УДК 519.8

РОЗВ'ЯЗАННЯ ЦІЛОЧИСЕЛЬНОЇ ЗАДАЧІ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ МЕТОДОМ ГОМОРІ З ДОПОМОГОЮ MS EXCEL

Листопад В.В.
Академія праці та соціальних відносин ФПУ, Україна

Пошуки шляхів розв'язання проблеми раціонального використання природних виробничих ресурсів у народному господарстві, проблеми оптимального управління виробничо-технологічними, економічними, соціальними та екологічними процесами сприяли інтенсивному розвитку математичної теорії екстремальних задач.

Деякі раціональні методи розв'язання таких задач з допомогою ІКТ представлені в роботах [1] та [2]. В цій роботі розглянемо реалізацію одного із багатьох цілочисельних методів, а саме методу Гоморі з допомогою електронних таблиць Ms Excel.

Багато задач лінійного програмування повинні мати розв'язок тільки в цілих числах (наприклад: кількість випущеної продукції, задача оптимального розкрою матеріалу, кількість станків в цеху, кількість тварин на сільськогосподарських підприємствах, календарне планування роботи підприємства, розміщення підприємств тощо).

Задача математичного програмування, змінні якої повинні набувати тільки цілих значень, називається цілочисельною задачею лінійного програмування. Умова цілочисельності значно ускладнює процес розв'язування екстремальної задачі.

Розглянемо задачу цілочисельного лінійного програмування в загальному вигляді [3].

Знайти $F=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to max$ (1) при обмеженнях $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j=b_i, i=\overline{1,m}$ (2) $x\geq 0, j=\overline{1,n}$ (3) де x_j - цілі числа, $j=\overline{1,n}$ (4).

Знаходження розв'язку задачі (1) – (4) методом Гоморі починаємо з визначення за допомогою симплекс-методу оптимального плану задачі (1) – (3) без урахування умови (4). Після знаходження плану проглядаємо його компоненти. Якщо серед них немає дробових, то знайдений план є оптимальним. У випадку наявності дробових значень серед розв'язків, наприклад приймає раціональне значення, то до системи обмежень (2) добавляємо нерівність $\sum_j \{a^*_{ij}\}x_j \geq b^*_i$ (5),в якій операція знаходження дробової частини числа застосовується до нерівності, що відповідає найбільшій дробовій частині компоненти отриманого розв'язку. В нерівності (5) a^*_{ij} та b^*_i - це перетворені в результаті знаходження розв'язку задачі $(1-3)$ початкові величини a_{ij} та b_i, а $\{a^*_{ij}\},\{b^*_i\}$ - це дробові частини чисел. Нагадаємо, що цілою частиною числа $\tilde{o}$ (позначається $[\tilde{o}]$) називається найбільше ціле число, яке не перевищує $\tilde{o}$, а дробовою частиною – $\{\tilde{o}\}=\tilde{o}-[\tilde{o}]$. Потім знаходять розв'язки задачі (1- 5). Якщо в отриманому плані змінні знову приймають дробове значення, то додаємо ще одне додаткове обмеження і процес обчислення повторюємо. За скінчену кількість ітерацій отримуємо оптимальний розв'язок, або встановлюємо що задача немає розв'язку.

Отже процес знаходження оптимального плану задачі цілочисельного лінійного програмування за методом Гоморі включає такі етапи:

1. Використовуючи симплекс-метод знаходимо розв'язок задачі (1 - 4) без урахування умови цілочисельності змінних.
2. Складаємо додаткове обмеження для змінної, яка в оптимальному плані задачі (1 - 3) має максимальне дробове значення, а в оптимальному плані задачі (1 - 4) має бути цілочисельною.
3. Використовуючи двоїстий симплекс-метод, знаходять розв'язок задачі (1 - 5) в результаті приєднання додаткової змінної.
4. Якщо є необхідність, то складаємо ще одне додаткове обмеження та продовжуємо ітераційний процес до отримання оптимального цілочисельного розв'язку, або встановлення нерозв'язності задачі.

Зауваження 1. Задачі на дві змінні можна також розв'язувати графічно.

Зауваження 2. При обчисленні дробової частини числа в Ms Excel будемо користуватися означенням та функцією ЦЕЛОЕ.

Приклад. Знайти $F=x_1+4x_2\to max$ при обмеженнях

$$\begin{cases} 2x_1+x_2\leq 6\frac{1}{3} \\ x_1+3x_2\leq 4 \end{cases}$$

$x_1\geq 0, x_2\geq 0, x_1, x_2$ - цілі числа.

Розв'язання. Запишемо нашу задачу в канонічному вигляді. Для цього доповнимо кожну нерівність двома базисними змінними x_3 та x_4.

Отримаємо $F=x_1+4x_2\to max$

$$\begin{cases} 2x_1+x_2+x_3=6\frac{1}{3} \\ x_1+3x_2+x_4=4 \end{cases}$$

$$x_j\geq 0, x_j=\overline{1,4}, x_1, x_2 \in Z$$

Заповнимо першу таблицю та виконаємо перехід, користуючись симплекс-методом [2]. Отримаємо

A	B	C	D	E	F	G	H	I
1				1	4	0	0	θ_i
2	БАЗИС	$C_{баз}$	X_0	X_1	X_2	X_3	X_4	
3	X_3	0	6 1/3	2	1	1	0	6 1/3
4	← X_4	0	4	1	3	0	1	Min{1 1/3}
5			0	-1	↑-4	0	0	
6	X_3	0	5	1 2/3	0	1	- 1/3	
7	X_2	4	1 1/3	1/3	1	0	1/3	
8			5 1/3	1/3	0	0	1 1/3	

Оскільки всі елементи останньої строчки невід'ємні, то $F_{max} = 5\frac{1}{3}$, але компонента $_2 = 4/3$ не задовольняє умову цілочисельності. Згідно методу Гоморі, для змінної $_2$ складемо додаткове обмеження. Друга строчка останньої симплекс-таблиці дає рівняння $\frac{1}{3}x_1 + x_2 + 0 * x_3 + \frac{1}{3}x_4 = 1\frac{1}{3}$, звідки, користуючись (5) , отримаємо нерівність $\left\{\frac{1}{3}\right\} x_1 + \{1\}x_2 + \{0\}x_3 + \left\{\frac{1}{3}\right\} x_4 \geq \left\{1\frac{1}{3}\right\}$ або $\frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_4 \geq \frac{1}{3}$. Помноживши останню нерівність на 3, отримаємо $x_1 + x_4 \geq 1$.

Таким чином, обмеження нашої задачі будуть такими

$$\begin{cases} 1\frac{2}{3}x_1 + x_3 - \frac{1}{3}x_4 = 5 \\ x_1 + 3x_2 + x_4 = 4x_1 + x_4 \geq 1 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, x_j = \overline{1,4}, x_1, x_2 \in Z$$

Помножимо останню нерівність на (-1), введемо додаткову змінну $x_5 \geq 0$ та отримаємо систему обмежень , для якої застосуємо двоїстий симплекс-метод [1]. Всю вищеописану процедуру ми реалізуємо однією формулою D12=-(D11-ЦЕЛОЕ(D11))*3 та розповсюдимо її на всю строчку.

A	B	C	D	E	F	G	H	I
				1	4	0	0	0
9	БАЗИС	Сб	X0	X1	X2	X3	X4	X5
10	X3	0	5	1 2/3	0	1	- 1/3	0
11	X2	4	1 1/3	1/3	1	0	1/3	0
12	X5	0	-1→	-1	0	0	-1	1
13			5 1/3	↑ 1/3	0	0	1 1/3	0
14				1/3			1 1/3	0
15	X3	0	3 1/3	0	0	1	-2	1 2/3
16	X2	4	1	0	1	0	0	1/3
17	X1	1	1	1	0	0	1	-1
			5	0	0	0	1	1/3

Розв'язною строчкою буде третя, оскільки в ній $b_3^{(2)} = -1 < 0$. Розв'язний стовпець находимо із умови $min\left\{-\frac{\Delta_j}{a_{3j}^{(2)}}\right\}, a_{3j}^{(2)} < 0, j = \overline{1,5}$. Для нашого випадку $min\left\{-\frac{1/3}{-1}; -\frac{4/3}{-1}\right\} = \frac{1}{3}$ і розв'язним елементом буде $a_{31}^{(2)} = -1$ (E12=-1). Задаємо формули для елементів нової таблиці в стовпці D. D17=D12/$E$12, D16=($E$12*D11-$E$11*D12)/$E$12, D15=($E$12*D10-$E$10*D12)/$E$12. Нагадаємо, що елементи розв'язного стовпця в створюваних формулах фіксуються. Розповсюдимо формули на всю таблицю та закінчуємо обчислення в останній строчці (D18=СУММПРОИЗВ($C$15:$C$17;D15:D17)). Оскільки в останній строчці всі , то отриманий розв'язок Хопт=(1;1) є оптимальним та цілочисельним. При цьому $F_{max} = 5$.

Аналогічний результат можна отримати користуючись функцією «Поиск решения» в Ms Excel або програмою Mathcad, але вони не дають останньої таблиці, з допомогою якої можна проводити економічний аналіз (для задач економічного змісту), моделювати різні ситуації, прогнозувати, тощо.

Метод, запропонований в даній роботі, легко розповсюджується на будь-яку кількість змінних. Використання цього методу викладачами дає суттєву економію аудиторного часу та можливість швидко розробити багато варіантів завдань для перевірки знань студентів по темі «Задачі цілочисельного програмування».

Список використаних джерел:

1. 1. Листопад В.В. Реалізація двоїстого симплекс-методу для розв'язання екстремальних задач лінійного програмування з допомогою Microsoft Excel //Науковий часопис НПУ ім. М.П. Драгоманова. Серія №2. Комп'ютерно-орієнтовані системи навчання: Зб. наук. Праць / Редрада. - К.: НПУ імені М.П.Драгоманова, 2011. - №11(18). - с. 61-69.
2. 2. Листопад В.В. Решение задач линейного программирования с помощью Microsoft Excel// Инновационные технологии обучения физико-математическим дисциплинам: материалы III Междунар. науч.-практ. интернет-конф., г. Мозырь, 5-9 апр. 2011 г., /редкол.: В.В.Валетов (отв. ред.) [и др.]. –Мозырь :УО МГПУ им. И.П. Шамякина, 2011. - 304с.
3. Ващук Ф.Г., Лавер О.Г., Шумило Н.Я. Математичне програмування та елементи варіаційного числення: Навч. посібник. - К.: Знання, 2008. - 368с. - (Вища освіта XXI століття).