

УДК 330.4

Ю. В. Мокіна, канд. екон. наук, доц.;

Н. С. Гончарук, асп.;

Б. І. Мокін, акад. НАПН України, д-р техн. наук, проф.

## МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ НЕЧІТКОГО УПРАВЛІННЯ ПРОЦЕСОМ НАДХОДЖЕННЯ ДО УНІВЕРСИТЕТУ КОШТІВ ВІД ВІТЧИЗНЯНИХ СТУДЕНТІВ, ЩО НАВЧАЮТЬСЯ ЗА КОНТРАКТОМ

Згідно з визначеними раніше структурами моделей процесу надходження до університету коштів за надання платних освітніх послуг вітчизняним студентам, що навчаються за контрактом, синтезовано математичні моделі нечіткого управління цим процесом.

### Постановка задачі та вихідні передумови

В роботі [1] нами побудована п'ятирівнева ієрархічна система формування коштів університету від надання дозволених платних послуг і синтезовані узагальнені математичні моделі для кожної ланки цієї системи на кожному із п'яти рівнів ієрархії.

В роботі [2] ми розкрили зміст узагальнених математичних моделей для найвищого (5-го) рівня ієрархії системи та попереднього (4-го) рівня, синтезувавши математичні моделі прогнозування надходження до університету коштів за надання дозволених платних послуг на основі моделей авторегресії — проінтегрованого ковзного середнього.

В роботі [3], використавши теорію лінгвістичної змінної [4] в інтерпретації авторів робіт [5, 6], для ланок, зав'язаних на надходження коштів за надання платних послуг лише освітнього характеру і лише від вітчизняних студентів, на 3-му, 2-му та 1-му рівнях ієрархії системи, зображених на рис. 1, побудовано структури узагальнених математичних моделей у вигляді рівнянь нечіткої логіки, які для ланки 3-го рівня ієрархії з використанням термів «висока (В)», «середня (С)», «низька (Н)», мають вигляд:

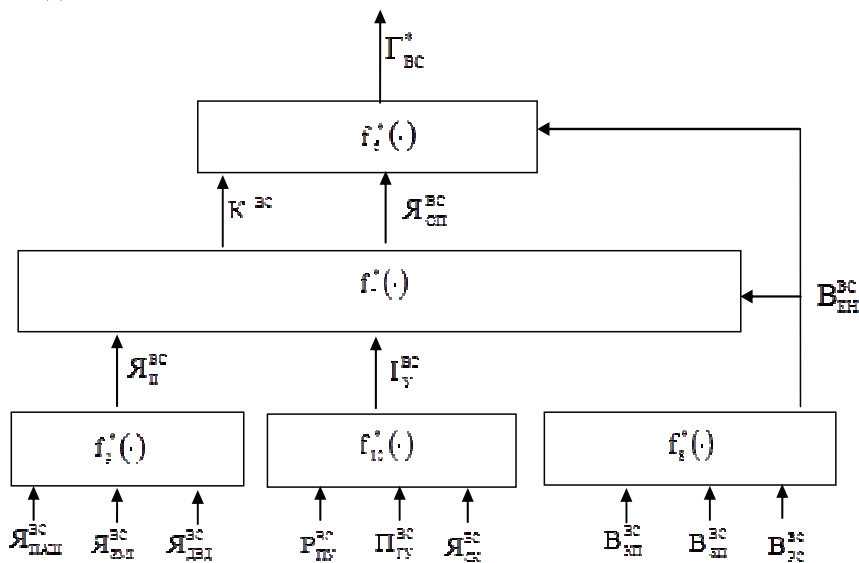


Рис. 1. Структурна схема трьох нижніх рівнів ієрархії системи формування коштів університету від надання платних послуг

$$\begin{aligned}
 & \text{ЯКЩО } (K^{BC} = H) \text{ I } (B_{KH}^{BC} = H) \text{ I } (Y_{OP}^{BC} = H) \text{ АБО } (K^{BC} = H) \text{ I } (B_{KH}^{BC} = H) \text{ I } (Y_{OP}^{BC} = C) \\
 & \text{АБО } (K^{BC} = H) \text{ I } (B_{KH}^{BC} = H) \text{ I } (Y_{OP}^{BC} = B) \text{ АБО } (K^{BC} = H) \text{ I } (B_{KH}^{BC} = C) \text{ I } (Y_{OP}^{BC} = H) \\
 & \text{АБО } (K^{BC} = H) \text{ I } (B_{KH}^{BC} = C) \text{ I } (Y_{OP}^{BC} = C) \text{ АБО } (K^{BC} = C) \text{ I } (B_{KH}^{BC} = H) \text{ I } (Y_{OP}^{BC} = H), \\
 & \text{ТО } (\Gamma_{BC}^* = H);
 \end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned}
 & \text{ЯКЩО } (K^{BC} = C) \text{ I } (B_{KH}^{BC} = H) \text{ I } (Y_{OP}^{BC} = C) \text{ АБО } (K^{BC} = C) \text{ I } (B_{KH}^{BC} = H) \text{ I } (Y_{OP}^{BC} = B) \\
 & \text{АБО } (K^{BC} = C) \text{ I } (B_{KH}^{BC} = C) \text{ I } (Y_{OP}^{BC} = H) \text{ АБО } (K^{BC} = C) \text{ I } (B_{KH}^{BC} = C) \text{ I } (Y_{OP}^{BC} = C) \\
 & \text{АБО } (K^{BC} = C) \text{ I } (B_{KH}^{BC} = C) \text{ I } (Y_{OP}^{BC} = B) \text{ АБО } (K^{BC} = B) \text{ I } (B_{KH}^{BC} = H) \text{ I } (Y_{OP}^{BC} = B) \\
 & \text{АБО } (K^{BC} = B) \text{ I } (B_{KH}^{BC} = C) \text{ I } (Y_{OP}^{BC} = C) \text{ АБО } (K^{BC} = B) \text{ I } (B_{KH}^{BC} = C) \text{ I } (Y_{OP}^{BC} = H) \\
 & \text{АБО } (K^{BC} = B) \text{ I } (B_{KH}^{BC} = H) \text{ I } (Y_{OP}^{BC} = H), \\
 & \text{ТО } (\Gamma_{BC}^* = C);
 \end{aligned} \tag{2}$$

$$\begin{aligned}
 & \text{ЯКЩО } (K^{BC} = B) \text{ I } (B_{KH}^{BC} = B) \text{ I } (Y_{OP}^{BC} = B) \text{ АБО } (K^{BC} = B) \text{ I } (B_{KH}^{BC} = B) \text{ I } (Y_{OP}^{BC} = C) \\
 & \text{АБО } (K^{BC} = B) \text{ I } (B_{KH}^{BC} = C) \text{ I } (Y_{OP}^{BC} = B), \\
 & \text{ТО } (\Gamma_{BC}^* = B).
 \end{aligned} \tag{3}$$

У цій же роботі [3] показано, що аналогічний вигляд мають структури математичних моделей і для ланок 2-го та 1-го рівнів ієрархії системи, з тією лише різницею, що в них по-іншому, але згідно із прийнятою на рис. 1, виглядатиме символіка як для вихідних, так і для вхідних лінгвістичних змінних.

Ще однією нашою передумовою є те, що, як доведено нами в роботі [3], усі лінгвістичні змінні на 3-му, 2-му та 1-му рівнях ієрархії системи з використанням відносних одиниць можуть бути заданими на тій самій універсальній множині у вигляді відрізка [0, 1].

У цій роботі ми, використовуючи вищевказані передумови, синтезуємо математичні моделі для ланок, зав'язаних на надходження коштів за надання платних послуг лише освітнього характеру і лише від вітчизняних студентів, на 3-му, 2-му та 1-му рівнях ієрархії системи, зображених на рис. 1, тобто, синтезуємо математичні моделі нечіткого управління процесом надходження до університету коштів від вітчизняних студентів, що навчаються за контрактом.

### Розв'язання задачі

Почнемо розв'язувати поставлену вище задачу синтезу моделі з визначення функцій належності для термів H, C, B кожної лінгвістичної змінної, що входить в структуру цієї моделі, визначену нечіткими рівняннями (1)–(3).

На наш погляд, адекватною функцією належності елементів з універсальної множини, заданої відрізком [0, 1], до введених нами термів є функція

$$\mu(u) = \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{u-m}{\sigma}\right)^2\right), \tag{4}$$

у якій, як показано в роботі [6],  $m$  є координатою максимуму, а  $\sigma$  є коефіцієнтом концентрації, і яка є диференційованою, що дуже важливо в разі оптимальної настройки цих параметрів за допомогою методу зворотного розповсюдження помилки, викладеного, наприклад, в роботах [5, 6].

Очевидно, що доцільніше для множини термів H, C, B кожної лінгвістичної змінної, заданої на відрізку [0, 1], значеннями координат максимуму функцій належності взяти такі числа:

$$m_H = 0; m_C = 0,5; m_B = 1. \quad (5)$$

А коефіцієнти концентрації функцій належності, однакові для усіх термів, легко знаходяться з умови, що функції належності для елементів, які лежать посередині між максимумами двох сусідніх термів, дорівнюють 0,5 кожна. Для сусідніх термів Н і С ця умова з використанням функції належності для терму С матиме вигляд

$$\mu(0,25) = \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{0,25-0,5}{\sigma}\right)^2\right) = 0,5. \quad (6)$$

З рівняння (6) знайдемо, що

$$\sigma = \frac{|0,25 - 0,5|}{\sqrt{-2 \ln 0,5}} = 0,21. \quad (7)$$

Графіки функцій належності елементів із універсальної множини, заданої відрізком  $[0, 1]$ , термам Н, С, В показані на рис. 2.

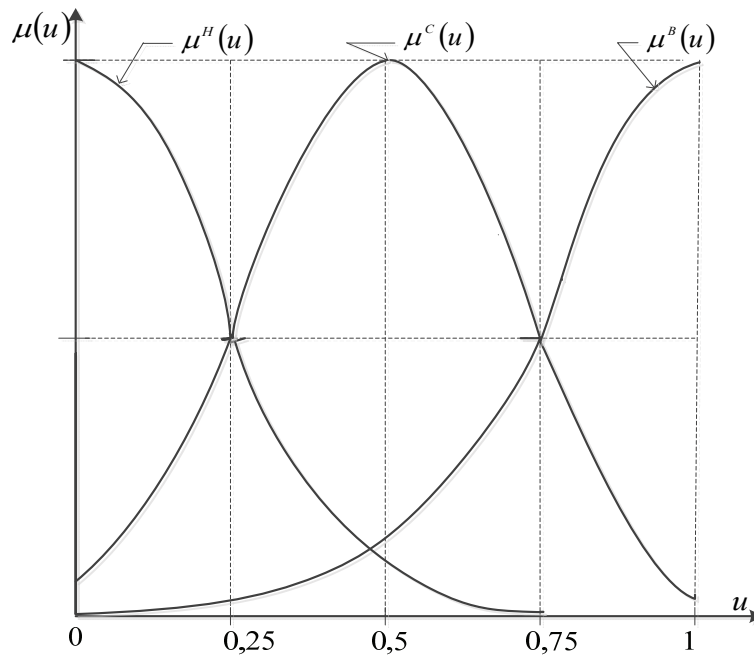


Рис. 2. Графіки функцій належності елементів із універсальної множини, заданої відрізком  $[0, 1]$ , термам Н, С, В

Тепер ми маємо усе необхідне для синтезу математичної моделі нечіткого управління процесом надходження до університету коштів від вітчизняних студентів, що навчаються за контрактом, на 3-му рівні ієрархії системи їх формування — математичної моделі, яка є адекватною узагальненій моделі

$$\Gamma_{BC}^* = f_6^*(K^{BC}, B_{KH}^{BC}, Я_{ОП}^{BC}) \quad (8)$$

та її нечіткій структурі у вигляді рівнянь нечіткої логіки (1)—(3).

Для цих рівнянь (1)—(3), виходячи з того, що логічній операції **I** в теорії лінгвістичної змінної відповідає операція **min** (знаходження мінімального значення), а операції **АБО** — операція **max** (знаходження максимального значення), для вхідного вектора  $(K^{BC}, B_{KH}^{BC}, Я_{ОП}^{BC})$  можна записати таку систему рівнянь нечіткої логіки відносно функцій належності відповідних термів:

$$\mu_{K, B, Я}^H(u) = \max_{j \rightarrow 1, 2, 3, 4, 5, 6} \left\{ \begin{array}{l} \left[ \min(\mu_K^H(u), \mu_B^H(u), \mu_{Я}^H(u)) \right]_{j=1}, \min \left[ (\mu_K^H(u), \mu_B^H(u), \mu_{Я}^C(u)) \right]_{j=2}, \\ \min \left[ (\mu_K^H(u), \mu_B^H(u), \mu_{Я}^B(u)) \right]_{j=3}, \min \left[ (\mu_K^H(u), \mu_B^C(u), \mu_{Я}^H(u)) \right]_{j=4}, \\ \min \left[ (\mu_K^H(u), \mu_B^C(u), \mu_{Я}^C(u)) \right]_{j=5}, \min \left[ (\mu_K^C(u), \mu_B^H(u), \mu_{Я}^H(u)) \right]_{j=6}; \end{array} \right. \quad (9)$$

$$\mu_{K, B, Я}^C(u) = \max_{j \rightarrow 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9} \left\{ \begin{array}{l} \left[ \min(\mu_K^C(u), \mu_B^H(u), \mu_{Я}^C(u)) \right]_{j=1}, \min \left[ (\mu_K^C(u), \mu_B^H(u), \mu_{Я}^B(u)) \right]_{j=2}, \\ \min \left[ (\mu_K^C(u), \mu_B^C(u), \mu_{Я}^H(u)) \right]_{j=3}, \min \left[ (\mu_K^C(u), \mu_B^C(u), \mu_{Я}^C(u)) \right]_{j=4}, \\ \min \left[ (\mu_K^C(u), \mu_B^C(u), \mu_{Я}^B(u)) \right]_{j=5}, \min \left[ (\mu_K^B(u), \mu_B^H(u), \mu_{Я}^B(u)) \right]_{j=6}, \\ \min \left[ (\mu_K^B(u), \mu_B^C(u), \mu_{Я}^C(u)) \right]_{j=7}, \min \left[ (\mu_K^B(u), \mu_B^C(u), \mu_{Я}^H(u)) \right]_{j=8}, \\ \min \left[ (\mu_K^B(u), \mu_B^H(u), \mu_{Я}^H(u)) \right]_{j=9}; \end{array} \right. \quad (10)$$

$$\mu_{K, B, Я}^B(u) = \max_{j \rightarrow 1, 2, 3} \left\{ \begin{array}{l} \left[ \min(\mu_K^B(u), \mu_B^B(u), \mu_{Я}^B(u)) \right]_{j=1}, \min \left[ (\mu_K^B(u), \mu_B^B(u), \mu_{Я}^C(u)) \right]_{j=2}, \\ \min \left[ (\mu_K^B(u), \mu_B^C(u), \mu_{Я}^B(u)) \right]_{j=3}. \end{array} \right. \quad (11)$$

В результаті нечіткого логічного виведення на основі рівнянь (9)—(11) отримаємо нечітку вихідну лінгвістичну змінну  $\Gamma_{BC}^*$  у вигляді

$$\Gamma_{BC}^* = \left( \frac{\mu_{K, B, Я}^H(u)}{H}, \frac{\mu_{K, B, Я}^C(u)}{C}, \frac{\mu_{K, B, Я}^B(u)}{B} \right), \quad (12)$$

на носії  $[H, C, B]$ , для переведення якої на носій  $U = [0, 1]$ , спочатку за методикою, викладеною в роботі [6], здійснимо її імплікацію, тобто, знайдемо функції належності термів  $H, C, B$  вихідної лінгвістичної змінної  $\Gamma_{BC}^*$ , «зрізани» значеннями  $\mu_{K, B, Я}^H(u), \mu_{K, B, Я}^C(u), \mu_{K, B, Я}^B(u)$ :

$$\begin{aligned} \mu_H(u) &= \text{imp}(\mu_{\Gamma}^H(u), \mu_{K, B, Я}^H(u)); \\ \mu_C(u) &= \text{imp}(\mu_{\Gamma}^C(u), \mu_{K, B, Я}^C(u)); \\ \mu_B(u) &= \text{imp}(\mu_{\Gamma}^B(u), \mu_{K, B, Я}^B(u)), \end{aligned} \quad (13)$$

як показано на рис. 3 для одного з варіантів, а потім знайдемо агреговану функцію належності цієї лінгвістичної змінної на носії  $U = [0, 1]$ :

$$\mu_{\Gamma}^{\overline{[0,1]}}(u) = \text{agg}(\mu_H(u), \mu_C(u), \mu_B(u)), \quad (14)$$

графік якої на цьому ж рис. 3 показано жирною лінією.

А після цього для знаходження чіткого значення  $\Gamma_{BC}^{**}$  вихідної лінгвістичної змінної  $\Gamma_{BC}^*$  знадобиться операція дефазифікації за методом центру ваги, формула якої для наших умов матиме вигляд

$$\Gamma_{BC}^{**} = \frac{\sum_{i=1}^N u_i \cdot \mu_{\Gamma}^{\overline{[0,1]}}(u_i)}{\sum_{i=1}^N \mu_{\Gamma}^{\overline{[0,1]}}(u_i)}, \quad (15)$$

де  $N$  — кількість частин, на які розбивається відрізок  $[0, 1]$ .

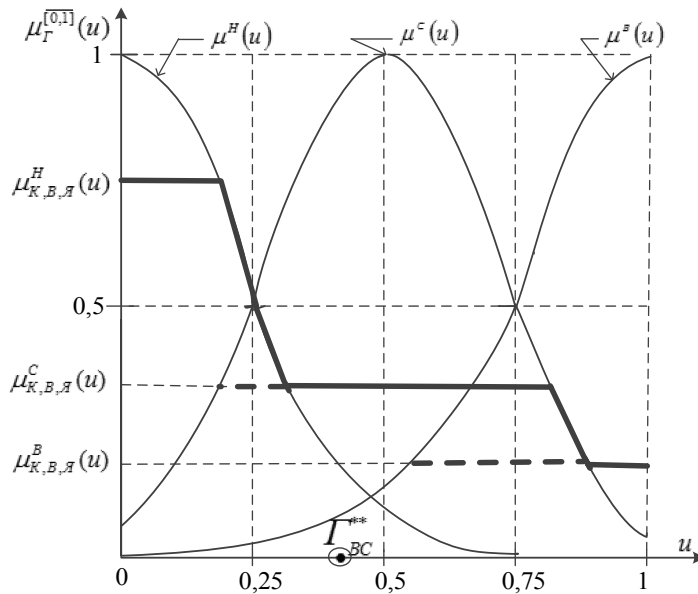


Рис. 3. Графіки імплікованих функцій належності термів H, C, B та агрегованої функції належності  $\mu_{\Gamma}^{[0,1]}(u)$  лінгвістичної змінної  $\Gamma_{BC}^*$  для конкретизованих значень  $\mu_{K,B,Y}^H(u)$ ,  $\mu_{K,B,Y}^C(u)$ ,  $\mu_{K,B,Y}^B(u)$

Для агрегованого значення функції належності  $\mu_{\Gamma}^{[0,1]}(u)$ , показано на рис. 3 жирною лінією, чітке значення  $\Gamma_{BC}^{**}$  вихідної лінгвістичної змінної  $\Gamma_{BC}^*$ , обчислене за формулою (15), буде знаходитись у тій точці осі  $u$ , яка обведена колом.

Отримана нами нечітка база знань, виражена співвідношеннями (9)—(15), і буде задавати математичну модель ланки 3-го рівня ієрархії системи формування коштів, що надходять у вигляді плати за освітні послуги від вітчизняних студентів, що навчаються за контрактом. Ця база знань є адекватною структурі (1)—(3) узагальненої моделі (8), у якій вплив безпосередньо ми можемо здійснювати лише на вхідну лінгвістичну змінну  $Y_{OP}^{BC}$ , через яку і буде здійснюватись управління процесом надходження коштів на цьому рівні.

Як впливає з роботи [3], наведена вище процедура буде справедливою і для синтезу математичної моделі ланки 2-го рівня ієрархії, узагальнена модель якої має вигляд

$$K^{BC} = f_7^*(I_Y^{BC}, V_{KH}^{BC}, Y_{\Pi}^{BC}), \tag{16}$$

з тією лише різницею, що в усіх формулах, наведених вище, необхідно замість  $\Gamma_{BC}^*$  підставити  $K^{BC}$ , замість  $K^{BC} — I_Y^{BC}$ , а замість  $Y_{OP}^{BC} — Y_{\Pi}^{BC}$ .

Але ця математична модель буде лише проміжною, оскільки в її структуру не входять лінгвістичні змінні, на які ми можемо здійснювати вплив безпосередньо.

Інші управляючі лінгвістичні змінні входять в математичні моделі ланок 1-го рівня ієрархії системи формування коштів, узагальнені моделі яких, як показано в роботі [3], мають вигляд

$$V_{KH}^{BC} = f_8^*(V_{3\Pi}^{BC}, V_{KP}^{BC}, V_{PC}^{BC}); \tag{17}$$

$$Y_{\Pi}^{BC} = f_9^*(Y_{\Pi A\Phi}^{BC}, Y_{3M}^{BC}, Y_{\Delta B \Delta}^{BC}); \tag{18}$$

$$I_Y^{BC} = f_{10}^*(P_{\Pi Y}^{BC}, \Pi_{\Gamma Y}^{BC}, Y_{CK}^{BC}). \tag{19}$$

Алгоритм побудови цих математичних моделей є таким самим, як і описаний вище алгоритм синтезу математичної моделі, адекватної узагальненій моделі (16).

За допомогою сукупності синтезованих математичних моделей, адекватних узагальненим моделям (8), (16)—(19), ми можемо, визначивши за алгоритмом, наведеним в роботі [3], вектор

$$\left( Y_{\text{ОП}}^{\text{BC}}, Y_{\text{ПАШ}}^{\text{BC}}, Y_{\text{ЗМІ}}^{\text{BC}}, Y_{\text{ДВД}}^{\text{BC}}, V_{\text{ЗП}}^{\text{BC}}, V_{\text{КП}}^{\text{BC}}, V_{\text{РС}}^{\text{BC}}, P_{\text{ПУ}}^{\text{BC}}, P_{\text{ГУ}}^{\text{BC}}, Y_{\text{СК}}^{\text{BC}} \right) \quad (20)$$

конкретних значень управляючих лінгвістичних змінних, розрахувати спочатку вектор

$$\left( K^{\text{BC}}, I_{\text{У}}^{\text{BC}}, V_{\text{КН}}^{\text{BC}}, Y_{\text{П}}^{\text{BC}} \right) \quad (21)$$

проміжних лінгвістичних змінних, а потім і значення вихідної лінгвістичної змінної  $\Gamma_{\text{BC}}^*$ .

Формуючи по черзі прирости лише однієї лінгвістичної змінної із вектора (20), ми можемо шляхом почергового моделювання визначити, як кожна із цих вхідних лінгвістичних змінних впливає на вихідну лінгвістичну змінну, і зосередити організаційну роботу в університеті на тих напрямках, які приведуть до найпомітнішого приросту вихідної лінгвістичної змінної, якою у нас є кошти, що надходять в якості оплати за освітні послуги від студентів, що навчаються за контрактом.

### Висновки

1. Синтезовано математичну модель для ланки 3-го рівня ієрархії системи формування коштів, що надходять до університету в якості оплати за освітні послуги від студентів, що навчаються за контрактом.
2. Показано, як використати алгоритм синтезу математичної моделі, розроблений для ланки 3-го рівня ієрархії системи, для синтезу математичних моделей ланок 2-го та 1-го рівнів ієрархії цієї ж системи.
3. Сформовано вектор управляючих лінгвістичних змінних для вищевказаної системи і визначено шляхи застосування цього вектора для збільшення надходження коштів до університету.

### СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Мокін Б. І. Ієрархія факторів, що забезпечують надходження до вищих навчальних закладів позабюджетних коштів та узагальнені моделі їх взаємодії / Б. І. Мокін, Ю. В. Мокіна, Н. С. Гончарук // Вісник Вінницького політехнічного інституту. — 2012. — № 3. — С. 75—84.
2. Мокін Б. І. Прогнозування надходження до вищого навчального закладу коштів за надання дозволених платних послуг на основі моделей авторегресії-проінтегрованого ковзного середнього / Б. І. Мокін, Ю. В. Мокіна, Н. С. Гончарук // Вісник Вінницького політехнічного інституту. — 2012. — № 4. — С. 24—32.
3. Мокіна Ю. В. Структури моделей, придатних для управління процесом надходження до університету коштів за надання платних освітніх послуг вітчизняним студентам, що навчаються за контрактом / Ю. В. Мокіна, Н. С. Гончарук, Б. І. Мокін // Вісник Вінницького політехнічного інституту. — 2012. — № 6. — С. 75—84.
4. Заде Л. Понятие лингвистической переменной и ее применение к принятию приближенных решений / Л. Заде ; пер. с англ. — М. : Мир, 1976. — 167 с.
5. Митюшкин Ю. И. Soft Computing: идентификация закономерностей нечеткими базами знаний / Ю. И. Митюшкин, Б. И. Мокин, А. П. Ротштейн. — Винница : УНІВЕРСУМ-Вінниця, 2002. — 145 с.
6. Штовба С. Д. Проектирование нечетких систем средствами MatLab / С. Д. Штовба. — М. : Горячая линия—Телеком, 2007. — 288 с.

Рекомендована кафедрою менеджменту та моделювання в економіці

Стаття надійшла до редакції 4.12.12  
Рекомендована до друку 28.03.13

**Мокіна Юлія Вікторівна** — доцент кафедри менеджменту та моделювання в економіці;  
**Гончарук Наталія Сергіївна** — аспірантка, **Мокін Борис Іванович** — професор кафедри відновлюваної енергетики та транспортних електричних систем і комплексів.  
Вінницький національний технічний університет, Вінниця