

Азарова А.О., к.т.н., доцент; Лобанкіна І.С.; Роїк О.М., д.т.н., професор  
*Вінницький національний технічний університет*

## **РОЗРОБКА МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ ПІДВИЩЕННЯ ПРОДУКТИВНОСТІ ПРАЦІ НА ПІДПРИЄМСТВІ**

*У статті проаналізовано провідні школи, що здійснили значний доробок у розвиток теорії управління продуктивністю праці. Автори пропонують математичну модель оцінювання продуктивності праці, що дозволяє виявити пріоритетні напрямки управління нею на підприємстві.*

**Ключові слова:** продуктивність праці, математична модель, коефіцієнт детермінації, коефіцієнт еластичності.

**I. Вступ.** Формування в Україні ринкових умов господарювання зумовлює необхідність поглибленого дослідження питань управління продуктивністю праці, виявлення чинників і резервів її підвищення.

Продуктивність праці є одним з найважливіших показників ефективності, що характеризує рівень раціонального використання ресурсів і використовується для внутрішнього аналізу й планування ефективної господарської діяльності підприємства.

Важливість проблеми зростання продуктивності праці зумовлює постійну увагу до цієї теми вчених економістів в Україні і за її межами. Суттєвий внесок у дослідження значення продуктивності праці та пошук шляхів її зростання на підприємстві внесли відомі вчені: А.Г. Бабенко, О.А. Бугуцький, Д.П. Богиня, В.В. Вітвіцький, В.С. Дієсперов, О.І. Здоровцов, В.Ф. Машенков, М.Г. Назаров та ін.

Розвитком теорії продуктивності факторів на заході займалися Б. Сей та Ф. Бастія. Пізніше Д. Кларком сформульована теорія граничної продуктивності факторів, на якій заснована сучасна західна теорія продуктивності праці.

Подальший розвиток цієї теорії пов'язаний з працями Д. Кендріка, Е. Денісона, Р. Солоу та ін.

Незважаючи на значний обсяг проведених попередніх досліджень, ряд теоретичних і практичних питань є невирішеними.

**II. Постановка завдання.** Метою статті є удосконалення механізму управління продуктивністю праці на підприємстві з використанням математичного та комп'ютерного моделювання засобами кореляційно-регресійного аналізу та математичного пакету програм MathCAD.

**III. Результати.** За сучасних умов одним з найбільш ефективних напрямків дослідження складних динамічних економічних явищ, їх станів та поведінки є їх економіко-математичне моделювання.

Результат впливу на підприємство економічних явищ ( $y$ ), як правило, описуються великою кількістю чинників  $x_i, i = \overline{1, n}$ , що їх характеризують. У зв'язку з цим часто виникає потреба у відображенні  $X \rightarrow Y$ . Ця задача розв'язується саме за допомогою математичного моделювання такого процесу, що дозволяє врахувати вплив різнобічних факторів на продуктивність праці.

Автори пропонують економетричну модель, яка характеризує залежність між продуктивністю праці, чисельністю працівників, фондом оплати праці, обсягом виготовленої продукції та нематеріальними чинниками. Під нематеріальними чинниками розуміється відрахування на соціальні заходи: премії та винагороди, що мають несистематичний характер, надбавки та доплати до посадових окладів, заохочувальні та компенсаційні виплати. Вихідні дані для кореляційно-регресійного аналізу наведено у табл. 1.

Таблиця 1

Вихідні дані

Період, $p$	Продуктивність праці	Чисельність працівників	Фонд оплати праці	Нематеріальні чинники
1	80,80	2469	10824	4083
2	80,84	2463	10829	4024
3	80,96	2467	10832	4044
4	80,86	2464	10833	4025
5	108,49	2445	13011	4949

(Продовження таблиці 1)

6	108,41	2443	13021	4755
7	108,17	2438	13170	4765
8	108,36	2442	13994	4751
9	130,44	2431	21172	6105
10	129,58	2425	18261	6125
11	130,33	2419	16358	6130
12	130,12	2415	16630	6140

Для побудови моделі виконаємо такі етапи.

По-перше, ідентифікуємо змінні моделі:

$y$  – продуктивність праці (залежна змінна);

$x_1$  – чисельність працівників (незалежна змінна);

$x_2$  – фонд оплати праці (незалежна змінна);

$x_3$  – нематеріальні чинники (незалежна змінна);

$u$  – залишки (стохастична складова);

$p$  – кількість періодів ( $p=12$ ).

По-друге, специфікуємо модель, тобто визначимо її аналітичну форму таким чином:

$$y = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + u, \quad (1)$$

де  $a_j$  – параметри моделі,  $j = \overline{0,3}$ ;

$x_i$  – незалежні змінні (фактори) моделі,  $i = \overline{1,3}$

$u$  – залишки, випадкова величина.

Залежна змінна  $y$  називається пояснюваною ендогенною змінною, незалежні змінні  $x_i$  – пояснювальними, екзогенними змінними. Багатофакторні кореляційно-регресійні моделі зумовлюють використання матричної форми представлення аналізованих даних.

Отже:

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{12} \end{pmatrix}; \quad X = \begin{pmatrix} X^1 \\ \vdots \\ X^{12} \end{pmatrix}, \quad X^1 = \begin{pmatrix} 1 & x_1^1 & x_2^1 & x_3^1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_1^{12} & x_2^{12} & x_3^{12} \end{pmatrix}; \quad a = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_3 \end{pmatrix}; \quad U = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_{12} \end{pmatrix}, \quad (2)$$

де  $x_1^p$  – значення незалежної змінної (фактора) у  $p$ -му періоді.

Враховуючи позначення (2) модель (1) набуває вигляду:

$$Y = Xa + U. \quad (3)$$

Введення в матрицю незалежних змінних додаткового стовпчика з одиниць, пояснюється наявністю вільного члена в моделі (2).

По-третє, оцінимо параметри моделі за допомогою (4), попередньо висунувши гіпотезу, що всі чотири передумови [1-4] для його застосування дотримані:

$$A = (X^T X)^{-1} \cdot X^T Y. \quad (4)$$

За методом найменших квадратів матрицю параметрів  $A$  обирається так, щоб сума квадратів відхилень була мінімальною.

У даному операторі матриця  $X$  характеризує всі незалежні змінні моделі. Оскільки економетрична модель має вільний член  $a_0$ , для якого всі  $x_i=1$ , то матриця  $X$  доповнюється першим стовпцем, у якому всі елементи є одиницями.

$X^T$  – транспонована матриця  $X$ , а вектор  $Y$  – вектор залежної змінної. Розрахуємо параметри засобами комп'ютерного пакету MathCad таким чином:

$$X := \begin{pmatrix} 1 & 2469 & 10824 & 4083 \\ 1 & 2463 & 10829 & 4024 \\ 1 & 2467 & 10832 & 4044 \\ 1 & 2464 & 10833 & 4025 \\ 1 & 2445 & 13011 & 4949 \\ 1 & 2443 & 13021 & 4755 \\ 1 & 2438 & 13170 & 4765 \\ 1 & 2442 & 13994 & 4751 \\ 1 & 2431 & 21172 & 6105 \\ 1 & 2425 & 18261 & 6125 \\ 1 & 2419 & 16358 & 6130 \\ 1 & 2415 & 16630 & 6140 \end{pmatrix} \quad Y := \begin{pmatrix} 80.80 \\ 80.84 \\ 80.96 \\ 80.86 \\ 108.49 \\ 108.41 \\ 108.37 \\ 108.36 \\ 130.34 \\ 129.28 \\ 130.23 \\ 131.12 \end{pmatrix}$$

$$X1 := X^T$$

$$X1 =$$

	0	1	2	3	4	5	6
0	1	1	1	1	1	1	1
1	$2.469 \cdot 10^3$	$2.463 \cdot 10^3$	$2.467 \cdot 10^3$	$2.464 \cdot 10^3$	$2.445 \cdot 10^3$	$2.443 \cdot 10^3$	$2.438 \cdot 10^3$
2	$1.082 \cdot 10^4$	$1.083 \cdot 10^4$	$1.083 \cdot 10^4$	$1.083 \cdot 10^4$	$1.301 \cdot 10^4$	$1.302 \cdot 10^4$	$1.317 \cdot 10^4$
3	$4.083 \cdot 10^3$	$4.024 \cdot 10^3$	$4.044 \cdot 10^3$	$4.025 \cdot 10^3$	$4.949 \cdot 10^3$	$4.755 \cdot 10^3$	$4.765 \cdot 10^3$

$$C := X1 \cdot Y$$

$$C = \begin{pmatrix} 1.278 \times 10^3 \\ 3.119 \times 10^6 \\ 1.87 \times 10^7 \\ 6.583 \times 10^6 \end{pmatrix}$$

$$S := X1 \cdot X$$

$$S = \begin{pmatrix} 12 & 2.932 \times 10^4 & 1.689 \times 10^5 & 5.99 \times 10^4 \\ 2.932 \times 10^4 & 7.165 \times 10^7 & 4.122 \times 10^8 & 1.462 \times 10^8 \\ 1.689 \times 10^5 & 4.122 \times 10^8 & 2.503 \times 10^9 & 8.742 \times 10^8 \\ 5.99 \times 10^4 & 1.462 \times 10^8 & 8.742 \times 10^8 & 3.079 \times 10^8 \end{pmatrix}$$

$$L := S^{-1}$$

$$L = \begin{pmatrix} 2.208 \times 10^4 & -8.654 & 0.021 & -0.246 \\ -8.654 & 3.392 \times 10^{-3} & -8.077 \times 10^{-6} & 9.597 \times 10^{-5} \\ 0.021 & -8.077 \times 10^{-6} & 7.856 \times 10^{-8} & -4.351 \times 10^{-7} \\ -0.246 & 9.597 \times 10^{-5} & -4.351 \times 10^{-7} & 3.547 \times 10^{-6} \end{pmatrix}$$

$$A := L \cdot C$$

$$A = \begin{pmatrix} 1.963 \times 10^3 \\ -0.772 \\ 1.837 \times 10^{-3} \\ 1.015 \times 10^{-3} \end{pmatrix}$$

Таким чином,  $a_0=1963$ ,  $a_1=-0,772$ ,  $a_2=0,001837$ ,  $a_3=0,001015$ . Звідси економетрична модель набуває вигляду:

$$\hat{y} = 1963 - 0,772 \cdot x_1 + 0,001837 \cdot x_2 + 0,001015 \cdot x_3.$$

Визначимо оцінені значення  $\hat{y}$  залежної змінної  $y$  на основі моделі, підставивши в неї значення незалежних змінних  $x_i$ . Віднявши оцінені значення  $\hat{y}$  від фактичних  $y$ , отримаємо залишки:

$$u_i = \hat{y} - y_i. \quad (5)$$

Розрахунок виконаємо засобами Microsoft Excel і представимо у табл. 2.

Таблиця 2

Розрахунок залишків  $u_i$  математичної моделі

Періоди, $p$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$y_i$	$\hat{y}_i$	$u_i$
1	2469	10824	4083	80,80	80,96	0,16
2	2463	10829	4024	80,84	81,54	0,70
3	2467	10832	4044	80,96	81,48	0,52
4	2464	10833	4025	80,86	84,78	3,92
5	2445	13011	4949	108,49	102,38	-6,11
6	2443	13021	4755	108,41	105,75	-2,66
7	2438	13170	4765	108,17	109,89	1,72
8	2442	13994	4751	108,36	106,21	-2,15
9	2431	21172	6105	130,44	131,36	0,92
10	2425	18261	6125	129,58	130,66	1,08
11	2419	16358	6130	130,33	130,95	0,62
12	2415	16630	6140	130,12	131,40	1,28
$\Sigma$				1196,56	1196,56	0,00

Дамо змістовне тлумачення параметрів моделі. Оцінка параметра  $a_1$  характеризує граничне зростання величини продуктивності праці залежно від зміни чисельності працівників. Тобто, якщо чисельність працівників зросте на 1, то продуктивність праці зменшиться на 0,772 при незмінних інших показниках.

Оцінка параметра  $a_2$  характеризує граничне зростання величини продуктивності праці при збільшенні фонду оплати праці на одиницю. Так, якщо фонд оплати праці збільшиться на 1, то зростання величини продуктивності праці відбудеться на 0,001837 одиниці при незмінних інших показниках.

Оцінка параметра  $a_3$  характеризує граничне зростання величини продуктивності праці при збільшенні нематеріального чинника на одиницю. Так, якщо нематеріальний чинник збільшиться на одиницю, то продуктивність праці зросте на 0,001015 при незмінних інших показниках.

Як бачимо, такий фактор як чисельність працівників має найсуттєвіший вплив на продуктивність праці.

Перевіримо побудовану математичну модель на адекватність за допомогою коефіцієнта детермінації  $D$ , який показує, яка частина варіації  $y$  залежить від врахованих в моделі екзогенних змінних, і обчислюється так:

$$D = \frac{\sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - \bar{y})^2}{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}. \quad (6)$$

Розрахунок показників виконано за допомогою програми Microsoft Excel і представлено у табл. 3.

Таблиця 3

Розрахунок елементів для визначення  $D$

Періоди, $p$	$\hat{y} - \bar{y}$	$(\hat{y} - \bar{y})^2$	$y_i - \bar{y}$	$(y_i - \bar{y})^2$
1	-18,75	351,69	-18,91	357,59
2	-18,17	330,27	-18,87	356,08
3	-18,23	332,45	-18,75	351,56
4	-14,94	223,08	-18,85	355,32
5	2,67	7,11	8,78	77,09
6	6,04	36,44	8,70	75,69
7	10,18	103,64	8,46	71,57
8	6,50	42,21	8,65	74,82
9	31,64	1001,36	30,73	944,33
10	30,95	957,84	29,87	892,22
11	31,24	975,73	30,62	937,58
12	31,69	1004,04	30,41	924,77
$\Sigma$		5365,86		5418,62

Підставивши отримані значення у формулу (6), отримаємо:

$$D = \frac{5365,86}{5418,62} = 0,99026327.$$

Це значення коефіцієнта детермінації свідчить про те, що побудована модель є адекватною і варіація продуктивності праці на 99% визначається варіацією чисельності працівників, фонду оплати праці та нематеріальних чинників.

Розрахуємо коефіцієнт кореляції  $R$ , який дозволяє визначити зв'язок між залежною змінною  $Y$  та незалежними змінними  $X$  за формулою:

$$R = \sqrt{D}, \quad (7)$$

$$R = \sqrt{0,99026327} = 0,99511973.$$

Оскільки, коефіцієнт кореляції наближається до одиниці, то це свідчить про тісний зв'язок між продуктивністю праці, чисельністю працівників, фондом оплати праці, нематеріальним чинником та обсягом виготовленої продукції.

Отже, на основі проведеного аналізу можемо зробити висновок про те, що побудована модель може використовуватися для оцінювання коефіцієнтів еластичності аналізованих чинників, що впливають на продуктивність праці.

Коефіцієнт еластичності  $E_i$  дозволяє побачити, на скільки відсотків впливає зміна 1% одного фактора на результуючий показник:

$$E_i = a_i \cdot \frac{\bar{x}_i}{y}. \quad (8)$$

$$E_1 = -0,772 \cdot \frac{2443,42}{99,71} = -18,91740657; \quad E_2 = 0,001837 \cdot \frac{2443,42}{99,71} = 0,045014606;$$

$$E_3 = 0,001015 \cdot \frac{2443,42}{99,71} = 0,248719788.$$

Із наведених розрахунків видно, що збільшення фонду оплати праці та нематеріальних виплат на 1% дозволить збільшити продуктивність праці на 0,05% і 0,25% відповідно, а збільшення чисельності працівників на 1% призведе до зниження продуктивності праці на 18,92%.

**Висновки.** У роботі побудовано кореляційно-регресійну модель оцінювання продуктивності праці на підприємстві, яка дозволяє виявити



пріоритетні фактори впливу на продуктивність праці, оцінити його, і завдяки цьому прийняти обґрунтовані і своєчасні управлінські рішення.

Побудована модель є адекватною і може використовуватися для оцінювання коефіцієнтів еластичності аналізованих чинників, що впливають на продуктивність праці. Наведені розрахунки показують, що чисельність працівників є найсуттєвішим чинником, який визначає зміну продуктивності праці. Отже, саме він дозволяє ефективно керувати на даному підприємстві цією найважливішою з економічних категорій.

*Література:*

1. Лук'яненко І., Краснікова Л. Економетрика: підручник. – К.: Товариство «Знання». – КОО. – 1998. – 494 с.
2. Магнус К.Л., Катышев Л.О. Эконометрика. М.: Знание, 1995.
3. Красс М.С. Математика для экономических специальностей. – М.: ИНФРА-М., 1998. – 464 с.