УДК 681.3.06

ПОБУДОВА ТА ЯКІСНЕ ДОСЛІДЖЕННЯ МОДЕЛІ У ВИГЛЯДІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ

Михалевич Володимир, Трач Євген, Чухно Михайло
Вінницький національний технічний університет, Україна

Анотація

Викладено методику якісного дослідження функцій, що задані диференціальним рівнянням (ДР) першого порядку, яке розв'язане відносно першої похідної. На прикладі показано один із важливих випадків застосування методики.

A method of qualitative research functions that set the differential equation (DE) the first order, which resolved regarding the first derivative. In the example shown in one of the important cases of application methods.

Введение

З елементами дослідження функцій методами математичного аналізу студенти знайомляться ще в старших класах загальноосвітніх шкіл під час вивчення теми «Похідна та її застосуваня». Більш розширено ця тема розглядається під час вивчення вищої математики студентами технічних вузів. Типовими задачами з указаної теми є дослідження графіків функцій, що задані їх аналітичними виразами у вигляді $y = f(x)$. Знання, уміння та навички, що здобуті студентами під час вивчення указаної теми використовуються і для дослідження розв'язків ДР. Але у випадках, коли математична модель досліджуваного явища формулюється у вигляді ДР, якісне вивчення моделі можна здійснити ще до отримання розв'язку цього рівняння.

У [1, 2] пропонується елементи якісного аналізу ДР, що ґрунтуються на геометричній теорії диференціальних рівнянь.

Ці елементи якісного аналізу особливо корисні у випадках, коли [1, 2]:

1. ДР не інтегрується в квадратурах;
2. ДР не інтегрується в елементарних функціях;
3. Загальний розв'язок ДР не може бути досліджений за звичною схемою через складність аналітичного виразу, що його подає.

На нашу думку, у цілому ряді випадків більш важливим є те, що методика повного дослідження функцій, заданих ДР, надає можливість розробки структури ДР, в якій закладено апостеріорні відомості про досліджувану модель.

Надалі розглянемо задачу розробки та аналізу повної схеми дослідження функцій, заданих диференціальним рівнянням першого порядку

$$y' = f(x, y):$$

В якості прикладу розглядатимемо задачу визначення граничного стану циліндричного зразка при вісесиметричному стиску плоскими плитами [3].

Для побудови апроксимацій між компонентами деформацій

$$\varepsilon_Z = g(\varepsilon_\varphi),$$

бічної поверхні циліндричних зразків при торцевому стисненні необхідно враховувати фізичні умови процесу деформування, які можна сформулювати тільки для диференціального рівняння типу (1).

До таких умов належать наступні:

- на початковому етапі торцевого стиснення, при $\varepsilon_\varphi = 0$ маємо просте стиснення
$$\frac{d\varepsilon_Z}{d\varepsilon_\varphi}\Big|_{\varepsilon_\varphi=0} = -2$$
- із збільшенням значення колової деформації ε_φ, в зв'язку із розвитком бочкоутворення бічної поверхні, відношення приростів осьової ε_Z та колової ε_φ деформацій збільшується (за абсолютною величиною зменшується), тобто
$$\frac{d\left(\frac{d\varepsilon_Z}{d\varepsilon_\phi}\right)}{d\varepsilon_\phi} = \frac{d^2\varepsilon_Z}{d\varepsilon_\phi^2} \geq 0$$
- під час необмеженого збільшення деформацій справджується рівність
$$\lim_{\varepsilon_\varphi\to\infty}\left(\frac{d\varepsilon_Z}{d\varepsilon_\varphi}\right) = -\frac{1}{2}$$
- умова мінімальної кількості параметрів, що визначаються експериментально;
- умова інтегруємості диференціального рівняння та мінімальної обчислювальної складності розв'язку задачі визначення граничних деформацій.

В даній роботі висунуто та перевірено гіпотезу про можливість врахування усіх сформульованих вимог із використанням структури ДР, що має наступний вигляд

$$\frac{d\varepsilon_Z}{d\varepsilon_\varphi} = g\left(\varepsilon_\varphi\right)$$

В даній роботі проведено якісний аналіз області визначення функції (2), яка подана ДР

$$d\varepsilon_Z = -\frac{d\varepsilon_\varphi}{2} - \frac{3}{2}\cdot\frac{d\varepsilon_\varphi}{1+n^2\varepsilon_\varphi^2}.$$

Показано, що область визначення функції $g(\varepsilon_\varphi)$ – множина всіх невід'ємних дійсних чисел: $D_1 \in [0,\infty)$. Дослідження "парності" ("непарності") виявило відсутність симетрії даної функції відносно координатних осей та початку координат.

Дослідження "парності" ("непарності") виявило відсутність симетрії даної функції відносно координатних осей та початку координат.

Виявлено, що досліджувана функція не періодична, оскільки рівняння змінює вигляд при заміні x на $x+T$, де $T \in R$[1]:

$$f(\varepsilon_\varphi + T) = -\frac{1}{2} - \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{1+n^2(\varepsilon_\varphi+T)^2} = -\frac{1}{2} - \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{1+n^2\varepsilon_\varphi^2+n^2\varepsilon_\varphi T+n^2T^2} \neq f(\varepsilon_\varphi)$$

Як би функція була періодична, то рівняння $y' = f(x,y)$ мало б періодичні розв'язки з довільним періодом C.

Знаходження похилої асимптоти $k_0 = \lim_{\varepsilon_\varphi\to\infty} f(\varepsilon_\varphi) = \lim_{\varepsilon_\varphi\to\infty}\left(-\frac{1}{2} - \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{1+n^2\varepsilon_\varphi^2}\right) = -\frac{1}{2}$; коефіцієнт b_0 визначається з рівняння $b_0 = \lim_{\varepsilon_\varphi\to\infty}\left(f(\varepsilon_\varphi) - k_0\varepsilon_\varphi\right) = \lim_{\varepsilon_\varphi\to\infty}\left(-\frac{1}{2} - \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{1+n^2\varepsilon_\varphi^2} + \frac{1}{2}\varepsilon_\varphi\right) = 0$;виявило, що досліджувана функція має похилу асимптоту $\varepsilon_z = -\frac{1}{2}\varepsilon_\varphi$.

При дослідженні другої похідної по та по , в нашому випадку:

$$f'(\varepsilon_z)_{\varepsilon_z} = 0;$$

$$f'(\varepsilon_z)_{\varepsilon_z} = \left(-\frac{1}{2} - \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{1+n^2\varepsilon_\varphi^2}\right)' = \frac{3}{2}\cdot\frac{\left(1+n^2\varepsilon_\varphi^2\right)'}{\left(1+n^2\varepsilon_\varphi^2\right)^2}\left(1+n^2\varepsilon_\varphi^2\right)' = \frac{3}{2}\cdot\frac{2n^2\varepsilon_\varphi}{\left(1+n^2\varepsilon_\varphi^2\right)^2}\cdot 2n^2\varepsilon_\varphi = \frac{12n^4\varepsilon_\varphi^2}{\left(4+4n^2\varepsilon_\varphi^2\right)^2}.$$

$$f'(x)_x \cdot \Rightarrow f'(\varepsilon_\varphi)_{\varepsilon_\varphi} = \frac{12n^4\varepsilon_\varphi^2}{\left(4+4n^2\varepsilon_\varphi^2\right)^2} > 0.$$

було зроблено висновок про те, що функція увігнута на всьому проміжку монотонного зростання $\varepsilon_\varphi \in [0;\infty)$.

Перетворивши функцію до вигляду ДР з відокремленими змінними: $d\varepsilon_z = -\frac{d\varepsilon_\varphi}{2} - \frac{3}{2}\cdot\frac{d\varepsilon_\varphi}{1+n^2\varepsilon_\varphi^2}$ було зроблено висновок про те, що дане рівняння не має очевидних розв'язків, таких, які перетворюють рівняння в невизначеність, та про відсутність особливих розв'язків.

Запропонована схема дослідження функцій, заданих звичайними диференціальними рівняннями першого порядку, розв'язаними відносно похідної, дає можливість досить повно вивчити поведінку їх інтегральних кривих, і, отже, – дослідити на якісному рівні модельований такими рівняннями процес.

Список использованных источников:

1. Лила Д. М. Функції задані диференціальними рівняннями / Лила Дмитро Макарович // Теорія та методика навчання математики, фізики, інформатики : Збірник наукових праць. – Випуск 4 : В 3-х томах. Т. 1: Теорія та методика навчання математики. – Кривий Ріг : Видавничий відділ НМетАУ, 2004. – С 115-119.
2. Амелькин В. В. Дифференциальные уравнения в приложени-ях . – М .: Наука, 1987.
3. Mikhalevich V. M. Modeling of plastic deformation in a cylindrical specimen under edge compression / V. M. Mikhalevich, A. A. Lebedev, Yu Dobranyuk // Strength of Materials. – 2011, Vol. 43, No. 6. (1 October 2011), pp. 591-603.