

Н. К. Тимофієва, д-р техн. наук, с. н. с.

ПРО РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ КОМБІНАТОРНОЇ ОПТИМІЗАЦІЇ В УМОВАХ НЕВИЗНАЧЕНОСТІ

Показано, що ситуація невизначеності в комбінаторній оптимізації виникає не лише внаслідок нечіткої або неповної вхідної та поточної інформації, а і внаслідок особливої структури множини комбінаторних конфігурацій, які є аргументом цільової функції, та способу її моделювання. Запропоновано деякі підходи до розв'язання задач комбінаторної оптимізації в умовах невизначеності.

Вступ

В теорії прийняття рішень під час розв'язання значної частини прикладних задач в тому чи іншому вигляді виникає ситуація невизначеності різної природи, тобто розв'язання задач з урахуванням різного її виду є загальним випадком, а прийняття рішень без їхнього урахування — частковим випадком. У дослідженні цієї проблеми основна увага приділяється невизначеності, що пов'язана з неповною вхідною та поточною інформацією, а також з нечіткими вхідними даними [1–11]. Незважаючи на спробу строго формалізувати невизначеність, наприклад, [5–8], цим поняттям користуються на інтуїтивному рівні. В задачах управління для побудови моделі невизначеності вхідної інформації використовують p -адичні числа [6]. У роботі [8] розглядається простір невизначеності, який використовується для формалізації різних її ситуацій. Для оцінки ступеня невизначеності стану об'єкта вводиться міра невизначеності. Величина, що характеризує кількість невизначеності в теорії інформації, має назву ентропія, точніше інформаційна ентропія.

Запропоновані моделі невизначеності та побудовані простори, в основному, враховують нечітку або неповну вхідну та поточну інформацію. Але невизначеність в задачах комбінаторної оптимізації виникає і внаслідок особливої структури множини комбінаторних конфігурацій, які є аргументом цільової функції, та способу її моделювання. В цьому випадку досить складно змоделювати цільову функцію так, щоб глобальний розв'язок збігався з дійсною метою дослідження. Тобто, виникає ситуація невизначеності внаслідок вибору серед кількох оптимальних варіантів розв'язків задачі, одержаних з використанням розроблених цільових функцій, такого, який задовольняв би мету дослідження. Далі наведемо загальну математичну постановку задачі комбінаторної оптимізації і розглянемо деякі види невизначеності, що пов'язані з характерними особливостями цих задач.

Математична постановка загальної задачі комбінаторної оптимізації

Задачі комбінаторної оптимізації, як правило, задаються на одній або кількох множинах, наприклад, $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ і $B = \{b_1, \dots, b_{\tilde{n}}\}$, елементи яких мають будь-яку природу. Назвемо ці множини базовими. Має місце два типи задач. В задачах I типу кожному з множин A і B можна подати у вигляді графа, вершинами якого є елементи заданої множини, а кожному ребру поставлено у відповідність число $c_{sl} \in R$, яке називають вагою ребра (R — множина дійсних чисел), $s \in \{1, \dots, n\}$, $l \in \{1, \dots, \tilde{n}\}$; n — кількість елементів множини A ; \tilde{n} — кількість елементів множини B . Нехай $n = \tilde{n}$. Числове значення зв'язків (ваг) між елементами A і B назвемо вхідними даними і задамо їх матрицями (одна з них — комбінаторна). В задачах II типу між елементами заданої множини зв'язків не існує, а вагами виступають числа $c_{sl} \in R$, яким у відповідність поставлено деяку властивість цих елементів.

У обох типах задач з елементів однієї із заданих множин, наприклад, $a_s \in A$, утворюється комбінаторна множина W — сукупність комбінаторних конфігурацій певного типу (перестановки, вибірки різних типів, розбиття тощо). На елементах $w \in W$ комбінаторної множини W вводиться цільова функція $F(w)$. Необхідно знайти елемент w^* множини W , для якого $F(w^*)$ набуває екстремального значення (глобальних мінімуму або максимуму) за виконання заданих обмежень, тобто $F(w^*) = \text{glob}_{w \in W^0 \subset W} \text{extr} F(w)$, де $\text{extr} = \{\min, \max\}$. Елемент $w^* \in W_0 \subseteq W$ і є глобальним оптимальним розв'язком задачі комбінаторної оптимізації.

Для задання цільової функції в явному вигляді та зведення її до одного виразу для різних класів задач комбінаторної оптимізації вхідні дані змодельовано скінченними послідовностями.

Подамо елементи h наддіагоналей симетричної комбінаторної матриці $Q(w^k)$ комбінаторною функцією $\beta(f(j), w^k) |_1^m = (\beta_1(f(1), w^k), \dots, \beta_m(f(m), w^k))$, а елементи h наддіагоналей симетричної матриці C — функцією натурального аргументу $\phi(j) |_1^m = (\phi(1), \dots, \phi(m))$, де $m = \frac{n(n-1)}{2}$ — кількість елементів h наддіагоналей матриць C і $Q(w^k)$, $h = \overline{1, n-1}$; k — порядковий номер w^k в упорядкованій множині W . Якщо матриці $Q(w^k)$ і C — несиметричні, то $\beta(f(j), w^k) |_1^m$ і $\phi(j) |_1^m$ містять усі їхні елементи, а $m = n^2$ (або $m = n\bar{n}$). Сумарне значення функції цілі $F(w^k)$ запишемо як

$$F_1(w^k) = \sum_{j=1}^m \beta_j(f(j), w^k) \phi(j). \tag{1}$$

Середнє значення ваг між елементами базової множини обчислюємо за виразом

$$F_2(w^k) = \sum_{j=1}^m \beta_j(f(j), w^k) \phi(j) / m. \tag{2}$$

Для підмножин ізоморфних комбінаторних конфігурацій (комбінаторні конфігурації, кількість елементів або блоків у яких однакова, називаються ізоморфними) середнє значення набуває вигляду:

$$F_3(w^k) = \sum_{p=1}^{\eta^k} \left(\sum_{j=1}^m \beta_j(f(j), w_p^k) \phi(j) \right) / J_p^k, \tag{3}$$

де $J_p^k = \frac{\xi_p^k!}{(\xi_p^k - 2)!}$, $\xi_p^k > 1$ — кількість одиниць у комбінаторній функції для p -ї підмножини (блоку) $w_p^k \subset w^k$; ξ_p^k — кількість елементів у w_p^k , (η^k — кількість блоків (елементів) у w^k).

Класифікація невизначеності в задачах комбінаторної оптимізації

В задачах комбінаторної оптимізації невизначеність пов'язана: I) з неоднозначністю результату, одержаного за змодельованою цільовою функцією або вибраною мірою подібності у разі нечіткої вхідної інформації, який не задовольняє мету дослідження; II) з вибором способу оцінки точності роботи певного алгоритму; III) з особливою структурою множини комбінаторних конфігурацій, що є аргументом цільової функції; IV) з неповною вхідною та поточною інформацією; V) з нечітко розробленими правилами обробки та оцінки інформації; VI) з неоднозначністю при виборі оптимального розв'язку за кількома критеріями в багатокритеріальній оптимізації.

Виходячи з цього, сформулюємо таке означення.

Означення. Під невизначеністю в комбінаторній оптимізації розуміємо ситуацію, при якій внаслідок нечіткої чи неповної вхідної та поточної інформації неможливо одержати однозначний результат, або за вибраною мірою подібності, за змодельованими цільовими функціями, за розробленими правилами обробки та оцінки інформації одержаний оптимальний результат не збігається з метою дослідження.

Розглянемо оговорені види невизначеності детальніше.

Невизначеність I виду. Уточнимо такі поняття, як критерій і цільова функція.

Критерій — це ознаки або властивості, які характеризують певний об'єкт і є вхідними даними.

Цільова функція — вираз, який формулюється на основі заданих критеріїв з урахуванням специфіки задачі і за яким обчислюється та оцінюється результат розв'язання задачі.

Як правило, цільову функцію ототожнюють з критеріями. Але для одних і тих же критеріїв її можна змодельовати по-різному. Якщо за змодельованими різними виразами знаходимо один і той же розв'язок, то можна сказати, що він збігається з метою дослідження. В іншому разі виникає ситуація невизначеності внаслідок неоднозначного результату. Постає проблема вибору з кількох оптимальних варіантів розв'язку задачі, отриманими за розробленими цільовими функціями, одного, що збігається з метою дослідження.

Невизначеність II виду. Оцінку точності розв'язання задачі за відомого глобального оптимуму можна обчислювати за виразом $\left(1 - \frac{F_{\min}}{F(w)}\right) 100\%$ (або $\left(1 - \frac{F(w)}{F_{\max}}\right) 100\%$ у разі максимізації), де F_{\min} — глобальний мінімальний розв'язок задачі; F_{\max} — глобальний максимальний розв'язок задачі; $F(w)$ — отриманий оптимальний розв'язок задачі за певним алгоритмом. Експеримент показує, що чим більша розмірність задачі, тим менша похибка (у відсотках) одержаного результату по відношенню до глобального оптимуму. Але задачі комбінаторної оптимізації — перебірні і на великих розмірностях визначення глобального оптимального розв'язку повним перебором практично неможливе. Тому під час оцінювання за існуючими підходами точності результату, одержаного за певним алгоритмом, виникає ситуація невизначеності.

Невизначеність III виду. Закономірність зміни значень цільової функції в задачах комбінаторної оптимізації залежить від упорядкування комбінаторних конфігурацій (аргументу) $w \in W$. Розглянемо структуру їхньої множини W . Підмножину $W_\eta \subset W$ назвемо підмножиною ізоморфних комбінаторних конфігурацій, якщо її елементи — ізоморфні комбінаторні конфігурації. Множина W складається з підмножин ізоморфних комбінаторних конфігурацій W_η . На підмножині W_η цільова функція змінюється так, як і на множині перестановок. Упорядкуємо підмножини $W_\eta \subset W$ (крім перестановок), починаючи з $\eta = 1$ і закінчуючи $\eta = n$.

Теорема 1. *Якщо в задачі комбінаторної оптимізації множина W складається з підмножин W_η , а оптимізація проводиться за виразами (1)–(3), то цільова функція на заданому вище упорядкуванні W_η в W — дискретна кусково-монотонна функція (відповідно неспадна або незростаюча).*

Наслідок. На множині перестановок і на підмножині ізоморфних комбінаторних конфігурацій при використанні цільових функцій (1)–(3) ситуація невизначеності зводиться до мінімуму.

Як впливає з теореми 1, ситуація невизначеності, яка пов'язана із структурою комбінаторних конфігурацій, виникає внаслідок того, що їхня множина складається з підмножин і на певному їхньому впорядкуванні закономірність зміни значень змодельованої цільової функції однакова незалежно від вхідних даних, а результат розв'язання задачі — неоднозначний.

Невизначеність IV виду пов'язана з неповною вхідною та поточною інформацією. Прикла-

дні задачі комбінаторної оптимізації, як правило, складні за своєю природою і розділяються на підзадачі, для розв'язання яких розробляють незалежні алгоритми. Основна задача розв'язується послідовною роботою цих алгоритмів або вони працюють як вбудовані процедури в ітераційному режимі. В процесі їхньої роботи при переході від розв'язання однієї задачі до іншої при передачі інформації, яка є результатом розв'язання попередньої, на вході іншого алгоритму з'являються нові, невизначені параметри, які необхідні для розв'язання наступної задачі і які неможливо задати у вхідних даних за умовою. Виникає проблема знаходження параметрів в умовах невизначеності.

Невизначеність V виду пов'язана з нечітко розробленими правилами обробки та оцінки інформації. Алгоритми і методи, які використовуються для розв'язання задач комбінаторної оптимізації, розділяються на наближені і точні. Якщо для розв'язання певного класу задач правила обробки та оцінки інформації розроблено досить ґрунтовно, то завдяки їм можна отримати результат, який збігається з метою дослідження, а невизначеність в цьому разі зводиться до мінімуму. В іншому разі отриманий результат може бути далеким від оптимального, що створює ситуацію невизначеності.

Невизначеність VI виду виникає в багатокритеріальній оптимізації. Якщо за кожним заданим критерієм знаходяться різні оптимальні результати, то внаслідок неоднозначності виникає проблема знаходження серед них такого, який задовольняє мету дослідження.

Способи вирішення ситуації невизначеності в задачах комбінаторної оптимізації

Одним із способів вирішення ситуації невизначеності є використання підкласів розв'язних задач, для яких відомий аналітичний спосіб знаходження глобального розв'язку. Вирішення невизначеності I виду покажемо на прикладі розпізнавання мовленнєвих сигналів. Сигнали, які відповідають одному і тому ж слову, промовленому багато разів тим самим диктором або різними дикторами, відрізняються між собою. Таких різних варіантів може бути нескінченна кількість тому, що складові слова — фонем утворюються комбінацією елементів мовленнєвого тракту і утворюють комбінаторну конфігурацію — розміщення з повтореннями. Звідси впливає нечіткість вхідних даних. Якщо підмножини фонем утворені комбінацією різних елементів мовленнєвого тракту і вони не перетинаються, то для них існує міра подібності, яка дозволяє визначити глобальний розв'язок, тобто варіанти розв'язку для вимовлених різних звуків (слів) — різні. В цьому разі задача є розв'язною і невизначеність в ній зведено до мінімуму. Якщо підмножини фонем утворені комбінацією як однакових, так і різних елементів мовленнєвого тракту і вони перетинаються, то для них за вибраною мірою подібності можна отримати неоднозначний результат, тобто у розпізнаванні різних звуків (слів) варіанти розв'язку задачі можуть бути однакові, внаслідок чого виникає ситуація невизначеності.

Для вирішення невизначеності II виду використаємо розв'язний випадок, який задано двома множинами перестановок, поданих системами (y) і (x) , на яких уведено цільову функцію $\sum yx$ [12]. Для цих систем визначено перестановки, для яких $\sum yx$ набуває найбільшого або найменшого значення. Якщо елементи перестановки із системи (y) упорядковані від більшого елемента до меншого, а із (x) — упорядковані від меншого елемента до більшого, то значення $\sum yx$ є глобальним мінімумом. Якщо елементи обох таких перестановок упорядковані від меншого елемента до більшого, то значення $\sum yx$ є глобальним максимумом.

Теорема 2. *Значення цільової функції для задач комбінаторної оптимізації, аргументом якої є перестановка, знаходиться в межах $\max_{w^* \in (x)} F(w^*) \geq F(w) \geq \min_{w^{**} \in (x)} F(w^{**})$, $w^*, w^{**} \in (x)$, $w \in W$ — розв'язок (комбінаторна конфігурація) певної задачі. У разі мінімізації значення цільової функції знаходиться в межах $\min_{w \in (x)} F(w^*) \leq F(w) < F^*$. У разі максимізації — в межах*

$$F^* < F(w) \leq \max_{w^{**} \in (x)} F(w^{**}), \text{ де } F^* = \min_{w^* \in (x)} F(w^*) + \frac{\max_{w^* \in (x)} F(w^*) - \min_{w^{**} \in (x)} F(w^{**})}{\nu}, \nu - \text{ коефіцієнт}$$

зменшення області пошуку оптимального розв'язку, який уточнюється в процесі роботи алгоритму.

З використанням підкласів розв'язних задач знаходиться множина значень низки індивідуальних задач. За виразом $\left(1 - \frac{F_{\min}}{F(w)}\right) 100\%$ (або $\left(1 - \frac{F(w)}{F_{\max}}\right) 100\%$ при максимізації) оцінюється точність алгоритму (методу).

Для вирішення невизначеності I і III виду необхідно вводити кілька цільових функцій або оптимізацію проводити за кількома критеріями, які зводяться до зваженого критерію (лінійної згортки). Знаходження оптимального розв'язку проводиться за самоналагоджувальним алгоритмом з урахуванням постійних і змінних критеріїв, які вводяться в процесі розв'язання задачі [13]. Тобто, в процесі роботи алгоритму генерується додаткова поточна інформація (критерії якості), яка впливає на прогнозування майбутніх результатів.

Вирішення ситуації невизначеності IV виду, що пов'язана з неповною вхідною та поточною інформацією, у [7] проводиться шляхом аналізу поведінки системи за певний проміжок часу. На основі цього аналізу встановлюється певна закономірність, яка враховується при прогнозуванні майбутніх результатів на поточному відрізку часу. Також одним із способів вирішення ситуації невизначеності IV виду є розроблення самоналагоджувальних алгоритмів генерування параметрів, які необхідно задавати як вхідні дані для розв'язання чергової задачі і які неможливо задати на початку обчислювального процесу [14]. Це дозволяє в процесі розв'язання певної задачі генерувати додаткову поточну інформацію з урахуванням прогнозу майбутніх результатів.

Висновки

Отже, в задачах комбінаторної оптимізації невизначеність, пов'язана з неоднозначністю результату, отриманого за змодельованою цільовою функцією, має місце під час вибору способу оцінювання точності роботи певного алгоритму, виникає внаслідок особливої структури множини комбінаторних конфігурацій, що є аргументом цільової функції, виникає внаслідок неповної вхідної та поточної інформації, в багатокритеріальній оптимізації а також пов'язана з нечітко розробленими правилами обробки та оцінки інформації. Розглянуті ситуації невизначеності не є повними.

Для вирішення ситуації невизначеності, яка виникає внаслідок особливої структури множини комбінаторних конфігурацій, оцінювання результату проводиться як за однією, так і за кількома цільовими функціями, а також вирішується введенням в процесі розв'язання задачі змінних критеріїв. Одним із способів прийняття рішень в умовах невизначеності є використання самоналагоджувальних алгоритмів. Завдяки їм генерується додаткова поточна інформація, яка впливає на прогнозування майбутніх результатів. Це дає можливість отримати оптимальний розв'язок, що збігається з метою дослідження.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Трухаев Р. И. Динамические модели процессов принятия решений / Р. И. Трухаев, В. С. Лернер. — Кишинев : Штиинца, 1974. — 264 с.
2. Иваненко В. И. Проблема неопределенности в задачах принятия решений / В. И. Иваненко, В. А. Лабковский. — К. : Наукова думка, 1990. — 136 с.
3. Обработка нечеткой информации в системах принятия решений / [А. Н. Борисов, А. В. Алексеев, Г. В. Меркурьева и др.]. — М. : Радио и связь, 1989. — 304 с.
4. Орловский С. А. Проблемы принятия решений при нечеткой исходной информации / С. А. Орловский. — М. : Наука, 1981. — 208 с.
5. Иваненко В. И. Проблема невизначеності в теорії рішень і теорії керування / В. И. Иваненко / Автоматика–2006. Матеріали XIII міжнародної конференції з автоматичного управління. Вінниця, 25—28 вересня 2006 р. — Вінниця, 2006. — С. 38—46.
6. Мінаєв Ю. М. P-адичні моделі невизначеності в задачах управління / Ю. М. Мінаєв, О. Ю. Філімонова, Ю. І. Мінаєва // Системний аналіз та інформаційні технології : матер. 12-ї Міжнар. наук.-техн. конф. «SAIT 2010» Київ, 25—29 травня 2010. — К., 2010. — 289 с.
7. Зайченко Ю. П. Оптимизация инвестиционного портфеля в условиях неопределенности. Состояние, проблемы, перспективы / Ю. П. Зайченко // Обчислювальний інтелект (результати, проблеми, перспективи) : матер. Першої Між-

нар. наук.-техн. конф. «Обчислювальний інтелект (ОІ-2011)». Черкаси, Україна, 10—13 травня 2011. — Черкаси, 2011. — С. 33—34.

8. Дидук Н. Н. Прообразы пространств неопределенности. Простые подпространства / Н. Н. Дидук // Системні дослідження та інформаційні технології. — 2005. — № 1. — С. 127—142.

9. Машенко С. О. Прийняття рішень за відношенням переваги в умовах невизначеності з нечіткою множиною станів природи / С. О. Машенко, В. І. Моренець // XIX International Conference «Problems of decision making under uncertainties (PDMU-2012)». Abstracts. Mukachevo, Ukraine, April 23—27, 2012. — К., 2012. — 172 с.

10. Сявавко М. С. Математичне моделювання за умов невизначеності / М. С. Сявавко, О. М. Рибицька. — Львів : НВФ «Українські технології», 2000. — 320 с.

11. Губарев В. Ф. Особенности и взаимосвязь задач идентификации и управления в условиях неопределенности / В. Ф. Губарев, А. В. Гуммель, А. О. Жуков // Проблемы управления и информатики. — 2010. — № 1. — С. 50—62.

12. Харди Г. Г. Неравенства / Г. Г. Харди, Дж. Е. Литтльвуд, Г. Поля. — М. : Гос. изд-во иностр. лит., 1948. — 456 с.

13. Тимофеева Н. К. О природе неопределенности и переменных критериях в задачах разбиения / Н. К. Тимофеева // Проблемы управления и информатики. — 2009. — № 5. — С. 88—99.

14. Тимофієва Н. К. Самоналагоджувальні алгоритми знаходження невизначених параметрів у задачах комбінаторної оптимізації / Н. К. Тимофієва // УСiМ. — 2009. — № 4. — С. 43—50.

Рекомендована кафедрою комп'ютерних систем управління

Стаття надійшла до редакції 5.11.12

Рекомендована до друку 16.11.12

Тимофієва Надія Костянтинівна — провідний науковий співробітник відділу комплексних досліджень інформаційних технологій.

Міжнародний науково-навчальний центр інформаційних технологій та систем НАН та МОНмолодьспорту України, Київ