УДК 519.622

Г. Ю. Мехтієва, д-р ф.-м. наук, проф.;
М. Н. Іманова, канд. ф.-м. наук;
В. Р. Ібрагімов, д-р ф.-м. наук, проф.

ЗНАХОДЖЕННЯ РОЗВ'ЯЗКУ ЗВИЧАЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ДРУГОГО ПОРЯДКУ ЗА ГІБРИДНИМ МЕТОДОМ

Розглянуто побудову методів розв'язання звичайних диференціальних рівнянь другого порядку, а саме гібридних методів. З цією метою побудовано конкретні методи зі ступенем $p \le 8$, а також запропоновано алгоритм для їх реалізації.

Вступ

Розглянемо розв'язання такого рівняння:

$$y'' = F(x, y, y'), \;\; x \in [x_0, X]. \tag{1}$$

Як відомо, для дослідження рівняння (1), в основному, розглядається початкова або гранична задача. У цій роботі досліджується початкова задача, і початкові умови визначаються у вигляді

$$y(x_0) = y_0, \; y'(x_0) = y'_0. \tag{2}$$

Припускаємо, що задача (1)—(2) має єдиний безперервний розв'язок, визначений на відрізку $[x_0, X]$, і розглянемо побудову чисельних методів для її розв'язання. Очевидно, що за допомогою заміни змінних розв'язання задачі (2) можна звести до розв'язання початкової задачі для системи диференціальних рівнянь першого порядку [1]. Таким чином, питання про чисельний розв'язок задачі (1)—(2) можна вважати вичерпаним. Однак, спеціальні методи, саме для розв'язання задачі (1)—(2), є точнішими. Відмітимо, що деякі автори для розв'язання задачі (1)—(2) пропонують використовувати методи, які в загальній формі можна представити в такій формі:

$$\sum_{i=0}^{k} \alpha'_i y'_{n+i} = h \sum_{i=0}^{k} \gamma'_i F\left(x_{n+i}, y_{n+i}, y'_{n+i}\right); \tag{3}$$

$$\sum_{i=0}^{k} \hat{\alpha}_i y_{n+i} = h \sum_{i=0}^{k} \hat{\beta}_i y'_{n+i} + h^2 \sum_{i=0}^{k} \hat{\gamma}_i F\left(x_{n+i}, y_{n+i}, y'_{n+i}\right), \tag{4}$$

де коефіцієнти $\alpha'_i, \gamma'_i, \hat{\alpha}_i, \hat{\beta}_i, \hat{\gamma}_i$ $(i = 0, 1, ..., k)$ — деякі дійсні числа; y_m, y'_m — наближені значення розв'язку задачі (1)—(2) у точці $x_m = x_0 + mh$ $(m = 0,\ 1,\ 2, ...)$.

Постійний параметр $0 < h$ є кроком розбиття відрізка $[x_0, X]$ на N рівних частин. Зазначимо, що вищезапропонований спосіб (3) і (4) нагадує спосіб зведення рівняння (1) до системи рівнянь першого порядку, але відрізняється від нього використанням методу (4), який забезпечує вищу точність, ніж метод (3). Зазвичай точність методів (3) і (4) визначається за допомогою поняття ступеня методу (3) або (4) [2—4].

Означення **1**. Відомо, що цілочисельний параметр $p > 0$ для достатньо гладкої функції $z(x)$ є ступенем методу (4), якщо має місце таке:

$$\sum_{i=0}^{k} \left(\hat{\alpha}_i z\left(x + ih\right) - h \hat{\beta}_i z'\left(x + ih\right) - h^2 \hat{\gamma}_i z''\left(x + ih\right) \right) = O\left(h^{p+1}\right), \;\; h \to 0. \tag{5}$$

де $x = x_0 + nh$ — фіксована точка.

Відомо, що коли метод (3) є стійким, то його ступінь задовольняє умову $p \le 2[k/2] + 2$, а якщо метод (4) є стійким, то його ступінь має обмеження у вигляді: $p_1 \le 2k + 2$ [2]. Отже, методи типу (4) є точнішими, ніж методи типу (3). З цією метою пропонується використовувати гібридні методи, враховуючи їх деякі позитивні властивості. Як відомо, гібридні методи побудовані на стику методів Рунге–Кутта і Адамса [5, 6] і, в основному, застосовуються для розв'язання ЗДР першого порядку. В роботі [7] розглянуто застосування гібридних методів до розв'язання початкової задачі для ЗДР другого порядку. Ця ідея розвивалася в роботі [8], де для чисельного розв'язання задачі (1) і (2) запропоновано такий метод:

$$\sum_{i=0}^{k} \alpha'_i y'_{n+i} = h \sum_{i=0}^{k} \gamma'_i F\left(x_{n+i+\nu_i}, y_{n+i+\nu_i}, y'_{n+i+\nu_i}\right), \ \left(|\nu_i| < 1, \ i = 0,1,...,k\right) \qquad (6)$$

з приєднанням формули (4). Із дослідженням методу (6) також можна познайомитись у роботі [9].

Часто в деяких практичних задачах функція $F(x, y, z)$ не залежить від змінної z, тобто має місце вираз $F(x, y, z) \equiv f(x, y)$. В цьому випадку задача (1)—(2) замінюється такою:

$$y'' = f(x, y), \ \ y(x_0) = y_0, \ \ y'(x_0) = y'_0, \ \ x_0 \le x \le X. \qquad (7)$$

Одним з популярних методів для розв'язання задачі (7) є такий:

$$\sum_{i=0}^{k} \alpha_i y_{n+i} = h^2 \sum_{i=0}^{k} \beta_i f\left(x_{n+i}, y_{n+i}\right). \qquad (8)$$

Цей метод є узагальненням методу Штермера [1]. Точність методу (8) визначається у таким чином.

Означення **2.** Відомо, що цілочисельний параметр $p > 0$ для достатньо гладкої функції є ступенем методу (8), якщо має місце таке:

$$\sum_{i=0}^{k} \left(\alpha_i y(x + ih) - h^2 \beta_i y''(x + ih)\right) = O\left(h^{p+2}\right), \ \ h \to 0. \qquad (9)$$

Зазначимо, що поняття стійкості для методів (8) і (4) визначається по-різному.

Означення **3.** Метод (8) є стійким, якщо корені характеристичного багаточлена

$$\rho(\lambda) \equiv \sum_{i=0}^{k} \alpha_i \lambda^i$$

лежать всередині одиничного кола, на межі якого немає кратних коренів, за винятком двократного кореня $\lambda = 1$.

Зауважимо, що якщо метод (8) є стійким, то між його ступенем і порядком існує такий зв'язок:

$$p \le k + 2.$$

Очевидно, що точність методів (8) і (3) збігається. Враховуючи, що існують методи типу (6), які мають ступінь $p \le 2k + 2$, для знаходження наближених розв'язків задачі (7) з високою точністю можна використовувати методи (6) і (4). Але із застосуванням дрібних кроків до формул (8) точність її можна збільшити. Для цього розглянемо такий метод:

$$\sum_{i=0}^{k} \alpha_i y_{n+i} = h^2 \sum_{i=0}^{k} \beta_i f\left(x_{n+i+\nu_i}, \ y_{n+i+\nu_i}\right), \ \left(|\nu_i| < 1, \ i = 0,1,...,k\right). \qquad (10)$$

Об'єднавши методи (8) і (10), отримуємо:

$$\sum_{i=0}^{k} \alpha_i y_{n+i} = h^2 \sum_{i=0}^{k} \beta_i f_{n+i} + h^2 \sum_{i=0}^{k} \gamma_i f_{n+i+\nu_i}, \qquad (11)$$

де $f_m = f\left(x_m, y_m\right)$, $f_{m+\nu_i} = f\left(x_{m+\nu_i}, y_{m+\nu_i}\right)$, $(i = 0,1,...,k)$.

Існують стійкі методи зі ступенем $p = 2k + 2$ у класі методів типу (10). Очевидно, що з використанням методів (10) і (4) для розв'язання задачі (1) і (2), можна побудувати метод зі ступенем $p = 2k + 2$.

Розглянемо побудову методів типу (11).

Виклад основного матеріалу

Відомо, що кожен метод має свої переваги і недоліки, які визначаються за допомогою значень їх коефіцієнтів. Тому розглянемо визначення коефіцієнтів методу (11) і припустимо, що його коефіцієнти задовольняють такі умови:

1. Величини α_i, β_i, γ_i, ν_i $\left(i = 0,1,...,k\right)$ — деякі дійсні числа, причому $\alpha_k \ne 0$.

2. Багаточлени

$$\rho(\lambda) \equiv \sum_{i=0}^{k} \alpha_i \lambda^i; \quad \sigma(\lambda) \equiv \sum_{i=0}^{k} \beta_i \lambda^i ; \quad \gamma(\lambda) \equiv \sum_{i=0}^{k} \gamma_i \lambda^{i+\nu_i}$$

не мають загальних множників.

3. $\sigma(1)+\gamma(1)\neq 0$ і $p \geq 1$.

Для визначення коефіцієнтів методу (11) використаємо метод невизначених коефіцієнтів і доведемо лему.

Лема. *Припустимо, що функція $y(x)$ є досить гладкою. Тоді необхідною і достатньою умовою того, щоб метод (11) мав ступінь p, є виконання таких умов:*

$$\sum_{i=0}^{k} \alpha_i = 0; \quad \sum_{i=0}^{k} i\alpha_i = 0; \tag{12}$$

$$\sum_{i=0}^{k}\left(\frac{i^{m-1}}{(m-1)!}\beta_i + \frac{l_i^{m-1}}{(m-1)!}\gamma_i\right) = \sum_{i=0}^{k}\frac{i^{m+1}}{(m+1)!}\alpha_i, \ \left(m=1,2,...,p;\ 0!=1;\ l_i = i+\nu_i;\ i=0,1,2,...,k\right).$$

Доведення. Зазначимо, що співвідношення (12) є однорідною системою нелінійних алгебраїчних рівнянь. Спочатку доведемо: якщо метод (11) має ступінь p, то його коефіцієнти є розв'язком системи (12). Якщо метод (11) має ступінь p, то має місце співвідношення

$$\sum_{i=0}^{k}\Big(\alpha_i y\big(x+ih\big) - h^2\beta_i y''\big(x+ih\big) - h^2\gamma_i y''\Big(x+\big(i+\nu_i\big)h\Big)\Big) = O\Big(h^{p+2}\Big),\ \ h\to 0. \tag{13}$$

Використаємо такі розкладання

$$\begin{aligned} y(x+ih) &= y(x) + ihy'(x) + \frac{(ih)^2}{2!}y''(x) + ... + \frac{(ih)^{p+1}}{(p+1)!}y^{(p+1)}(x) + O\Big(h^{p+2}\Big), \\ y''\big(x+m_i h\big) &= y''(x) + m_i h y'''(x) + \frac{(m_i h)^2}{2!}y^{IV}(x) + ... + \frac{(m_i h)^{p-1}}{(p-1)!}y^{(p+1)}(x) + O\Big(h^p\Big). \end{aligned} \tag{14}$$

Якщо $m_i = i$ і $m_i = i+\nu_i$ $(i=0,1,...,k)$, у співвідношенні (13) маємо:

$$\begin{aligned} &\sum_{i=0}^{k}\Big(\alpha_i y(x+ih) - h^2\Big(\beta_i y''(x+ih) + \gamma_i y''\Big(x+\big(i+\nu_i\big)h\Big)\Big)\Big) = \sum_{i=0}^{k}\alpha_i y(x) + h\sum_{i=0}^{k} i\alpha_i y'(x) + \\ &+ h^2\sum_{i=0}^{k}\left(\frac{i^2}{2!}\alpha_i - \beta_i - \gamma_i\right)y''(x) + h^{p+1}\sum_{i=0}^{k}\left(\frac{i^{p+1}}{(p+1)!}\alpha_i - \frac{i^{p-1}}{(p-1)!}\beta_i - \frac{\big(i+\nu_i\big)^{p-1}}{(p-1)!}\gamma_i\right)y^{(p+1)}(x) = O\Big(h^{p+1}\Big),\ h\to 0. \end{aligned} \tag{15}$$

Якщо врахувати, що метод (11) має ступінь p, то у (15) праву частину з асимптотичної рівності можна прирівняти до нуля. Відомо, що система $y(x), y'(x),..., y^{(p+1)}(x)$ за умов $y(x)\neq 0$, $y^{(j)}(x)\neq 0$ $(j=1,2,...,p+1)$ є лінійно незалежною. Тому, з отриманої рівності випливає система (12).

Таким чином, доведено, якщо метод (11) має ступінь p, то його коефіцієнти задовольняють систему (12). Тепер доведемо: якщо коефіцієнти методу (11) є розв'язками нелінійної системи (12), то вона має ступінь p. Легко переконатися в тому, що враховуючи систему рівнянь (12) в асимптотичній рівності (15), отримаємо асимптотичну рівність (13), з якої випливає твердження леми.

У системі (12) кількість невідомих дорівнює $4k+4$, а кількість рівнянь дорівнює $p+2$. Очевидно, що ця система завжди має нульовий розв'язок, але нас цікавить ненульовий (нетривіальний) розв'язок. А для цього між кількістю рівнянь і невідомими система (12) має виконуватись таке співвідношення:

$$p+2 < 4k+4.$$

Звідси випливає, що $p_{\max} = 4k+1$. Очевидно, якщо розглядати випадок $\nu_i = 0$ $(i=0,1,...,k)$, то з методу (11) випливає метод (8), для якого отримуємо, що $p_{\max} = 2k$. Отже, метод (11) є точнішим, ніж метод (8). Для ілюстрації отриманого результату побудуємо конкретний метод. У випадку $k=1$ не існують методи типу (11), тому вважатимемо, що $k=2$. У цьому випадку для визначення коефіцієнтів отримаємо таку систему нелінійних рівнянь:

$$\beta_2+\beta_1+\beta_0+\gamma_2+\gamma_1+\gamma_0=1;$$
$$2\beta_2+\beta_1+l_2\gamma_2+l_1\gamma_1+l_0\gamma_0=1;$$
$$2\beta_2+\frac{1}{2}\beta_1+\frac{l_2^2}{2}\gamma_2+\frac{l_1^2}{2}\gamma_1+\frac{l_0^2}{2}\gamma_0=\frac{7}{12};$$
$$\frac{4}{3}\beta_2+\frac{1}{6}\beta_1+\frac{l_2^3}{6}\gamma_2+\frac{l_1^3}{6}\gamma_1+\frac{l_0^3}{6}\gamma_0=\frac{1}{4};$$
$$\frac{2}{3}\beta_2+\frac{1}{24}\beta_1+\frac{l_2^4}{24}\gamma_2+\frac{l_1^4}{24}\gamma_1+\frac{l_0^4}{24}\gamma_0=\frac{31}{360}; \tag{16}$$
$$\frac{4}{15}\beta_2+\frac{1}{120}\beta_1+\frac{l_2^5}{120}\gamma_2+\frac{l_1^5}{120}\gamma_1+\frac{l_0^5}{120}\gamma_0=\frac{1}{40};$$
$$\frac{4}{45}\beta_2+\frac{1}{720}\beta_1+\frac{l_2^6}{120}\gamma_2+\frac{l_1^6}{120}\gamma_1+\frac{l_0^6}{120}\gamma_0=\frac{127}{20160};$$
$$\frac{8}{315}\beta_2+\frac{1}{5040}\beta_1+\frac{l_2^7}{5040}\gamma_2+\frac{l_1^7}{5040}\gamma_1+\frac{l_0^7}{5040}\gamma_0=\frac{17}{12096}.$$

Розв’язуючи цю систему, отримуємо різні гібридні методи з різними властивостями. Наприклад, якщо $l_i=i$, розв’язуючи систему (15), отримуємо такий метод:

$$y_{n+2}-5y_{n+1}-y_n+h^2\left(f_n+10f_{n+1}+f_{n+2}\right)/12, \tag{17}$$

який входить до класу методів Штермера, має ступінь $p=4$ і відомий, як метод Нумерова [5]. Цей метод цікавий тим, що, розв’язуючи систему (16) з $k=3$ і $\gamma_i=i$ $(i=1, 2, 3,)$, також отримуємо метод (17).

Тепер розглянемо розв’язок системи (12) у випадку $k=2$ для довільного l_i. Тоді отримаємо такий розв’язок:

$$\beta_0=\beta_2=\frac{19}{1740};\ \beta_1=\frac{1}{2};\ \gamma_0=1-\sqrt{\frac{13}{42}};\quad \gamma_2=1+\sqrt{\frac{13}{42}};\ \gamma_1=1;\ \gamma_0=\gamma_2=\frac{441}{1885};\ \gamma_1=\frac{2}{195}.$$

Враховуючи ці значення у формулі (11), отримуємо стійкий метод зі ступенем $p=8$:

$$\begin{aligned} y_{n+2}&=2y_{n+1}-y_n+h^2\left(19f_{n+2}+870f_{n+1}+19f_n\right)/1740+\\ &+h^2\left(441\cdot 39f_{n+\gamma_2}+2\cdot 377f_{n+\gamma_1}+441\cdot 39f_{n+\gamma_0}\right)/39\cdot 1885.\end{aligned}$$

Для ілюстрації отриманих результатів використаємо такий гібридний метод зі ступенем $p=4$:

$$y_{n+2}=2y_{n+1}-y_n+h^2\left(4f_{n+1+\alpha}+f_{n+1}+4f_{n+1-\alpha}\right)/9\quad\left(\alpha=\sqrt{3}/4\right), \tag{18}$$

а також гібридний метод зі ступенем $p=6$:

$$y_{n+2}=2y_{n+1}-y_n+h^2\left(5f_{n+1+\beta}+14f_{n+1}+5f_{n+1-\beta}\right)/24\quad\left(\beta=\sqrt{10}/5\right). \tag{19}$$

Відмітимо, що для використання вищезапропонованих методів побудовані алгоритми, які застосовані до розв’язання конкретних задач, що зустрічаються в роботах різних авторів. До розв’язання деяких з цих задач, у роботі [7] застосовані гібридні методи зі ступенем $p=4$. Тому, алгоритм, побудований для використання вищезапропонованих методів, має точність четвертого порядку.

Застосуємо методи (18) і (19) до розв’язання прикладів, які розв’язані в [7] гібридним методом зі ступенем $p = 4$.

1. $y'' = -y;\ y(0) = y'(0) = 1,\ 0 \le x \le 1$, точний розв'язок $y(x) = \cos x + \sin x$.

Задачі розв'язуємо з кроком $h = 0{,}1$. Застосовуючи до розв'язання задачі (1) обидва методи, отримують однакові результати. У точці $x = 1$ похибка запропонованого методу дорівнює $1{,}4E-07$, а похибка методу, запропонованого у [7], дорівнює $3{,}6E-05$. Ці методи мають однакові точності.

2. $y'' = 100y;\ y(0) = 0;\ y'(0) = -1,\ 0 \le x \le 0{,}1$. Точний розв'язок задачі можна написати у вигляді $y(x) = \exp(-10x)$. Розв'язуємо задачі з кроком $h = 0{,}01$. Вищезапропоновані методи, застосовані до розв'язання задачі 2, дають однакові результати. Похибка для цих методів у точці $x = 0{,}1$ дорівнює $9{,}6E-08$, а відповідний результат, отриманий у [7], має точність $4{,}78E-05$.

Висновки

У статті досліджено чисельне розв'язання початкової задачі для ЗДР другого порядку в загальній і в частинній формі за допомогою гібридних методів. Побудовано гібридні методи, що мають різні ступені, і деякі з них застосовано до розв'язання конкретних задач, розв'язаних в роботах різних авторів. У багатьох випадках запропоновані методи дали кращі результати, ніж відповідні відомі методи. Таким чином, на конкретних прикладах дослідженням гібридних методів доведено їх переваги. Зазначимо, що, в деяких випадках гібридні методи з високим ступенем можуть бути явними. Враховуючи, що із застосуванням чисельних методів, явні методи мають деякі переваги, то можна стверджувати, що дослідження гібридних методів є доцільним.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Bakhvalov N. S. Numerical methods / N. S. Bakhvalov. — M. : Nauka, 1973. — 632 p.
2. Dahlquist G. Stability and Error bounds in the numerical integration of ordinary differential equations / G. Dahlquist // Uppsala, Almqvist and Wiksells boktr. — 1959. — No. 130. — Pp. 5—92.
3. Kobza J. Second derivative methods of Adams type / J. Kobza // Applikace Mathematicky. — 1975. — No. 20. — Pp. 389—405.
4. Dahlquist G. Convergence and stability in the numerical integration of ordinary differential equations / G. Dahlquist // Math. Scand. — 1956. — No. 4. — Pp. 33—53.
5. Hairier E. Solving ordinary differential equations / E. Hairier, S. P. Norsett, G. Wanner (Russian). — M. : — Mir, 1990.— 512 p.
6. Ibrahimov V. R. On some connections between Runge-Kutta and Adams methods / V. R. Ibrahimov, G. Yu. Mehdiyeva, I. I. Nasirova // Transactions issue mathematics and mechanics series of phisical-technical and mathematical science. — XXV. — No. 7. — Baku. — 2005. — Pp. 183—190.
7. On generalized 2-step continuous linear multistep method of hybrid type for the integration of second order ordinary differential equations / [J. O. Ehigie, S. A. Okunuga, A. B. Sofoluwe, M. A. Akanbi] // Archives of Applied Research. — 2010. — No. 2(6). — Pp. 362—372.
8. Mehdiyeva G. Yu. On one generalization of hybrid methods. Proceedings of the 4th international conference on approximation methods and numerical modeling in environment and natural resources / G. Yu. Mehdiyeva, M. N. Imanova, V. R. Ibrahimov // Saidia, Morocco, May 23—26. — 2011. — Pp. 543—547.
9. Mehdiyeva G. Yu. Some research on numerical solution of second order differential equations / G. Yu. Mehdiyeva, V. R. Ibrahimov, M. N. Imanova // ICM 2012, 11—14 March. — Al-Ain. — Pp. 673—679.

Рекомендована кафедрою вищої математики

Стаття надійшла до редакції 17.01.13
Рекомендована до друку 04.01.13

Мехтієва Галина Юріївна — завідувач кафедри, ***Іманова Мехрібан Натіг*** — доцент, ***Ібрагімов Вагіф Рза*** — професор.

Кафедра обчислювальної математики, Бакинський державний університет, Баку, Азербайджан