alpha(a-c-x)\exp\left(-\frac{a+c-x}{b}\frac{4}{3}n\right)+\right.$$

$$\left.+\left(a-|x-c|\right)\exp\left(-\frac{a-|x-c|}{b}\frac{4}{3}n\right)+\alpha\left(a-c-|x-c|\right)\exp\left(-\frac{a+|x-c|}{b}\frac{4}{3}n\right)\right\}\le$$

$$\le K\frac{1}{480b^5}\pi^5h^4\left(1-\exp\left(-\frac{8a}{3b}\right)-\alpha\exp\left(-\frac{4c}{3b}\right)\right)^{-2}\times$$

$$\times\left\{(a-x)\sum_{n=1}^{1/h}\left(\exp\left(-\frac{a-x}{b}\frac{4}{3}\right)\right)^n+\alpha(a+c-x)\sum_{n=1}^{1/h}\left(\exp\left(-\frac{a+c-x}{b}\frac{4}{3}\right)\right)^n+\right.$$

$$\left.+\left(a-|x-c|\right)\sum_{n=1}^{1/h}\left(\exp\left(-\frac{a-|x-c|}{b}\frac{4}{3}\right)\right)^n+\alpha\left(a+|x-c|\right)\sum_{n=1}^{1/h}\left(\exp\left(-\frac{a+|x-c|}{b}\frac{4}{3}\right)\right)^n\right\}\le$$

$$\le K\frac{1}{480b^5}\pi^5h^4C\left\{\frac{3b}{4}+\alpha\frac{3b}{4}+\frac{3b}{4}+\alpha\frac{3b}{4}\right\}=K\frac{1}{320b^4}\pi^5(1+\alpha)h^4\left(1-\exp\left(-\frac{8a}{3b}\right)-\alpha\exp\left(-\frac{4c}{3b}\right)\right)^{-2},$$

де

$$C=\left(1-\exp\left(-\frac{8a}{3b}\right)-\alpha\exp\left(-\frac{4c}{3b}\right)\right)^{-2}.$$

Таким чином

$$\left|u-u_h\right| \le K\frac{h^4}{2}+\frac{1}{320b^4}(1+\alpha)Kh^4\pi^5 D;$$

$$\left|u-u_h\right| \le K\left[0,5+\frac{1}{320b^4}(1+\alpha)\pi^5 D\right]h^4,$$

де

$$D=\left(1-\exp\left(-\frac{8a}{3b}\right)-\alpha\exp\left(-\frac{4c}{3b}\right)\right)^{-2}.$$

Висновки

За дискретним аналогом методу Фур'є у випадку нелокальної задачі Діріхлє для рівняння Лапласа побудовано дев'ятиточкову різницеву схему. Отримано ефективну оцінку похибки порядку $O(h^4)$, тобто в цій оцінці похибки беруть участь лише відомі дані задачі.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Wasow W. On the truncation error in the solution of Laplace's equation by finite differences / W. Wasow // Jour. Res. Nat. Bur. Standarts. — 1952. — Vol. 48. — P. 345—348.
2. Giese J. H. On the truncation error in a numerical solution of the Neuman problem for a rectangle / J. H. Giese // Jour. Math. and Phys. — 1958. — Vol. 37 (№ 2). — P. 169—177.
3. Walsh J. L. On the accurary of the numerical solution of the Dirichlet problem by finite differences / J. L. Walsh, D. Young // Jour. Res. Nat. Bur. Standarts. — 1953. — Vol. 51 (№ 6). — P. 343—369.
4. Волков Е. А. Эффективные оценки погрешности решений методом сеток краевых задач для уравнений Лапласа и Пуассона на прямоугольнике и в некоторых треугольниках / Е. А. Волков // Труды Матем. Инс-та им. В. А. Стеклова. — 1966. — Т. 74. — С. 55—85.
5. Gerschgorin S. A. Fehlerabschätzung für das Differenzenverfahren zur Lözung partieller Differentialgleichungen / S. A. Gerschgorin // Z. angew. Math. und Mech. — 1930. — Vol. 10. — P. 373—382.
6. Волков Е. А. К вопросу о решении методом сеток внутренней задачи Дирихле для уравнения Лапласа / Е. А. Волков // Вычислительная математика. — М. : изд-во АН СССР. — 1957. — Т. 1. — С. 33—61.
7. Романова С. Е. Экономичный метод решения разностного уравнения Лапласа на прямоугольных областях / С. Е. Романова // Докл. АН СССР, 1980. — Т. 252(№ 1) — С. 48—51.
8. Романова С. Е. Экономичный метод приближенного решения разностного уравнения Лапласа на прямоугольных областях / С. Е. Романова // Вычисл. матем. и матем. физики. — 1983. — Т. 23 (№ 3). — С. 660—673.
9. Волков Е. А. Об асимптотически быстром приближенном методе получения на сеточных отрезках решения разностного уравнения Лапласа / Е. А. Волков // Докл. АН СССР. — 1984. — Т. 279 (№ 2). — С. 285—290.
10. Алиев Айдын Юнус оглы. О численном решении нелокальных краевых задач для эллиптических уравнений : дис. …канд.физ.-мат. наук: 01.01.07 / Алиев Айдын Юнус оглы. — Баку, 1992. — 131 с. — Библиогр. : С. 123—131.
11. Алиев А. Ю. Об эффективной оценке погрешности нелокальной задачи Дирихле для уравнения Лапласа / А. Ю. Алиев // Препринт № 5 Ин-та Физики АН Азерб. Респуб. — 1993. — 34 с.
12. Aliev A. Y. Effective truncation error of discrete Fourier method for nonlocal Dirichlet problem / A. Y. Aliev, Y. C. Mamedov // Transactions of Academy of Sciences of Azerbaijan, Series of physical-technical and mathematical sciences. — 1999. — Vol. 19 (№ 1—2). — P. 3—13.
13. Алиев А. Ю. Эффективная оценка погрешности для нелокальной задачи Дирихле / А. Ю. Алиев // Вестник Бакинского Государственного Университета. Серия физико-математических наук. — 2002. — № 1. — С. 99—105.

Рекомендована кафедрою вищої математики

Стаття надійшла до редакції 10.01.13
Рекомендована до друку 18.01.13

Алієв Айдин Юнус огли — доцент кафедри обчислювальної математики.
Бакинський державний університет, Баку, Азербайджан