УДК 519.711.3; 519.711; 336.71

Лужецький В.А., Азарова А.О.

Розробка структурних моделей та алгоритмів формалізації багатоешелонної СППР

З початку 70-х років почали інтенсивно веститися роботи щодо автоматизованої підтримки прийняття управлінських рішень, в результаті чого складені та успішно використовуються нові людино-машинні системи-СППР. За кордоном ці системи відомі під назвою Decision Support Systems [1].

Інтерес до СППР як до перспективної галузі застосування обчислювальної техніки та як до інструментарія підвищення ефективності праці у сфері керування все більш зростає. Розробка та реалізація СППР перетворилася за короном у швидкорозвинуту галузь бізнесу.

В даній статті розглядається розв'язування задач визначення належ-ності об'єкта (в подальшому - елемента o_m, $O=\{o_m\}, m=\overline{1,M}$), відносно якого приймається рішення, до відповідної підмножини O_j, $j=\overline{1,S}$.

СППР, що реалізує дану задачу, має узагальнену структурну модель, що зображена на рис.1. Ця СППР складається з трьох ешелонів.

На **першому ешелоні** оцінюється інформація про кожний елемент o_m з множини O, $O=\{o_m\}, m=\overline{1,M}$. Множина X вхідних оцінювальних параметрів x_i, $i=\overline{1,n}$, яка є однаковою для кожного з розглядаємих елементів o_m повинна бути сформованою за умовами повноти, дійовості, мінімальності. На цьому ешелоні обчислюються значення оцінювальних параметрів кожного елемента за певними методиками.

На **другому ешелоні** у відповідності з певними критеріями d_j, $j=\overline{1,S}$ розглядається кожний з елементів o_m. На цьому ешелоні кожний з елемен - тів відноситься до відповідної підмножини O_j, виходячи із сформованих критеріїв d_j. Таким шляхом формуються підмножини O_j.

На **третьому ешелоні** будь-яка із сформованих підмножин може оптимізуватися, критерієм оптимальності слід вважати мінімізацію ризику при бажаному рівні переваг, вигід (прибутку). Інакше кажучи, необхідно знайти таке співвідношення елементів o_m у підмножині O_j, щодо якого буде мінімальний ризик при бажаному рівні переваг.

Розглянемо загальний алгоритм формалізації такої СППР.

Крок 1. Визначити кількість S підмножин O_j, $j=\overline{1,S}$, на які поділяється множина O={o_m} елементів o_m, $m=\overline{1,M}$.

Крок 2. Сформувати критерії d_j віднесення елемента o_m до O_j підмножини.

Крок 3. Розглянути кожний елемент o_m множини O відносно критеріїв d_j.

Крок 4. Віднести кожний елемент o_m множини O до відповідної підмножини O_j.

Крок 5. Оптимізація елементів підмножини O_j.

Розглянемо цей алгоритм більш ретельно.

На першому кроці здійснюється вибір кількості S підмножин O_j, виходячи із специфіки конкретної задачі. Наприклад, в галузі фінансового менеджменту при наданні кредиту можливо 5 варіантів рішень. Тоді відносно позичальників кредиту o_m можливо прийняти S=5 рішень.

Визначимо послідовність дій, які необхідно здійснити на **другому кроці** алгоритму.

Неможливість використання відомих критеріїв [2, 3] вимагає введення іншого критерію. В цьому випадку цей критерій буде складатися з двох частин: перша - належність значення оцінювального параметру деякому діапазону його змінення; друга - степінь впливу цього параметру на прийняття відповідного рішення.

Нехай кожний елемент o_m з множини O характеризується деякими параметрами x_i, $i=\overline{1,n}$. Необхідно визначити діапазон змінення $\left[x_{i\min}; x_{i\max}\right]_j$ цих параметрів відповідно до критеріїв d_j, $j=\overline{1,S}$. Критерії d_j

повинні дозволяти однозначно віднести елемент o_m до однієї з підмножин O_j. Тобто

$$C = \sum_{j=1}^{S} C_j , \tag{1}$$

де C - потужність множини O, C_j- потужність підмножини O_j.

Належність значення параметру x_i діапазону $\left[x_{i\min}; x_{i\max}\right]_j$ характеризується логічною змінною y_i, значення якої знаходиться за таким правилом

$$y_i = \begin{cases} 0, & x_i \notin [x_{i\min}; x_{i\max}]_j \\ 1, & x_i \in [x_{i\min}; x_{i\max}]_j \end{cases} \tag{2}$$

Таким чином, значення параметрів x_i елементу o_m за критерієм d_j, $j = \overline{1,S}$ породжують вектор Y_{dj} =[$y_{1,j}$,...,$y_{n,j}$] логічних значень.

Степінь впливу кожного з оцінювальних параметрів враховується у функції вибору, яка складається для кожного d_j критерія окремо. В якості цієї функції пропонується використовувати логічну функцію, яку будемо у подальшому називати логічною функцією вибору F(y_1,...,y_n). Одиничне значення функції F(y_1,...,y_n) на векторі Y_{dj} свідчить про належність елемента o_m до підмножини O_j.

Розглянемо побудову логічної функції вибору F(y_1,...,y_n). Функція вибору може бути заданою у вигляді таблиці істиності, яка містить 2^n наборів значень змінних для будь-якого елементу o_m з множини O. Щоб з'ясувати значення функції, необхідно розглянути усі набори. Виходячи з того, що кількість символів у такій таблиці буде $n2^n$, то виникають труднощі при її побудові вже при n>5. Тому пропонується інший підхід, який зводиться до виконання таких дій.

Спочатку визначаються групи параметрів, що мають однаковий вплив на процес прийняття рішення щодо віднесення розглядаємого елементу o_m до відповідної підмножини O_j. Ця процедура найбільш професійно може бути виконана експертами у галузі, для якої складено СППР. В залежності від степеня впливу, кожній групі присвоюється відповідний ранг. Найбільш впливова група параметрів має ранг $r = 1$. Кількість R цих груп визначає кількість рангів. Розподілення параметрів x_i на групи породжує розбиття множини $Y=[y_1,...,y_n]$ на підмножини $Y_r = =\{y_{l,\,r}\}$, $l=\overline{1,p_r}$, де p_r - кількість логічних змінних r-го рангу.

Потім складається логічна функція вибору $F(y_1,...,y_n)$, виходячи з таких міркувань. Функція приймає одиничне значення, коли значення всіх логічних змінних 1-го рангу дорівнють одиниці або, коли значення всіх логічних змінних 1-го рангу, крім одної дорівнюють одиниці й усі змінні 2-го рангу мають одиничне значення; або, у свою чергу, одна з логічних змінних 2 рангу може мати нульове значення і т.д. У загальному випадку логічні змінні R-го рангу повинні дорівнювати одиниці, якщо одна з логічних змінних (R-1) рангу є нульовою.

Таким чином, функція вибору $F(y_1,...,y_n)$ має вигляд:

$$F(y_1,...,y_n) = f_1(f_2(...(f_i(...(f_{R-1}(f_R))...))...)), \tag{3}$$

де $$f_i = \bigwedge_{l=1}^{p_i} y_{l,i} \vee (\bigvee_{l=1}^{p_i-1} (y_{l,i}(\bigvee_{m=1}^{p_i-l} y_{l+m,i}), \quad (i=\overline{1,R-1})$$

та $$f_R = \bigwedge_{l=1}^{p_R} y_{l,R} \quad .$$

Вираз (3) є мінімальною формою. Але така форма не є зручною для практичного використання. Більш зручною є мінімальна диз'юнктивна нормальна форма. У зв'язку з цим певний інтерес викликає кількість простих імплікант, що містить така форма функції. Відповідь на це питання дає наступна теорема.

Теорема 1. Нехай R - кількість рангів змінних y_i , $i=\overline{1,n}$ логічної функції вибору $F(y_1,...,y_n)$. Нехай також p_r - кількість логічних змінних r-го рангу $(r=\overline{1,R})$. Тоді кількість q простих імплікант у мінімальній диз'юнктивній нормальній формі функції $F(y_1,...,y_n)$ дорівнює

$$q = 1 + \sum_{j=1}^{R-1}\left(\prod_{l=1}^{j} P_l\right) \tag{4}$$

Доведення. У функцію входить одна імпліканта, яка містить усі змінні 1-го рангу. До складу цієї функції належить також p_1 імплікант, у яких відсутньою є одна з логічних змінних 1-го рангу та присутніми - усі змінні 2-го рангу. Крім цього, ця функція містить імпліканти, в яких є відсутньою одна з логічних змінних 1-го рангу й одна з логічних змінних 2-го рангу, але присутні усі змінні 3-го рангу. Кількість таких імплікант відповідно буде p_1p_2 . Також до цієї функції належать імпліканти, в яких є відсутньою одна із змінних 1-го рангу, одна із змінних 2-го рангу, одна з 3-го рангу та присутніми усі змінні 4-го рангу. Кількість таких імплікант дорівнює $p_1p_2p_3$.

Розмірковуючи таким чином, ми визначимо, що у загальному випадку у функції містяться імпліканти, в яких є відсутніми одна із логічних змінних 1-го рангу, 2-го рангу, ... (R-1)-го рангу та присутніми- усі змінні R-го рангу. Кількість таких імплікант дорівнює $p_1p_2...p_{R-1}$.

Підсумувавши кількість усіх перелічених імплікант, отримаємо (4), що й необхідно було довести.

Практичне використання МДНФ функції $F(y_1,...,y_n)$ для великих кількостей елементів o_m та критеріїв d_j викликає певні труднощі. Наприклад, для n=20, R=5, p_1=6, p_2=5, p_3=4, p_4=3, p_5=2, використовуючи (4), отримаємо 517 простих імплікант у МДНФ цієї функції. Якщо кількість елементів o_m дорівнює 20, а кількість S критеріїв d_j дорівнює 10, то необхідно обробити понад 100 000 простих імплікант.

Тому для спрощення процедури прийняття рішення пропонується використовувати порогову функцію виду

$$H(y_1,...,y_n) = \sum_{i=1}^{n} w_i y_i \,, \tag{5}$$

де w_i - ваги елементу y_i , $i = \overline{1,n}$. Якщо $H(y_1,...,y_n) \geq T$, де T - поріг, то вектор значень Y_{dj} задовільняє критерію d_j. У протилежному випадку задовільняє іншому критерію. Використання (5) при наведених вище умовах дозволяє спростити кількість обчислень майже у 500 разів.

Відповідно [4] для переходу від логічної функції вибору $F(y_1,...,y_n)$ до порогової $H(y_1,...,y_n)$ необхідно виконати такі дії:

Крок 2.1 Отримати МДНФ інверсної функції $\overline{F}(y_1,...,y_n)$, використовуючи закон де Моргана та відомі правила поглинання й склеювання.

Крок 2.2 Обчислити характеристичні параметри h_i для усіх y_i . Характеристичним параметром [4] h_i логічної змінної y_i є кількість імплікант СДНФ функції $F(y_1,...,y_n)$ із (одиничною) змінною y_i , на яких вона приймає одиничне значення.

Теорема. Нехай t- кількість іпмлікант МДНФ функції $F(y_1,...,y_n)$, b - кількість імплікант, які містять змінну y_i, а k - кількість інших змінних ($k = \overline{1,n-1}$), що входять у ці імпліканти. Нехай також інші імпліканти (t-b), які не містять y_i, мають $g = \overline{1,n-1}$ логічних змінних. Тоді характеристичний параметр h_i змінної y_i дорівнює

$$h_i = \sum_{l=1}^{b} 2^{n-k_l-1} + \sum_{j=1}^{t-b} 2^{n-g_j-1} \tag{6}$$

Доведення. Якщо l-та імпліканта МДНФ функції $F(y_1,...,y_n)$ містить змінну y_i та ще k_l інших змінних, то, виходячи з відомих правил мінімізації [4-7] логічних функцій, вона отримана в результаті мінімізації сукупності 2^{n-k_l-1} імплікант СДНФ функції $F(y_1,...,y_n)$. Тоді усі імпліканти, які містять змінну y_i отримуються при мінімізації $\sum_{l=1}^{b} 2^{n-k_l-1}$ імплікант СДНФ. Якщо j-та імпліканта МДНФ містить g_j змінних й не містить змінної y_i , то вона отримана при мінімізації 2^{n-g_j-1} імплікант СДНФ. Сукупність (t-b) імплікант такого типу отримується при мінімізації $\sum_{j=1}^{t-b} 2^{n-g_j-1}$ дорівнює $\sum_{l=1}^{b} 2^{n-k_l-1} + \sum_{j=1}^{t-b} 2^{n-g_j-1}$, тобто характеристичний параметр обчислюється за формулою (6), що й необхідно було довести.

Крок 2.3. Визначити співвідношення між вагами w_i логічних змінних y_i, $i=\overline{1,n}$ за правилом:
$$\begin{cases} \text{якщо } h_i(F) > h_j(F), \text{ то } w_i > w_j, \\ \text{якщо } h_i(F) = h_j(F), \text{ то } w_i = w_j. \end{cases} \tag{7}$$

Крок 2.2 є допоміжним для кроку 2.3, щоб визначити співвідношення між вагами w_i. Однак ці два кроки можна вилучити, враховуючи особливість розв'язуємої задачі. Співвідношення між вагами w_i логічних змінних y_i фактично були встановлені при ранжуванні y_i. Нехай змінна $y_{l,r}$ має вагу $w_{l,r}$, тоді для змінних одного рангу $y_{1,r}, y_{2,r},..., y_{p_r,r}$ ваги будуть однакові
$$w_{1,r} = w_{2,r} =...= w_{p_r,r}. \tag{8}$$
А ваги змінних r-го рангу більші за ваги змінних (r+i) - го, $i=\overline{1,R-r}$,
$$w_{l,r} > w_{j,r+i},\ l=\overline{1,p_r},\ j=\overline{1,p_{r+i}},\ \forall l,j. \tag{9}$$
Але ці співвідношення (8) та (9) можна записати у вигляді рівності
$$w_{l,r} = w_{S,R} + \sum_{i=1}^{R-r}\delta_i,\ \ S=\overline{1,p_R} \tag{10}$$
де δ_i - цілі позитивні числа, які є більшими за нуль. Однак для визначеності вважаємо S=1, тобто береться за базову вага першої змінної R-го рангу.

Таким чином, виключення цих кроків значно спрощує алгоритм переходу від логічної функції вибору $F(y_1,...,y_n)$ до порогової $H(y_1,...,y_n)$.

Крок 2.4 Скласти систему нерівностей для вагів змінних.

Ця система має дві складові частини. Перша будується на основі функції $F(y_1,...,y_n)$. Кожна з імплікант функції $F(y_1,...,y_n)$ утворює нерівність.

Нехай імпліканта має вигляд $y_{k1}y_{k2}...y_{kr}$. Кожна логічна змінна має відповідну вагу $y_{ki} \rightarrow w_{ki}$. Тоді така імпліканта буде породжувати нерівність $w_{k1} + w_{k2} + ... + w_{kr} \geq T$.

Друга частина системи будується на основі імплікант функції $\overline{F}(y_1,...,y_n)$. При цьому для імпліканти $y_{l1}y_{l2}...y_{lS}$ маємо нерівність
$$w_{m1} + w_{m2} + ... + w_{mt} < T,$$
де $m_1, m_2, ..., m_t$ - індекси змінних, що не входять до розглядаємої імпліканти.

Крок 2.5. Спростити систему нерівностей.

Спрощення здійснюється з урахуванням співвідношення між вагами w_i, що отримані на кроці 2.3. Наприклад, співвідношення між вагами змінних такі $w_1 < w_2 = w_3 < w_4 < w_5$ і система містить такі нерівності:

$$\begin{cases} w_1 + w_2 + w_4 + w_5 \geq T, \\ w_1 + w_3 + w_4 + w_5 \geq T \end{cases}.$$

Тоді ці дві нерівності еквівалентні й у подальшому використовують лише одну з них.

Крок 2.6 Переписати скорочену систему нерівностей, що отримана на кроці 2.5 з урахуванням (10).

Крок 2.7 Визначити таку величину порогу T й такі значення w_i , що задовільняють системі нерівностей, яка отримана на кроці 5 та дають мінімум лінійної форми

$$R = T + \sum_{i=1}^{n} w_i \ .$$

Необхідно зауважити, що після побудови порогових функцій вибору для всіх критеріїв може виникнути ситуація, коли вони не будуть забезпечувати віднесення елемента O_m до O_j підмножини. Тобто вираз (1) не буде справедливим в цьому випадку. Це є наслідком того, що експерти не можуть передбачити всі можливі варіанти віднесення елементів до відповідних підмножин і, крім того, на практиці не розглядали функціонально незмістовні елементи.

Але існування цих елементів є теоретично можливим. Щоб врахувати вищеперелічені факти пропонується таке. Якщо $H_{d_j} < T_{d_j}$ для усіх j, $j = \overline{1,S}$ тоді елемент буде належати до підмножини O_k ($O_k \in O$), якщо:

1. $\delta_к = \max \left\{\delta_j\right\}$, ($j = \overline{1,S}$, $k \in S$);

2. $\delta_k > q$,

де $\delta_j = \dfrac{H_{d_j}}{T_{d_j}}$. Значення q залежить від точності, з якою необхідно визначити належність елемента до відповідної підмножини, 0,5<q<1. Чим більшою потрібна точність прийняття рішення, тим більшим є значення q. В усіх інших випадках елемент належить до підмножини O_{s+1} функціонально незмістовних елементів.

Після того як побудовано S порогових функцій для критеріїв d_j , $j=\overline{1,S}$, обрано значення q для O_{s+1} критерія, здійснюється перехід до кроку 3 загального алгоритму.

Крок 3. Для кожного елементу o_m множини O визначаються вектори $Y_{dj}=[y_{1,j},...,y_{n,j}]$, використовуючи алгоритм, граф-схема якого наведена на рис. 2. Обчислюються складені на кроці 2.7 H_{dj} при Y_{dj}, $j=\overline{1,S}$.

Крок 4. Якщо $H_{dj} \geq T_{dj}$, то елемент o_m належить до підмножини O_j . Якщо $H_{dj} < T_{dj}$ для усіх j, то визначаються δ_j . Знаходиться найбільше за значенням $\delta_к > q$, то елемент o_m належить до підмножини o_k . Якщо $\delta_к \leq q$ тоді цей елемент належить до функціонально незмістовної підмножини O_{s+1} .

Крок 5. Оптимізація здійснюється за допомогою відомого апарату лінійного програмування [8-11].

Таким чином, в даній статті розроблено структурну модель складання СППР з урахуванням ризику. Складено алгоритм формалізації розробленої моделі на базі математичного апарату порогових елементів та лінійного програмування.

Література

1. В.Ф. Сытник, Х.Срока, Н.В.Еремина и др. Компьютеризация информационных процессов на промышленных предприятиях.-К.:Тэхника; Катовице: Экономическая академия им.К.Адамецкого.- 1991.-215 с.

2. Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. Справочник по математике для инженеров и учащихся вузов.-М.:Наука.-1986.-с.466-477.
3. Корн Г., Корн Т. Справочник по математичке для научных работников и инженеров.-М.:Наука.-1968.-с.322-327.
4. Вавилов Е.Н., Егоров Б.М., Ланцев В.С., Тоценко В.Г. Синтез схем на пороговых элементах. М.: Советское радио. 1970.- с. 368 .
5. Алексеенко А.Г. Основы микросхемотехники. Элементы морфологии микроэлектронной аппаратуры.М: Советское радио.-71.-с.84.89 .
6. Майоров С.А. Проектирование цифровых вычислительных машин. М.:Высшая школа.-1972.-с.84-95 .
7. Савельев А.Я. Арифметические и логические основы цифровых автоматов.М.: Высшая школа.-1980.-с.187-201.
8. Вентцель Е.С. Исследование операций.-М.: Сов. Радио, 1972.-551 с.
9. Вентцель Е.С. Исследование операций: Задачи, принципы, методология.-М.: Наука, 1980.- 208 с.
10. Саати Т. Целочисленные методы оптимизации и связанные с ними экстремальные проблемы.- М.: Мир.-1973.-302.с.
11. Сытник В.Ф. Математические модели в планировании и управлении предприятиями. -К. : Вища школа.-1985.-214 с.