УДК 512.53

А. А. Барковська; В. Д. Дереч, канд. ф-м. наук, доц.

СКІНЧЕННІ ІНВЕРСНІ НАПІВГРУПИ З ПЕРЕСТАВНИМИ СТАБІЛЬНИМИ КВАЗІПОРЯДКАМИ

Запропоновано опис скінченних інверсних напівгруп, для яких будь-які два стабільні квазіпорядки є переставними відносно звичайної операції композиції бінарних відношень.

Вступ

Рефлексивне і транзитивне бінарне відношення на множині називається квазіпорядком. На алгебраїчних системах (зокрема — напівгрупах) доцільно розглядати лише стабільні квазіпорядки, тобто квазіпорядки, що узгоджуються з алгебраїчними операціями. Безумовно, що серед стабільних квазіпорядків на алгебраїчних системах найважливішу роль відіграють конгруенції і порядки. Відомо [1] , що будь-який стабільний квазіпорядок на групі однозначно визначається інваріантною піднапівгрупою. Кожна піднапівгрупа скінченної групи є підгрупою. Звідси випливає, що довільний стабільний квазіпорядок на скінченній групі є конгруенцією. Відомо, що на довільній групі будь-які дві конгруенції переставні (або в іншій термінології — комутують) відносно звичайної операції композиції бінарних відношень. Отже, робимо висновок — будь-які два стабільні квазіпорядки на скінченній групі є переставними. Після цих спостережень цілком закономірно виникає проблема класифікації скінченних напівгруп за ознакою комутативності (або переставимості) стабільних квазіпорядків. В статті ця задача розв'язується для класу скінченних інверсних напівгруп.

Термінологія і основні означення

Бінарне відношення τ на множині S називають рефлексивним, якщо для будь-якого $x \in S$ $(x, x) \in \tau$.

Бінарне відношення λ на множині S називають транзитивним, якщо з умов $(x,y) \in \lambda$ і $(y,z) \in \lambda$ випливає, що $(x,z) \in \lambda$.

Рефлексивне і транзитивне бінарне відношення на множині називається квазіпорядком. Квазіпорядок η на напівгрупі S називається стабільним, якщо з умови $(x,y) \in \eta$ випливає $(xz,yz) \in \eta$ і $(zx,zy) \in \eta$ для будь-якого елемента $z \in S$.

Напівгрупа S називається інверсною, якщо для довільного елемента $x \in S$ існує (причому єдиний) елемент x^{-1} такий, що виконуються рівності $xx^{-1}x = x$ і $x^{-1}xx^{-1} = x^{-1}$. Відомо [2], що напівгрупа є інверсною тоді і лише тоді, коли вона регулярна і будь-які два її ідемпотенти комутують. Очевидно, що група є інверсною напівгрупою.

Комутативна напівгрупа називається напіврешіткою, якщо кожний її елемент є ідемпотентом. Очевидно, що напіврешітка є інверсною напівгрупою. Якщо S — напіврешітка, то на ній природним чином визначають стабільний порядок. А саме: $a \le b$ тоді і лише тоді, коли $ab = ba = a$.

Якщо два елементи x і y напіврешітки S непорівняльні, то цей факт позначають через $x \parallel y$.

Якщо C — скінченна множина, то через $|C|$ позначають кількість елементів множини C.

Непорожня підмножина A напівгрупи S називається ідеалом, якщо $AS \subseteq A$ і $SA \subseteq A$. Найменший (відносно включення) ідеал напівгрупи називають ядром. В скінченній напівгрупі (на відміну від нескінченних) ядро завжди існує.

Напівгрупу називають простою, якщо в ній відсутні власні ідеали.

Напівгрупа S називається переставною, якщо для будь-яких двох її конгруенцій η і ψ виконується рівність $\eta \circ \psi = \psi \circ \eta$.

Клас скінченних інверсних напівгруп, для кожної з яких будь-які два стабільні квазіпорядки переставні, позначимо через PQ.

Основна теорема

Перед тим як сформулювати основний результат статті потрібно довести дві леми і сформулювати деякі необхідні твердження.

Лема 1. *Нехай A і B — довільні ідеали напівгрупи S. Тоді бінарне відношення $\Sigma = (A \times B) \cup \Delta$ (де Δ — відношення рівності на S) є стабільним квазіпорядком.*

Доведення. Очевидно, що Σ є рефлексивним бінарним відношенням. Далі, нехай $(x,y) \in \Sigma$ і $(y,z) \in \Sigma$. Розглянемо можливі випадки:

1-*й випадок.* $(x,y) \in A \times B$ і $(y,z) \in A \times B$.

Тоді $x \in A$ і $z \in B$. Отже, $(x,z) \in (A \times B) \subseteq \Sigma$.

2-*й випадок.* $(x,y) \in \Delta$ і $(y,z) \in (A \times B)$.

Тоді $x = y$ і $(x,z) \in (A \times B) \subseteq \Sigma$.

Так само тривіально перевіряються всі інші випадки. Таким чином, бінарне відношення Σ є транзитивним, а отже, — квазіпорядком.

Тепер покажемо, що Σ — стабільне бінарне відношення. Нехай $(x,y) \in \Sigma$, то $(x,y) \in A \times B$ або $x = y$. Якщо $(x,y) \in A \times B$, то $x \in A$ і $y \in B$. Оскільки A і B є ідеалами напівгрупи S, то для довільного елемента $z \in S$.

$xz,\ zx \in A$ і $yz,\ zy \in B$. Отже, $(xz, yz) \in (A \times B) \subseteq \Sigma$ і $(zx, zy) \in (A \times B) \subseteq \Sigma$.

Якщо ж $x = y$, то очевидно $xz = yz$ і $zx = zy$.

Таким чином квазіпорядок Σ є стабільним бінарним відношенням на S. Лему доведено.

Лема 2. *Якщо скінченна напівгрупа S така, що будь-які два стабільних квазіпорядки на ній є переставними, то $|S - K| \le 1$, де K — ядро напівгрупи S .*

Доведення. Припустимо протилежне, тобто $|S - K| \ge 2$. Тоді існують два різні елементи u і w які належать множині $S - K$. Розглянемо бінарне відношення $\rho = (S \times K) \cup \Delta$, (де Δ — відношення рівності на S). Тоді очевидно, що $\rho^{-1} = (K \times S) \cup \Delta$. Згідно з лемою 1 бінарні відношення ρ і ρ^{-1} є стабільними квазіпорядками на напівгрупі S . Беремо довільний елемент $x \in K$. Оскільки $(u,x) \in \rho$ і $(x,w) \in \rho^{-1}$, то $(u,w) \in \rho \circ \rho^{-1}$. Позаяк $\rho \circ \rho^{-1} = \rho^{-1} \circ \rho$, то $(u,w) \in \rho^{-1} \circ \rho$. Отже, існує елемент $z \in S$ такий, що $(u,z) \in \rho^{-1}$ і $(z,w) \in \rho$. Оскільки $u \notin K$, то $(u,z) \in \Delta$ а, отже, $u = z$. Звідси $(u,w) \in \rho = (S \times K) \cup \Delta$. Якщо припустити, що $(u,w) \in S \times K$, то $w \in K$. Суперечність. Якщо ж припустити, що $(u,w) \in \Delta$, то $u = w$. Теж суперечність. Таким чином, $|S - K| \le 1$.

Лему доведено.

Крім вищенаведених лем для доведення теореми нам знадобляться ще деякі результати.

Результат 1 [3, lemma 8]. Let I be an ideal of a semigroup S. If f is a homomorphism of I onto a non-trivial group G, then there is a homomor-phism g of S onto G such that f is restriction of g to I.

Результат 2 [4, theorem 3]. If a semigroup S has a proper ideal and a proper group congruence then S is not permutable.

З цих двох результатів безпосередньо випливає.

Твердження. Якщо напівгрупа S містить ідеал який є нетривіальною групою, то напівгрупа S не є переставною.

Тепер ми вже готові сформулювати і довести основний результат статті.

Теорема. *До повного списку скінченних інверсних напівгруп з класу PQ належать:*

1. групи;
2. двоелементна напіврешітка.

Доведення. У вступній частині ми зазначали, що кожний стабільний квазіпорядок на скінченній групі є конгруенцією. Відомо (наприклад, [5, с. 212]), що будь-які дві конгруенції на довільній групі комутують відносно звичайної операції композиції бінарних відношень. Звідси випливає, що довільна скінченна група належить класу PQ .

Тепер ми покажемо, що двоелементна напіврешітка (її позначимо через L) теж належить класу PQ. Нехай $L=\{0, a\}$, де 0 — нуль напіврешітки L. Перелічимо всі рефлексивні бінарні відношення на L: $\Delta=\{(0,0), (a,a)\}$, $\alpha=\{(0,0), (a,a), (0,a)\}$, $\beta=\{(0,0), (a,a), (a,0)\}$, $\chi=\{(0,0), (a,a), (a,0),(0,a)\}$.

Легко перевірити, що відношення $\Delta, \alpha, \beta, \chi$ є стабільними квазіпорядками. Крім того (це теж легко перевірити) перелічені бінарні відношення комутують між собою. Наприклад, $\alpha\circ\beta=\beta\circ\alpha=\chi$. Таким чином, двоелементна напіврешітка належить класу PQ.

Далі покажемо, що інших (тобто груп і двоелементної напіврешітки) напівгруп в класі PQ не існує. Отже, нехай напівгрупа S належить класу PQ. Позначимо ядро напівгрупи S через K. Розглянемо всі можливі випадки:

1-*й випадок.* $|K|=1$.

В цьому випадку напівгрупа S або тривіальна (тобто складається з одного елемента) або згідно з лемою 2 є двоелементною інверсною напівгрупою з нулем 0. Позначимо через a ненульовий елемент напівгрупи. Якщо припустити, що $a^2=0$, то напівгрупа $\{0, a\}$ не буде інверсною. Отже, $a^2=a$. Таким чином, $\{0,a\}$ — двоелементна напіврешітка.

2-*й випадок.* $|K|\geq 2$.

Насамперед нагадаємо відомий факт: ядро скінченної напівгрупи є простою напівгрупою. Легко показати, що ідеал інверсної напівгрупи є інверсною напівгрупою. Отже, ядро K є простою інверсною напівгрупою. Оскільки K — скінченна напівгрупа, то вона містить щонайменше один ідемпотент. Покажемо, що ядро K насправді містить точно один ідемпотент. Припустимо протилежне. Тобто нехай a і b — два різні ідемпотенти ядра K . Якщо $a<b$, то $KaK\subset KbK\subseteq S$. Тобто ядро K містить власний ідеал. Суперечність. Якщо ж $a\parallel b$, то $ab<a$. Звідки випливає, що $KabK\subset KaK$. Отже, і в цьому випадку ядро K теж містить власний ідеал. Суперечність. Таким чином, ядро K містить точно один ідемпотент. Відомо (наприклад, [2, с. 88]), що інверсна напівгрупа з єдиним ідемпотентом є групою. Згідно з лемою 2 $|S-K|\leq 1$. Оскільки ядро є нетривіальною групою, то застосовуючи твердження (див. вище), робимо висновок, що $S=K$. Тобто інверсна напівгрупа S є групою.

Висновки

Знайдено усі скінченні інверсні напівгрупи, на кожній з яких будь-які два стабільних квазіпорядки переставні відносно операції композиції бінарних відношень. Аналогічна проблема залишається відкритою для класу скінченних напівгруп. Конкретні приклади показують, що до перелічених в статті інверсних напівгруп додаються ще деякі типи простих напівгруп. В кожному випадку для авторів є важливою лема 2, що доведена в пропонованій статті для будь-якої скінченної напівгрупи.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Конторович П. Г. К теории полугрупп в группе / П. Г. Конторович // ДАН СССР. — 1953. — Т. 93, № 2. — С. 229—231.
2. Petrich M. Inverse semigroup / M. Petrich. — New York etc. : John Willey and Sons, 1984, 674 p.
3. Tamura T. Commutative semigroups whose lattice of congruences is a chain / T. Tamura // Bull. Soc. Math. France. — 1969. — V. 97. — P. 369—380.
4. Hamilton H. Permutability of congruences on commutative semigroups / H. Hamilton // Semigroup Forum. — 1975. — № 10. — P. 55—66.
5. Биркгоф Г. Теория решеток / Г. Биркгоф. — М. : Наука, 1984. — 564 с.

Рекомендована кафедрою вищої математики

Стаття надійшла до редакції 13.09.12
Рекомендована до друку 18.09.12

Барковська Алла Андріївна — старший викладач, ***Дереч Володимир Дмитрович*** — доцент.

Кафедра вищої математики, Вінницький національний технічний університет, Вінниця