УДК 681.325.5

Азаров О. Д., д. т. н., проф.
Черняк О. І., к. т. н., доц.,
Муращенко О. Г.

ПОРОЗРЯДНЕ ДОДАВАННЯ В АМ-СИСТЕМАХ ЧИСЛЕННЯ НА ОСНОВІ АДИТИВНИХ ПЕРЕТВОРЕНЬ

Вінницький національний технічний університет

alexandr.chernyak@gmail.com

Розглянуто особливості порозрядного додавання зі старших розрядів у системах числення з адитивними і мультиплікативними співвідношеннями між розрядами. Запропоновано співвідношення для визначення довжини перенесення

Ключові слова: АМ-системи числення, порозрядне додавання, адитивні перетворення

Вступ

Підвищення продуктивності обчислень за рахунок розподіленої обробки створює проблему, що полягає у необхідності реалізації значної кількості інформаційних зв'язків. Це призводить до принципових обмежень у подальшій мініатюризації обчислювальних засобів.

Одним з відомих підходів зменшення кількості інформаційних зв'язків між пристроями є порозрядна потокова обробка послідовних кодів чисел [1-4]. Така обробка дозволяє кожному пристрою за один такт приймати, оброблювати та передавати один розряд. Порозрядне виконання всіх арифметичних операцій в єдиному потоці можливе лише зі старших розрядів. Для цього використовуються надлишкові системи числення, оскільки в них можливе обмеження довжини перенесення у старші розряди при додаванні і відніманні. Довжина перенесення визначає апаратні витрати при побудові арифметичних пристроїв порозрядної обробки.

Авторами запропоновано клас систем числення, що узагальнює відомі та дозволяє створювати нові системи числення з обмеженою довжиною перенесення у старші розряди при порозрядному виконанні арифметичних операцій. Вони названі АМ-системами числення [5]. Будь-яка АМ-система числення може бути описана сукупністю таких параметрів: множиною цифр, основою системи числення та адитивним співвідношенням певного виду порядку (t, τ, p):

$$\left\{\begin{array}{l} C_k = \{0,1,\ldots,c_{k-1}\}; \\ 1 < w < c_{k-1}+1; \\ {}^tA^{\tau,p} : w^{\tau p+t} = R^{\tau,p} \end{array}\right\},$$

де $k \geq 2$ – значність системи числення; C_k – множина цифр; w - основа системи числення; ${}^tA^{\tau,p}$ – адитивне співвідношення порядку (t, τ, p); t, τ, p – цілі числа, що задовольняють умовам: $t>0$, $\tau=nt$, $p\geq 0$; $R^{\tau,p} = \sum_{i=0}^{p} r_i \cdot w^{\tau i}$ - граничне значення ($r \in C_k$). При цьому на параметри АМ-системи числення накладається обмеження: $r_i \geq r_i - 1 > 0$.

Може існувати багато АМ-систем числення, в кожній з яких довжина перенесення при виконанні порозрядного додавання є обмеженою. Проте, відсутні відомі теоретичні розробки, за допомогою яких можна було б порівнювати довжини перенесення для будь-яких АМ-систем числення.

Метою даної статті є розробка теоретичних положень, що могли б обґрунтувати можливість потокового порозрядного додавання зі старших розрядів у будь-якій АМ-системі числення, а також визначити межі, в яких знаходиться довжина перенесення.

Наявність адитивних співвідношень між розрядами в АМ-системах числення дозволяє ввести операції адитивного перетворення кодів чисел (А-перетворення), що полягають у зміні коду числа при збереженні його числового еквіваленту [6]. За напрямком перенесення адитивні (А) перетворення поділяються на перетворення з перенесенням вліво (AL) і перетворення з перенесенням вправо (AR) в залежності від того, до якої частини коду додається значення перенесення. За типом умов виконання AL і AR-перетворення поділяються на елементарні (E), універсальні (U) та повні (F). При елементарних А-перетвореннях перевіряються умови в кожному окремому розряді перетворюваної частини коду. Якщо всі розряди перетворюваної частини коду задовольняють умовам, виконується елементарне А-перетворення. Таке перетворення змінює тільки розряди від (і-τр)-го до (і+t)-го і не зачіпає інші розряди коду. Елементарне А-перетворення може бути виконане тільки тоді, коли кожний розряд перетворюваного коду задовольняє умові перетворення. На відміну від елементарних в універсальних А-перетвореннях перевіряється виконання умов для сумарних значень частин кодів. Нижче наведено узагальнений вираз для EAL-, EAR-, UAL- і UAR-перетворень (V – умова для виконання відповідного перетворення):

$$
{}^{t}A_{i}^{\tau,p}(X_{i-\tau b}^{\tau b}) = \begin{cases} X_{i-\tau b}^{\tau b} \ \text{при}\ \overline{\mathrm{V}} \\ X_{i-\tau b}^{\tau b} \pm w^{i+t} \mp R_{i-\tau p}^{\tau,p} \ \text{при}\ \mathrm{V}. \end{cases}
$$

Повні А-перетворення (FAL- та FAR-перетворення) фактично є сукупністю універсальних перетворень того ж напрямку, які виконуються не тільки для і-го розряду, але й для усіх молодших від нього розрядів:

$$
{}^{t}FA_{i}^{\tau,p}(X_{i-\tau b}^{\tau b}) = {}^{t}UA_{i-\tau b}^{\tau,p}(({}^{t}UA_{i-\tau(b+1)}^{\tau,p}((\cdots
$$

$$
\cdots{}^{t}UA_{i-1}^{\tau,p}(({}^{t}UA_{i-1}^{\tau,p}(X_{i-\tau b}^{\tau b}))_{i-\tau b}^{\tau(b-1)})\cdots)_{i-\tau b}^{\tau}))_{i-\tau b}^{0}).
$$

Результат повних А-перетворень такий самий, як і універсальних та елементарних. Крім того, після виконання і-го повного А-перетворення для жодного з перетворюваних розрядів, молодших від і-го, не задовольняється умова А-перетворення того ж напрямку.

А-перетворення є особливим видом умовних арифметичних операцій, що узагальнюють відомі операції згортки-розгортки та перенесення-запозичення [6]. Дані операції лежать в основі порозрядного додавання і віднімання в АМ-системах числення. Всі арифметичні операції в АМ-системах числення основані на додаванні. Тому довжина перенесення при виконанні додавання визначає кількість одночасно оброблюваних розрядів у порозрядних арифметичних пристроях. Нехай потрібно знайти код суми Z, що дорівнює сумі кодів X і Y $X+Y=Z$. Порозрядне додавання кодів в АМ системах числення виконується за відомим методом неавтономної обробки [1,2] і являє собою послідовність кроків додавання окремих розрядів, починаючи зі старшого, на кожному з яких визначається код суми Z_i таким чином, що на останньому кроці він дорівнює коду суми Z. Визначення результату Z_i на кожному кроці відбувається шляхом додавання коду чергових розрядів до результату, отриманого на попередньому кроці:

$$
Z_i = Z_{i-1} + x_i + y_i .
$$

Особливістю додавання в АМ-системах числення є можливість обмеження розповсюдження перенесення у старші розряди за рахунок виконання FAL-перетворення над групою розрядів на попередньому такті додавання:

$$
Z_i = FAL(Z_{i-1} + (x_{n-1-i} + y_{n-1-i}) \cdot w^{n-1-i}) .
$$

Результат Z_i можна поділити на дві частини: сталі старші розряди та змінні молодші розряди. Стала частина являє собою розряди коду результату ZC, а змінна частина є проміжною сумою T.

Тобто, $Z_i = ZC_i + T_i$,

де $ZC_i = (Z_i)_{n-i+d-1}^{d}$; $T_i = (Z_i)_{n-i-b-1}^{d+b}$; d – довжина перенесення у старші розряди; b – довжина перенесення у молодші розряди. При достатній кількості розрядів d на кожному кроці порозрядного додавання FAL перетворення потрібно виконувати тільки над проміжною сумою, отриманою на попередньому кроці, до якої додаються чергові розряди доданків. Перенесення через старший розряд проміжної суми, отриманої на попередньому кроці, розповсюджуватись не буде.

Для визначення максимальної довжини d перенесення у старші розряди потрібно кожен такт додавання розділити на два етапи. Перший етап – додавання окремих розрядів і отримання коду їх суми S_i. Другий етап – додавання S_i до результату T_{i-1}, отриманого на попередньому такті. Отже, порозрядне додавання можна зобразити, як додавання S_i до T_{i-1} на кожному i-му такті. Додавання окремих розрядів виконується у звичайний для позиційних систем числення спосіб. Нехай на i-му такті додаються розряди x_i та y_i. При цьому може виникнути переповнення ($x_i+y_i>c_{k-1}$). Для ліквідації переповнення використовується FAL-перетворення над частинною коду результату, у якої старшим є переповнений розряд. Таке перетворення може виконуватись декілька разів до тих пір, доки виконується його умова. Кожне FAL-перетворення в загальному випадку викликає перенесення як у деякий старший розряд, так і в Δ молодших по відношенню до групи розрядів. Кількаразове виконання FAL-перетворення може призвести до переповнення в тому старшому розряді, до якого поступає перенесення. Це вимагає виконання нового FAL-перетворення над групою розрядів, що об’єднує як попередні так і ті розряди, у які поступило перенесення, і так далі. Результатом додавання окремих розрядів в АМ-системах числення у загальному випадку є багаторозрядний код отриманий FAL-перетворенням:

$$(FAL(\cdots FAL(FAL(x_i + y_i)_{i-\Delta 1}^{\Delta 1})_{i-\Delta 2}^{\Delta 2+1} \cdots)_{i-\Delta(S-1)}^{\Delta(S-1)+dS-1})_{i-\Delta S}^{\Delta S+dS}$$

де dS – довжина перенесення в старші розряди на останньому кроці FAL-перетворення; $\Delta 1=\tau p<\Delta 2<\ldots<\Delta(S\text{-}1)<\Delta S$ – довжина перенесення в молодші розряди на відповідному кроці FAL-перетворення. Якщо наперед відома максимальна довжина перенесення у старші $dS\max$ і в молодші $\Delta S\max$ розряди від додавання двох окремих розрядів, то код їхньої суми можна отримати виконуючи лише останнє FAL-перетворення:

$$(FAL(x_i + y_i)_{i-\Delta(S-1)\max}^{\Delta(S-1)\max+dS\max-1})_{i-\Delta S\max}^{\Delta(S-1)\max+dS\max}. \quad (1)$$

Максимальне перенесення буде при додаванні розрядів з максимальними цифрами c_{k-1} і являє собою код $S\max$, поділений на $dS\max+1$ старших і $\Delta S\max$ молодших розрядів:

$$S\max = 2 \cdot c_{k-1} \cdot w^i = S_{i-\Delta S\max}^{dS\max+\Delta S\max+1} \quad (2)$$

Слід відзначити, що при $c_{k-1}>r_p$ може бути декілька кодів максимального значення $S\max$ з різною довжиною $dS\max$ і, відповідно, різними старшими цифрами $S_{i+dS\max}$ в залежності від того, над якими розрядами виконувалось FAL-перетворення (1). При мінімальному значенні $dS\max_{\min}$ старший розряд коду $S\max$ матиме значення не більше ніж c_{k-1}:

$$(FAL(2 \cdot c_{k-1} \cdot w^i)_{i-b}^{b+dS\max_{\min}-1})_{i+dS\max_{\min}}^{0} \le c_{k-1} \cdot w^{i+dS\max_{\min}}. \quad (3)$$

При максимальному значенні $dS\max_{\max}$ старший розряд коду $S\max$ матиме значення не більше ніж r_p:

$$(FAL(2 \cdot c_{k-1} \cdot w^i)_{i-b}^{b+dS\max_{\max}-1})_{i+dS\max_{\max}}^{0} \le r_p \cdot w^{i+dS\max_{\max}}. \quad (4)$$

Для визначення $dS\max_{\max}$ потрібно виконати послідовність операцій, подібних EAR-перетворенню. На відміну від EAR-перетворення ці операції повинні виконуватись навіть при переповненні у молодших розрядах. Їх сутність полягає у тому, що виконуються послідовні перетворення починаючи з одиниці деякого розряду з перенесенням у молодші розряди. На кожному кроці перетворення від найстаршого значущого розряду коду, отриманого на попередньому кроці, віднімається його значення. Еквівалентне значення додається у вигляді коду в розряди, молодші від найстаршого значущого. Таким чином, код, що дорівнює одиниці деякого розряду, на кожному кроці зміщується вправо і при цьому збільшується. Нехай на першому кроці цей код дорівнює одиниці деякого m-го розряду: $X_0 = w^m$. Тоді на і-му кроці значення коду буде

$$X_i = UAL^{\tau,p}_{m-\tau p-(i+1)}(X_{i-1} - r_p^{i-1} \cdot x_{m-(i-1)} \cdot (w^{m-i} - R^{\tau,p}_{m-\tau p-i})),$$

де i=1,2,3,... Ці кроки перетворення потрібно повторювати до тих пір, доки $x_{m-i}<2\cdot c_{k-1}$. Якщо після закінчення повтору кроків $x_{m-i}=2\cdot c_{k-1}$, то максимальна довжина перенесення в старші розряди від додавання m-тих розрядів $dS\max_{\max}$ дорівнює кількості кроків перетворення. Якщо ж $x_{m-i}>2\cdot c_{k-1}$, то $dS\max_{\max}$ на одиницю менше від кількості кроків перетворення. Аналогічно визначається $dS\max_{\min}$. Різниця тільки у тому, що початкове значення m-го розряду встановлюється рівним максимальній цифрі c_{k-1}. На другому етапі виникає перенесення від перевищення граничного значення при додаванні коду окремих розрядів до проміжної суми. Воно реалізується за допомогою FAL-перетворення результату додавання S_i і проміжної суми T_{i-1}, отриманої на попередньому такті. Максимальна довжина dT цього перенесення визначається кількістю розрядів, необхідних для поглинання даного і послідуючих перенесень від додавання окремих розрядів. Загальна максимальна довжина перенесення у старші розряди $d=dS+dT$. Наступне твердження дозволяє визначити межі, в яких може знаходитись значення d в довільній АМ-системі числення за заданими кількістю цифр, адитивним співвідношенням і довжиною перенесення від додавання окремих розрядів.

Твердження. Нехай для АМ-системи числення задані множина цифр {0, 1, ..., c_{k-1}} і адитивне співвідношення ${}^1A^{\tau,p}$. Нехай також для цієї системи числення визначені: $dS\max_{\min}$, $dS\max_{\max}$ – мінімальна і максимальна довжини перенесення у старші розряди при додаванні максимальних цифр в одному розряді та dZ – найбільша кількість розрядів, загальне максимальне значення яких менше граничного значення адитивного співвідношення, тобто

$$c_{k-1} \cdot \sum_{i=0}^{dZ-1} w^{\tau p-i} < {}^1R_0^{\tau,p} \le c_{k-1} \cdot \sum_{i=0}^{dZ} w^{\tau p-i} . \quad (5)$$

Тоді на будь-якому кроці порозрядного додавання максимальна довжина d перенесення у старші розряди знаходиться у межах

$$dZ + dS\max_{\max} + \tau + 2 > d \ge dZ + dS\max_{\min} + H[p], \quad (6)$$

де $H[p]$ – дискретна одинична функція Хевісайда [123].

Доведення цього твердження буде виконуватись окремо для лівої і правої частин виразу 6. Спочатку доведемо праву частину (6). Для доведення достатньо навести приклади, в яких при порозрядному додаванні у будь-якій АМ-системі числення з довжиною перенесення у старші розряди $d < dZ + dS\max_{\min} + H[p]$ виникає переповнення. Доведення буде виконуватись окремо для кожного з двох можливих випадків: p=0 та p>0.

У першому випадку $H[p]$=0, $dS\max_{\min}$>0 і dZ=0 за визначенням (5). Тому для доведення правої частини твердження достатньо навести приклад порозрядного додавання, що викликає переповнення у будь-якій системі числення при $d<dS\max_{\min}$. Розглянемо приклад дода-

вання n-розрядних кодів з максимальними цифрами

$$c_{k-1}\cdot\sum_{j=0}^{n-1-dS\max_{\min}} w^j + c_{k-1}\cdot\sum_{j=0}^{n-1-dS\max_{\min}} w^j$$

з довжиною перенесення $d{=}dS\mathrm{max}_{\mathrm{min}}$.

При порозрядному додаванні цих кодів, починаючи зі старших розрядів, на перших $dS\mathrm{max}_{\mathrm{min}}$ кроках умова для FAL-перетворення не виконується. На кожному i-му кроці порозрядного додавання, починаючи з $dS\mathrm{max}_{\mathrm{min}}$-го, відбувається перенесення у старші розряди, що не менше $c_{k-1}\cdot w^{i+dS\max_{\min}}$ за умовою визначення $dS\mathrm{max}_{\mathrm{min}}$. Воно викликає переповнення у розрядах з i-го по (i+$dS\mathrm{max}_{\mathrm{min}}$-1)-й, яке не може бути ліквідовано за рахунок перенесення у молодші розряди, оскільки і у них на наступних тактах відбувається переповнення. Отже, для випадку p=0 права частина твердження доведена. У другому випадку $H[p]$=1. Тому для доведення правої частини твердження достатньо навести приклад порозрядного додавання, в якому виникає переповнення при $d<dZ+dS\mathrm{max}_{\mathrm{min}}+1$. Розглянемо приклад додавання коду $c_{k-1}\cdot\sum_{j=n-1-dZ}^{n-1} w^i + c_{k-1}\cdot\sum_{j=0}^{n-1-dZ-dS\max_{\min}} w^i$ та коду $c_{k-1}\cdot\sum_{j=0}^{n-1-dZ-dS\max_{\min}} w^i$ при довжині перенесення $d=dZ+dS\mathrm{max}_{\mathrm{min}}$. У процесі порозрядного додавання цих кодів, починаючи зі старших розрядів, на кроках від 1-го до (dZ+$dS\mathrm{max}_{\mathrm{min}}$)-го умова FAL-перетворення не виконується. На (dZ+$dS\mathrm{max}_{\mathrm{min}}$+1)-му кроці порозрядного додавання відбувається перенесення у (n–dZ–2)-й розряд, що не менше c_{k-1} за умовою визначення $dS\mathrm{max}_{\mathrm{min}}$. Оскільки довжина перенесення у старші розряди $d=dZ+dS\mathrm{max}_{\mathrm{min}}$, то на ($dZ$+$dS\mathrm{max}_{\mathrm{min}}$+1)-му кроці FAL_{n-1}-перетворення вже не може бути виконано, а умова FAL_{n-2}-перетворення ще не виконується. Тому (n–dZ–2)-й розряд суми матиме максимальне значення c_{k-1}. На кожному наступному кроці порозрядного додавання подібним чином буде утворюватись максимальне значення c_{k-1} чергового розряду суми. Тому, враховуючи тільки перенесення у старші розряди, всі отримані розряди суми матимуть максимальні значення c_{k-1}. При p>0 перенесення, що виникає в результаті додавання окремих розрядів, надходить як у старші, так і у молодші розряди. Тобто, перенесення у молодші розряди що виникає на (dZ+$dS\mathrm{max}_{\mathrm{min}}$+1)-му кроці потрібно додавати на більш пізніх кроках. Оскільки без врахування перенесення у молодші розряди утворюється код суми з максимальними цифрами, то його врахування у деякому розряді викличе переповнення цього розряду. Це переповнення не можна ліквідувати за рахунок перенесення у старші розряди тому, що вони також мають максимальне значення. Також, це переповнення не можна ліквідувати за рахунок перенесення у молодші розряди через те, що у кожному з них на наступних тактах виникатиме аналогічне переповнення. Тобто, у цьому прикладі порозрядного додавання кодів виникає переповнення, яке не може бути ліквідоване при довжині перенесення у старші розряди $d<dZ+dS\mathrm{max}_{\mathrm{min}}+H[p]$. Отже, для випадку p>0 права частина твердження також доведена. Таким чином, права частина виразу (6) доведена.

Для доведення справедливості лівої частини виразу (6) доведемо, що твердження справедливе при $d=dZ+dS\mathrm{max}_{\mathrm{max}}+\tau+2$. Тобто, на кожному i-му такті порозрядного додавання максимальне значення проміжного результату $T\mathrm{max}_i$ не більше від максимально допустимого значення коду у розрядах проміжного результату на цьому такті $TMAX_i$:

$$T\max_i \le TMAX_i \qquad (7)$$

де $TMAX_i$ визначається з виразу

$$w^{n-i+d} - w^{n-i-b-1} \le (TMAX_i)_{n-i-b-1}^{b+d} < w^{n-i+d}\,. \qquad (8)$$

TMAX є найбільшим кодом, що не дає перенесення при виконанні FAL-перетворення. Тобто, одиниця будь-якого розряду має значення більше від коду у молодших розрядах:

$$\underset{0<j<d}{\forall}\ ((TMAX_i)_{n-i-b-1+j}^{0} > (TMAX_i)_{n-i-b-1}^{j-1}).$$

Виконання умови (7) буде доводитись методом повної математичної індукції за номером такту *i*. Доведемо спочатку справедливість цього виразу для i=0. При i=0 значення $T\max_i = S\max_i$, тому вираз (7) матиме вигляд $S\max_i \le TMAX_i$. Ця умова виконується, оскільки розрядність $TMAX_i$ більша ніж розрядність $S\max_i$, що випливає з визначення значення $TMAX_i$ (8) та $S\max_i$ (2.7). Отже, для 0-го такту ліва частина виразу (6) доведена.

Далі, вважаючи, що ліва частина виразу (6) вірна для такту з номером (i–1), доведемо що вона вірна для i-го такту. Якщо ліва частина виразу вірна для (i–1)-го такту, то проміжний результат $T\max_{i-1}$ не більший від максимально допустимого значення коду у розрядах проміжного результату на (i-1)-му такті $TMAX_{i-1}$. Припустимо, що $T\max_i = TMAX_{i-1}$. Тоді максимальне значення проміжного результату $T\max_i$ на i-му такті буде при додаванні максимальної розрядної суми $S\max_i$ до $TMAX_{i-1}$. На i-му такті максимальне значення розрядної суми

$$S\max_i < w^{n-i+dS\max_{\max}}, \tag{9}$$

що випливає з (2.8). Тому потрібно довести, що

$$T\max_i = TMAX_{i-1} + S\max_i - (TMAX_{i-1})_{n-i-1+d}^{0} \le TMAX_i$$

Для доведення розглянемо код $TMAX_{i-1}$ на (i-1)-му такті. Розряди цього коду матимуть такі значення:

$$(TMAX_{i-1})_{n-i+dS\max_{\max}+\tau+1}^{dZ-1} = \sum_{j=0}^{dZ-1} c_{k-1} \cdot w^{n-i+dS\max_{\max}+\tau+1+j};$$

$$(TMAX_{i-1})_{n-i+dS\max_{\max}+\tau+1}^{0} \le r_{\tau(p-dZ)} \cdot w^{n-i+dS\max_{\max}+\tau+1} <$$
$$< c_{k-1} \cdot w^{n-i+dS\max_{\max}+\tau+1}; \tag{10}$$

$$(TMAX_{i-1})_{n-i-b}^{b+dS\max_{\max}} < w^{n-i+dS\max_{\max}+1} < w^{n-i+dS\max_{\max}+\tau};$$

$$(TMAX_{i-1})_{n-i-b}^{b+dS\max_{\max}-1} < w^{n-+dS\max_{\max}}. \tag{11}$$

Оскільки $p \ge 0$, то можливі два випадки: перший, при якому $p>0$ і другий, при якому $p=0$. У першому випадку на (i–1)-му такті

$$(TMAX_{i-1})_{n-i+dS\max_{\max}+\tau}^{0} = r_{\tau p} \cdot w^{n-i-dS\max_{\max}+\tau}; \tag{12}$$

$$(TMAX_{i-1})_{n-i+dS\max_{\max}}^{0} \le r_{\tau(p-1)} \cdot w^{n-i+dS\max_{\max}}. \tag{13}$$

У другому випадку значення будь-якого розряду $TMAX_{i-1}$ дорівнює $r_{\tau p}$-1:

$$\underset{b-1 \le j \le dS\max_{\max}+\tau}{\forall} ((TMAX_{i-1})_{n-i+j}^{0} = (r_{\tau p}-1) \cdot w^{n-i-j}). \tag{14}$$

У кожному з цих випадків на і-му такті до $TMAX_{i-1}$ додається i-й розрядний результат $S\max_i$. З (9) і (11) випливає, що

$$(TMAX_{i-1})_{n-i-b}^{b+dS\max_{\max}-1} + S\max_i < 2 \cdot w^{n-i+dS\max_{\max}}. \tag{15}$$

При цьому може виникнути перенесення у старші розряди. Оскільки значення розряду проміжного результату $TMAX_{i-1}$ з номером (n-i+$dS\max_{\max}$+τ) менше, ніж c_{k-1}, то у цей розряд може бути виконане FAL-перетворення

$$FAL((TMAX_{i-1})_{n-i-b}^{b+dS\max_{\max}+\tau} + S\max_i)_{n-i-b-1}^{b+dS\max_{\max}}. \tag{16}$$

Це перетворення додає до (n-i+dSmax$_{max}$ + τ+1)-го розряду і віднімає від розрядів з (n–i–b)-го по (n-i+dSmax$_{max}$+ τ)-й значення, що дорівнює одиниці (n-i+dSmax$_{max}$+ τ+1)-го розряду. Додавання одиниці до цього розряду не викликає його переповнення внаслідок (10). Тому не виникає потреба подальшого перенесення у старші від нього розряди. При виконанні FAL-перетворення (7) від (n-i+dSmax$_{max}$+ τ)-го розряду віднімається значення $r_{\tau p}$. Тому з (12) випливає, що значення цього розряду стає нульовим. Доведемо, що перенесення з молодших розрядів не збільшить його значення. Для цього знову розглянемо окремо два випадки p>0 та p=0. Для p>0 при виконанні FAL-перетворення (16) від (n-i+dSmax$_{max}$)-го розряду віднімається значення $r_{\tau p\text{-}1}$. З (13) випливає, що без врахування перенесення з молодших розрядів, значення (n-i+dSmax$_{max}$)-го розряду стає нульовим. З (15) випливає, що перенесення у цей розряд не більше одиниці. При формуванні одиниці перенесення у (n-i+dSmax$_{max}$)-й розряд від суми $(TMAX_{i-1})_{n-i-b-1}^{b+dS\max_{\max}} + S\max_i$ віднімається значення $w^{n-i+dS\max_{\max}}$. З (11) випливає, що це призводить до зменшення коду $(TMAX_{i-1})_{n-i-b-1}^{b+dS\max_{\max}}$

$$:(FAL(TMAX_{i-1}+S\max_i))_{n-i-b-1}^{b+dS\max_{\max}} < (TMAX_{i-1})_{n-i-b-1}^{b+dS\max_{\max}}.$$

Оскільки $r_{\tau p\text{-}1}\geq 1$, то

$$(FAL(TMAX_{i-1}+S\max_i))_{n-i-b-1}^{b+dS\max_{\max}+1} < (TMAX_{i-1})_{n-i-b-1}^{b+dS\max_{\max}+1},$$

або

$$(FAL(TMAX_{i-1}+S\max_i))_{n-i-b-1}^{b+dS\max_{\max}+1} < w^{n-i+dS\max_{\max}+\tau}.$$

Тобто, перенесення у (n-i+dSmax$_{max}$+ τ)-й розряд з молодших розрядів не виникає. Тому на i-му такті максимальний проміжний результат Tmax$_i$ у розрядах з (n-i-b)-го по (n-i+dSmax$_{max}$+ τ+dZ)-й менший від значення максимально можливого коду у цих розрядах: $T\max_i < TMAX_i$.

Для випадку p>0 ліва частина твердження доведена.

У випадку p=0 виконується $r_{\tau p}$>1 і τ=0. З (14) випливає, що

$$(TMAX_{i-1})_{n-i+dS\max_{\max}}^{0} = (r_{\tau p}-1)\cdot w^{n-i+dS\max_{\max}} <$$
$$< c_{k-1}\cdot w^{n-i+dS\max_{\max}}.$$

При виконанні FAL-перетворення у (n-i+dSmax$_{max}$+1)-й розряд від (n-i+dSmax$_{max}$)-го розряду віднімається значення $r_{\tau p}$.

Оскільки $(TMAX_{i-1})_{n-i-b}^{b+dS\max_{\max}} < w^{n-i+dS\max_{\max}}$ і $S\max_i < w^{n-i+dS\max_{\max}}$, то

$$(TMAX_{i-1})_{n-i-b}^{b+dS\max_{\max}} + S\max_i < 2\cdot w^{n-i+dS\max_{\max}}.$$

Це означає, що при FAL-перетворенні коду суми Tmax$_{i-1}$+Smax$_i$ перенесення з молодших розрядів у (n-i+dSmax$_{max}$)-й розряд проміжного результату буде не більшим одиниці цього розряду. Додавання одиниці перенесення у (n-i+dSmax$_{max}$+1)-й розряд за допомогою FAL-перетворення призведе до обнулення (n-i+dSmax$_{max}$)-го розряду через віднімання від нього значення $r_{\tau p}$.Тому у цьому випадку максимальне значення проміжного результату Tmax$_i$<$TMAX_i$. Тобто, для випадку p=0 ліва частина виразу (6) теж доведена. Таким чином, твердження, що визначає максимальну довжину перенесення при додаванні в АМ-системах числення у залежності від параметрів адитивних співвідношень, доведено.

Використовуючи доведене твердження, можна порівнювати між собою різні АМ-системи числення за довжиною перенесення при порозрядному потоковому додаванні. У свою чергу, довжина перенесення визначає кількість розрядів, які потрібно при цьому обробляти паралельно, тобто розрядність порозрядного суматора. Від розрядності суматора прямо пропорційно залежать витрати обладнання на його реалізацію. Порозрядне потокове віднімання виконується аналогічним чином і тому довжина запозичення при ньому визначається аналогічно. Всі інші порозрядні потокові арифметичні операції основані на додаванні і відніманні. Тому оцінювання довжини перенесення при порозрядному потоковому додаванні дозволяє порівнювати між собою системи числення за витратами обладнання при організації арифметичних операцій і визначати ті з них, що забезпечують найменші витрати на реалізацію конвеєрної порозрядної обробки послідовних кодів.

Висновки

1. Описано клас систем числення з адитивними і мультиплікативними співвідношеннями певного типу між вагами розрядів (АМ-систем числення), в яких можливе порозрядне потокове виконання всіх арифметичних операцій, починаючи зі старших розрядів.
2. Запропоновано новий тип умовних числових операцій – адитивні перетворення, які полягають у додаванні і відніманні однакових числових значень від різних частин коду (А-перетворення) та проведено класифікаціюцих перетворень.
3. Описано порозрядне потокове додавання в АМ-системах числення основане на операціях адитивного перетворення, що відіграють роль перенесення.
4. Теоретично доведено, що на кожному такті порозрядного потокового додавання послідовних кодів в АМ-системах числення, починаючи зі старших розрядів, довжина перенесення у старші і молодші розряди обмежена виразами, значення яких залежить від параметрів адитивного співвідношення.

Отримані вирази для максимальної довжини перенесення при додаванні можуть в подальшому використовуватись для порівняння апаратних витрат при розробці порозрядних потокових пристроїв в різних АМ-системах числення, а також для визначення АМ-системи числення, що дозволяє отримати найменші апаратні витрати.

Список літератури

1. Avizenis A. Binary-compatible signet-digit arithmetic. IN: AFIPS Conf Proc. – Vol. 26 – P1. – 1964 – P.663.
2. Ch. Frougny, On-line finite automata for addition in some numeration systems. Theoretical Informatics and Applications 33 (1999), 79–101.
3. Методы вычисления некоторых функций при поразрядном вводе и выводе информации / В. И. Жабин, В. И. Корнейчук, В. П. Тарасенко // Известия вузов : Приборостроение. – 1978. – № 2. – С. 64–69.
4. Rettberg A. A Fully Self-Timed Bit-Serial Pipeline Architecture for Embedded Systems [Електронний ресурс] / A. Rettberg, M. Zanella, C. Bobda, T. Lehmann // – 2003. – Режим доступу до мат. : http://citeseerx.ist. psu.edu/viewdoc/summary?doi=10.1.1.6.392 3.
5. Системи числення з адитивними та мультиплікативними співвідношеннями між вагами розрядів / О.Д.Азаров, О.І.Черняк, П.О.Черняк // Вісник ВПІ. – 2001. - №1. – С. 58-64.
6. Рекурсивні алгоритми адитивних перетворень в АМ-системах числення / О. Д. Азаров, О. І. Черняк // Інформаційні технології та комп'ютерна інженерія. – 2010. – № 2 (18). – С. 32–37. – ISSN 1999-9941.

Статтю подано до редакції 28.02.2014