УДК 621.311.1

**В. А. Попов, канд. техн. наук, доц.; О. С. Ярмолюк, асп.;
С. Банузаде Сахрагард, асп.**

ОСОБЛИВОСТІ ЗАСТОСУВАННЯ ІНТЕРВАЛЬНОГО АНАЛІЗУ ПІД ЧАС ВИБОРУ ОПТИМАЛЬНИХ ВАРІАНТІВ

Розглянуто підхід, пов'язаний з урахуванням невизначеності інформації під час розрахунку техніко-економічних показників альтернатив з метою вибору оптимального варіанта рішення. В якості адекватного математичного апарату використовується узагальнена інтервальна арифметика Хансена.

Вступ

В конкурентних ринкових умовах будь-який суб'єкт господарської діяльності під час ухвалення рішень неминуче стикається з невизначеностями різного виду і походження. Невизначеність в контексті подібних завдань трактується як неповнота або неточність інформації про умови реалізації інвестиційного проекту, у тому числі і відносно пов'язаних з цим процесом витрат і прибутків. При цьому завжди існують зовнішні чинники, що значною мірою визначають результати інвестиційного проекту. Таким чином, джерела невизначеностей знаходяться поза рамками господарюючих суб'єктів.

Матеріали дослідження

В основу динамічного інвестиційного аналізу може бути покладений вираз

$$NPV = \sum_{t=0}^{N} \frac{CF^{(t)}}{\left(1+q\right)^{t}}, \tag{1}$$

де CF(t) — величина, яка характеризує потік платежів і яка може бути як позитивною (дохід від інвестиційної діяльності), так і негативною (інвестиційні витрати); q — величина ставки дисконтування.

В принципі, усі змінні, що входять в цей вираз, мають прогнозний характер, оскільки відносяться до майбутніх періодів життєвого циклу інвестиційного проекту. Тому важко говорити про точні значення цих змінних.

Термін невизначеності в більшості випадків означає не повну відсутність інформації про об'єкт, а стан часткового знання, коли ми все ж таки маємо в розпорядженні якусь інформацію відносно величини, що цікавить нас. В цьому випадку простою і найпоширенішою ситуацією є знання безлічі можливих значень невідомої величини, що є предметом інтервального аналізу.

Цей підхід дозволяє визначати як оцінки параметрів інвестиційного проекту, так і оцінки ризику, оскільки перші подаються у вигляді інтервалів значень, величину яких можна інтерпретувати як рівень ризику.

Останнім часом інтервальний аналіз трансформувався в один з найважливіших розділів сучасної прикладної математики. Важливою властивістю стандартних арифметичних операцій з інтервальними величинами є те, що інтервальне віднімання не зворотне додаванню, а інтервальне ділення не зворотне множенню. Окрім цього, наведені правила виконання операцій віднімання і ділення призводять до різкого розширення отримуваних в результаті інтервалів.

Ще однією незвичайною властивістю інтервальної математики є те, що під час обчислення функцій речових аргументів можуть бути отримані різні результати. Це багатьох випадках утрудняє застосування цього математичного апарату для вирішення практичних завдань. Наприклад, значення функції $y = \dfrac{x_1 + x_2}{x_1 - x_2}$ за умови $x_1 = [5, 10]$, $x_2 = [1, 2]$ дає результат $y = [0{,}667, 4]$. Тепер перетворимо початковий вираз до еквівалентного вигляду: $y = 1 + 2\Big/\dfrac{x_1}{x_2} - 1$.

В цьому випадку в результаті виконання відповідних операцій з інтервальними величинами отримуємо результат $y = [1{,}222,\ 2{,}333]$.

Перераховані обставини стимулювали розробку альтернативних походів до виконання арифметичних операцій [1—3].

Проте, враховуючи, що для виконання арифметичних операцій на основі вказаних підходів потрібне виконання низки умов, і вони не завжди застосовні на практиці, Хансеном була розроблена узагальнена інтервальна арифметика [4].

Ефективність використання цього математичного апарату для вирішення низки практичних завдань, його універсальність і можливість зменшити вплив негативних властивостей стандартних арифметичних операцій, були підтверджені дослідженнями, виконаними групою учених Сибірського відділення Російської АН та іншими дослідниками, наприклад, [5].

У цьому випадку для зручності операції інтервальні величини $X\left[\underline{x}, \overline{x}\right]$ представляються у вигляді $X = y + c$, де $y = \dfrac{\underline{x} + \overline{x}}{2}$, $c = \dfrac{\overline{x} - \underline{x}}{2}$.

Таким чином, довільна точка з інтервалу $x \in X$ визначається у вигляді $x = y + \alpha$, де $\alpha \in [-c, c]$. В той же час для інтервального вектора $X = \left([X_1], \ldots, [X_n]\right)^T$ j-й інтервал $[X_j]$ може бути представлений в узагальненій інтервальній формі таким чином:

$$[X_j] = [y_j] + [0,0]\alpha_1 + \ldots + [0,0]\alpha_{j-1} + [1,1]\alpha_j + [0,0]\alpha_{j+1} + \ldots + [0,0]\alpha_n = [y_j] + [1,1]\alpha_j. \qquad (2)$$

Якщо необхідно знайти інтервал, що містить безліч значень раціонального виразу, залежного від n змінних, то, представивши кожну змінну $x_i \in X_i$ у вигляді (2), результуюча величина, отримана в результаті обчислень, буде представлена таким чином:

$$X_i = Y_i + \sum_{r=1}^{n} \alpha_r Z_{ir}.$$

У наведеному виразі *Yi*, *Zir*, $i = 1, 2, \ldots, n$; $r = 1, 2, \ldots, n$ — деякі інтервали; $\alpha_r \in [-c_r, c_r]$; $Z_{ii} = [1, 1]$; $Z_{ir} = [0{,}0]$, $i \neq r$.

Арифметичні операції над узагальненими інтервалами виконуються відповідно до правил. Припустимо, що два узагальнені інтервали представлено як

$$[X_i] = [y_i] + \sum_{r=1}^{n} \alpha_r [Z_{ir}]; \qquad [X_j] = [y_j] + \sum_{r=1}^{n} \alpha_r [Z_{jr}].$$

Тоді

$$[X_k] = [X_i] \pm [X_j] = [y_i] \pm [y_j] + \sum_{r=1}^{n} \alpha_i \left([Z_{ir}] \pm [Z_{jr}]\right);$$

$$[X_k] = [X_i] \cdot [X_j] = [y_k] + \sum_{r=1}^{n} \alpha_r [Z_{kr}],$$

де $[y_k] = [y_i] \cdot [y_j] + \sum \left[0, c_r^2\right] \cdot [Z_{ir}] \cdot [Z_{jr}]$; $[Z_{kr}] = [y_i] \cdot [Z_{jk}] + [y_j] \cdot [Z_{ik}] + [-1,1] \cdot [Z_{ir}] \cdot \sum\limits_{\substack{p=1 \\ p \neq r}}^{n} c_p [Z_{jp}]$;

$$[X_k] = \frac{[X_i]}{[X_j]} = [y_k] + \sum_{r=1}^{n} \alpha_r [Z_{kr}]; \quad [y_k] = \frac{[y_i]}{[y_j]}; \quad [Z_{kr}] = \frac{[y_j] \cdot [Z_{ik}] - [y_i] \cdot [Z_{jk}]}{[y_j] \cdot \left([y_j] + [-1,1] \cdot \sum\limits_{\substack{p=1 \\ p \neq r}}^{n} c_p [Z_{jp}]\right)}.$$

Відповідно до поданих вище правил узагальненої інтервальної арифметики, представимо інтервальну величину (q) ставки дисконтування (1) у вигляді

$$q = q_0 + u_q; \qquad -r_q \le u_q \le r_q ,$$

де $q_0 = \dfrac{q_1 + q_2}{2}$; $r_q = \dfrac{q_2 - q_1}{2}$.

В цьому випадку інтервальне значення чистого зведеного доходу $\left[NPV_1, NPV_2\right]$ визначиться таким чином:

$$NPV_1 = \sum_{t=0}^{N}\left(\frac{CF^{(t)}}{B^{(t)}} - r_q \frac{CF^{(t)}F^{(t)}}{D^{(t)}}\right); \quad NPV_2 = \sum_{t=0}^{N}\left(\frac{CF^{(t)}}{A^{(t)}} + r_q \frac{CF^{(t)}F^{(t)}}{D^{(t)}}\right),$$

де $A^{(t)} = \left(1+q_0\right)^t$; $B^{(t)} = t\left(1+q_0\right)^{t-1}$; $D^{(t)} = \left(1+q_0\right)^t + \sum\limits_{k=1}^{t/2} C_t^{2k}\left(1+q_0\right)^{t-2k} r_q^{2k}$;

$F^{(t)} = t\left(1+q_0\right)^{t-1} + \sum\limits_{k=1}^{(t-1)/2} C_t^{2k+1}\left(1+q_0\right)^{t-1+2k} r_q^{2k}$; $C_n^k = \dfrac{n!}{k!\left(n-k\right)!}$.

Очевидно, що, в принципі, аналогічним чином може бути врахована і невизначеність інформації при заданні потоку платежів. Отримані інтервальні характеристики з більшою мірою об'єктивності характеризують техніко-економічні показники порівнюваних альтернатив. Відповідно, вибір найкращого варіанта здійснюється порівнянням показників економічної ефективності на основі процедури порівняння інтервальних величин. При цьому, якщо інтервальні оцінки не перетинаються, то рішення відносно вибору оптимального варіанта вважається тривіальним. Інакше пропонується застосувати такий підхід.

Під час ухвалення рішень в умовах невизначеності, окрім прагнення поліпшити деяку функціональну характеристику (наприклад, мінімізувати витрати) завжди існує бажання понизити рівень її невизначеності або, що практично те ж саме, міру ризику неотримання бажаного результату. У зв'язку з цим завдання ухвалення рішень в умовах невизначеності переводиться на багатокритеріальний (двокритеріальний) рівень.

Перший критерій порівняння інтервалів представляється за допомогою функції бажаності, що відбиває вірогідність домінування одного інтервалу над іншим. Для цієї мети використовується запропонована в [6] процедура порівняння інтервалів, що використовує теоретично-імовірнісний підхід до формалізації стосунків в класах нечітких і чітких інтервалів, де останні розглядаються як інтервали рівномірно розподілених випадкових величин, що дозволяє проаналізувати різні варіанти розташування інтервалів на числовій осі, а також ситуації, коли одна з величин є детермінованою. Таким чином, чим вища вірогідність того, що інтервал A більше інтервалу B, тим більшого значення набуває функція бажаності $\mu\left(P\left(A > B\right)\right)$.

Другий критерій пов'язаний з оцінкою ризику і представляється за допомогою параметрів, що характеризують відносні розміри порівнюваних інтервалів [7]

$$\mu_w(x_A) = 1 - x_A; \quad \mu_w(x_B) = 1 - x_B,$$

де $x_A = \dfrac{w_A}{\max(w_A, w_B)}$, $x_B = \dfrac{w_B}{\max(w_A, w_B)}$; wA, wB — ширина інтервалів A і B, відповідно.

На завершальному етапі здійснюється агрегація приватних критеріїв. У цій ситуації використовується адитивна згортка критеріїв. Автори [7] стверджують, що в цьому випадку компенсаційна властивість адитивного згортання відповідає постановці і сенсу цього завдання. При цьому у разі потреби, аналізуючи, можна врахувати і коефіцієнти відносної важливості кожного з критеріїв.

Оскільки в загальному випадку при порівнянні оціночних характеристик можуть мати місце усі три події $A < B$, $A = B$, $A > B$, інтегральні критерії для оцінки величини інтервалів має такий вигляд:

$$D_{A\langle B}(A,B) = \frac{1}{2}\left(r_p \mu_p\left(P\left(A\langle B\right)\right) + r_w \mu_w\left(x_A\right)\right);$$

$$D_{A\rangle B}(A,B)=\frac{1}{2}\left(r_p\mu_p\left(P\left(A\rangle B\right)\right)+r_w\mu_w\left(x_B\right)\right);$$

$$D_{A=B}=\max\left(D'_{A=B}\left(A,B\right),D''_{A=B}\left(A,B\right)\right),$$

де $D'_{A=B}(A,B)=\frac{1}{2}\left(r_P\mu_P\left(P(A=B)\right)+r_w\mu_w\left(x_A\right)\right)$; $D''_{A=B}(A,B)=\frac{1}{2}\left(r_P\mu_P\left(P(A=B)\right)+r_w\mu_w\left(x_B\right)\right)$;

rp, *rw* — коефіцієнти, що характеризують важливість окремих критеріїв.

Висновки

В умовах невизначеності інформації під час розрахунку техніко-економічних показників альтернатив для вибору оптимального варіанту рішення в якості адекватного математичного апарату може ефективно використовуватися узагальнена інтервальна арифметика Хансена.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Marcov S. M. Extended interval arithmetic / S. M. Marcov — C.R. Acad. Bulgara Sci., 1977. — V. 30. — P. 1239—1242.
2. Kahan W. A more complete interval arithmetic : Lecture notes for a summer course / W. Kahan. — University of Michigan, 1968.
3. Kulish U. W. Complete interval arithmetic and its implementation on the computer, on the Computer in Numerical validation in current hardware architectures / U.W. Kulish. — Springer – Verlag, Berlin, Heidelberg, 2009. — P. 7—26.
4. Hansen E. A generalized interval arithmetic / E. Hansen // In Interval Mathematics ; [Ed. By K. Nickel]. Interval Mathematics, Lecture notes in Computer Science. V. 29. — Berlin, Heidelberg: Springer – Verlag, 1975. — P. 7—18.
5. Kramer W. Generalized intervals and the dependency problem / W. Kramer // Proceedings on Applied Mathematics and Mechanics. — 2006. — V 6, Issue 1. — P. 683—694.
6. Дилеганський Н. В. Нечітке моделювання і багатокритерійна оптимізація виробничих систем в умовах невизначеності: технологія, економіка, екологія / Н. В. Дилеганський, Л. Г. Димова, П. В. Севастьянов. — М.: Машинобудування, 2004. — 397 с.
7. Sevastjanov P. Two-objective method for crisp and fuzzy interval comparison in optimization / P. Sevastjanov, P. Rog // Computers and Operations Research. — 2006. — Vol. 33, Issue 1. — P. 115—131.

Рекомендована кафедрою електричних станцій та систем

Стаття надійшла до редакції 14.10.11
Рекомендована до друку 24.12.11

Попов Володимир Андрійович — доцент, ***Ярмолюк Олена Сергіївна*** — аспірантка, ***Банузаде Сахрагард Саід*** — аспірант.

Кафедра електропостачання, Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут», Київ