

Міністерство освіти і науки, молоді та спорту України  
Вінницький національний технічний університет

Л. К. Поліщук

**ПРИКЛАДНА МЕХАНІКА ТА  
МАТЕРІАЛОЗНАВСТВО**

Вінниця  
ВНТУ  
2011

УДК[621.01+620.22](075)

ББК[34.41+30.3]я73

П50

Рекомендовано до друку Вченою радою Вінницького національного технічного університету Міністерства освіти і науки, молоді та спорту України (протокол № 4 від 25.11.2010 р.)

Рецензенти:

**Є. В. Харченко**, доктор технічних наук професор

**В. І. Савуляк**, доктор технічних наук професор

**І. П. Паламарчук**, доктор технічних наук професор

**Поліщук, Л. К.**

**П50** Прикладна механіка та матеріалознавство: навчальний посібник / Л. К. Поліщук – Вінниця: ВНТУ, 2011. – 209 с.

В навчальному посібнику викладено основні поняття та означення з опору матеріалів, теорії механізмів і машин, триботехніки та матеріалознавства. Розглянуто основи розрахунків деформацій, напружень, на міцність та жорсткість елементів конструкцій механізмів і машин, проблеми їх функціонування, що пов'язані з тертям та зношуванням. Наведено відомості про сучасні конструкційні матеріали та основні механічні передачі, а також приклади розрахунків. Останній розділ посібника містить лабораторний практикум з дисципліни.

Зміст посібника відповідає програмі дисципліни "Прикладна механіка та матеріалознавство" для студентів напрямку підготовки "Менеджмент (організації)", спеціалізація – "Менеджмент машинобудування".

Для студентів немашинобудівних спеціальностей.

**УДК[621.01+620.22](075)**

**ББК[34.41+30.3]я73**

© Л. Поліщук, 2011

## ЗМІСТ

ВСТУП.....	5
РОЗДІЛ 1 Основи статички твердого тіла.....	6
1.1 Основні поняття та означення.....	6
1.2 Система збіжних сил.....	9
1.3 Момент сили відносно точки і відносно осі.....	15
1.4 Пара сил. Система пар.....	17
1.5 Приклади розрахунків.....	22
РОЗДІЛ 2 Геометричні характеристики плоских перерізів.....	28
2.1 Геометричні характеристики плоских перерізів.....	28
2.1.1 Статичні моменти і центр ваги перерізів.....	28
2.1.2 Момент інерції плоских перерізів і радіус інерції.....	29
2.1.3 Головні осі і головні моменти інерції.....	30
2.1.4 Моменти інерції плоских і складних форм перерізів.....	32
2.2 Приклади розрахунків.....	33
РОЗДІЛ 3 Загальні положення про розрахунки на міцність і жорсткість.....	37
3.1 Основні задачі розрахунків на міцність і жорсткість.....	37
3.2 Зовнішні сили та їх класифікація.....	38
3.3 Поняття про напруження. Співвідношення між внутрішніми зусиллями і напруженнями.....	40
3.4 Пружні деформації та їх зв'язок з напруженнями.....	43
3.5 Основи теорії напружень.....	45
3.6 Загальні принципи розрахунків на міцність.....	47
3.7 Побудова епюр внутрішніх сил.....	51
3.8 Побудова епюр крутних моментів.....	54
3.9 Епюри поперечних зусиль і згинальних моментів.....	55
3.10 Приклади розрахунків.....	60
РОЗДІЛ 4 Основні поняття з теорії механізмів і машин.....	64
4.1 Загальні означення, структура і класифікація механізмів.....	64
4.2 Особливості будови поширених видів механізмів.....	73
4.3 Задачі синтезу і аналізу механізмів і машин.....	80
4.4 Приклад структурного аналізу механізму.....	80
РОЗДІЛ 5 Триботехніка спряжених елементів машин.....	83
5.1 Види тертя та його основні закономірності.....	83
5.2 Тертя різних кінематичних пар.....	86
5.3 Види зношування елементів кінематичних пар та стійкість деталей зношування.....	88
5.4 Шляхи зменшення зношування деталей машин.....	97
РОЗДІЛ 6 Конструкційні матеріали та їх властивості.....	100
6.1 Фізичні, хімічні, механічні властивості конструкційних матеріалів.....	100

6.2 Технологічні і експлуатаційні властивості конструкційних матеріалів.....	102
6.3 Класифікація конструкційних матеріалів.....	103
6.3.1 Конструкційні матеріали на основі заліза.....	103
6.3.2 Конструкційні матеріали на основі міді.....	110
6.3.3 Конструкційні матеріали на основі алюмінію.....	112
6.3.4 Конструкційні матеріали на основі магнію і титану.....	114
6.3.5 Композиційні конструкційні матеріали.....	116
6.3.6 Порошкові конструкційні матеріали.....	118
6.3.7 Неметалеві конструкційні матеріали.....	120
РОЗДІЛ 7 Механічні передачі.....	122
7.1 Загальні відомості про механічні передачі. Призначення, класифікація, основні характеристики передач.....	122
7.2 Фрикційні передачі.....	125
7.3 Пасові передачі.....	129
7.4 Зубчасті передачі.....	135
7.5 Приклади розрахунків.....	141
РОЗДІЛ 8 Лабораторний практикум.....	144
<b>Лабораторна робота № 1. Визначення механічних характеристик низьковуглецевої сталі.....</b>	<b>144</b>
<b>Лабораторна робота № 2. Визначення модуля пружності та коефіцієнта поперечної деформації.....</b>	<b>150</b>
<b>Лабораторна робота № 3. Випробування різних матеріалів на стискання.....</b>	<b>155</b>
<b>Лабораторна робота № 4. Складання кінематичних схем та структурний аналіз механізмів.....</b>	<b>160</b>
<b>Лабораторна робота № 5. Визначення основних геометричних параметрів евольвентних циліндричних прямозубих зубчастих коліс.....</b>	<b>174</b>
<b>Лабораторна робота № 6. Моделювання процесу виготовлення зубчастих коліс методом обкочування.....</b>	<b>183</b>
<b>Лабораторна робота № 7. Визначення матеріалів на твердість та ударну в'язкість.....</b>	<b>192</b>
<b>ЛІТЕРАТУРА.....</b>	<b>205</b>
<b>Українсько-англійський словник найбільш важливих термінів.....</b>	<b>207</b>

## ВСТУП

“Прикладна механіка та матеріалознавство” (ПММ) є загально-інженерною дисципліною, що входить до навчальних планів вищих навчальних закладів, за якими навчають студентів за напрямом підготовки – “Менеджмент (організації)”, спеціалізація – “Менеджмент машинобудування”.

Навчальний посібник призначений для формування у студентів загального уявлення про методи аналізу і розрахунки деталей з різних матеріалів механічних систем. Посібник можна умовно розділити на дві частини: перша – теоретичні основи розрахунків основних характеристик технічних об’єктів для забезпечення їх функціонування; друга – лабораторний практикум.

Враховуючи малий плановий обсяг лекційних та лабораторних занять з дисципліни ПММ та передумови її вивчення для студентів зазначеного напрямку підготовки, основний матеріал цього посібника подано розділами, які, на думку автора, є найхарактернішими для специфіки цієї спеціалізації і допоможуть успішно опанувати такі загальноінженерні дисципліни.

В першій частині викладено основи статички твердого тіла, геометричні характеристики плоских перерізів, основи розрахунків на міцність і жорсткість деталей машин, основні поняття з теорії механізмів і машин, трибототехніка спряжених елементів технічних об’єктів, механічних передач, а також основні властивості та характеристики конструкційних матеріалів, які найбільш поширені в машинобудуванні.

З метою отримання навичок для розв’язування практичних інженерних задач в кінці відповідних розділів наведено приклади розрахунків параметрів елементів механічних систем.

В другій частині подано лабораторний практикум дисципліни, який дозволяє студентам розвинути уміння досліджувати та аналізувати важливі характеристики технічних об’єктів і закріпити теоретичні знання. Теоретичні відомості, що розміщені в кожній лабораторній роботі, доповнюють відповідні розділи посібника, розширюючи коло розглянутих питань.

Для більш глибокого ознайомлення з окремими питаннями прикладної механіки та матеріалознавства та методами розв’язування інженерних задач посібник містить список літератури із 21 джерела. В кінці посібника наведено українсько-англійський глосарій найбільш важливих термінів.

Посібник може бути використано студентами немеханічних спеціальностей, що вивчають основи розрахунків елементів різних технічних об’єктів.



# Основи статички твердого тіла

## 1.1 Основні поняття та означення

**Механіка** (mechanics) – це наука, в якій вивчаються загальні закони механічного руху і механічної взаємодії матеріальних тіл. *Механічним* рухом називають зміну положення матеріального тіла у просторі, що відбувається у часі. Стан спокою є частковим випадком руху.

Загальна механіка складається з трьох частин: статички, кінематики і динаміки.

**Статика** (statics) – це розділ механіки, у якому вивчаються методи перетворення системи сил у еквівалентні системи, а також обґрунтовуються умови рівноваги твердих тіл під дією прикладених до них сил.

**Кінематика** (kinematics) вивчає геометричні властивості руху матеріальних тіл.

**Динаміка** (dynamics) – це розділ механіки, у якому вивчається рух матеріальних тіл у безпосередньому зв'язку з механічною взаємодією тіл.

Незважаючи на те, що при взаємодії тіла змінюють свою форму (деформуються), при розв'язуванні задач статички з метою їх спрощення тіла вважають матеріальними точками, а також абсолютно твердими.

**Матеріальна точка** (material point) – це геометрична точка, у якій зосереджена маса всього тіла. Як матеріальні точки нерідко розглядають не лише дуже малі, а й великі тіла, розмірами яких за умовою задачі можна знехтувати.

*Абсолютно твердим*, або просто **твердим тілом** (rigid body), називають систему незмінно пов'язаних між собою матеріальних точок. Відстані між будь-якими двома точками абсолютно твердого тіла є сталими.

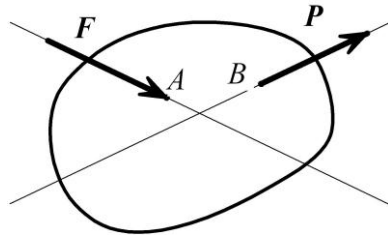


Рисунок 1.1 – Зображення сил та їх лінії дії.

Одним із найважливіших понять механіки є поняття сили. **Сила** (force) – це міра механічної взаємодії матеріальних точок. Сила є векторною величиною і визначається абсолютним значенням або модулем, напрямом дії та точкою прикладання. Пряма, вздовж якої діє сила, називається *лінією дії сили*. Одиниця вимірювання сили 1 ньютон (Н). Вектор зображується  $\vec{F}$  або  $F$ . На схемах риски іноді

упускаються. Сукупність сил, щò дїють на тїло, називаються *системою сил*.

Системи сил, під дією кожної з яких твєрде тїло перебуває в однаковому кінематичному стані (русі чи спокої), називаються *еквівалентними*. Сила, щò еквівалентна деякій системі сил, називається *рівнодійною* даної системи.

Система сил, рівнодійна якої дорівнює нулю, називається *зрівноваженою* (balancing). Сила, щò у сукупності з рівнодійною утворює зрівноважену систему, називається *зрівноваженою* силою.

**Аксіоми статички.** Статика ґрунтується на п'яти аксіомах, тобто твердженнях, які прийняті без доведення, щò сформульовані на підставі досвіду спостереження явищ природи.

*Перша (аксіома інерції).* Система сил, прикладених до матеріальної точки, є зрівноваженою, якщо під дією цих сил точка перебуває в стані спокою чи рівномірного прямолінійного руху.

*Друга (аксіома про рівновагу двох сил).* Дві сили, прикладені до абсолютно твєрдогò тїла, щò є рівними за абсолютними величинами і направленими вздовж однієї прямої у протилежні сторони, взаємно зрівноважуються.

*Третя (аксіома про додавання або віднімання зрівноваженої системи сил).* Кінематичний стан абсолютно твєрдогò тїла не порушиться, якщо до даногò тїла прикласти або відкинути прикладену до ньогò зрівноважену систему сил.

*Наслідок 2 та 3 аксіом:* будь-яку силу, щò діє на абсолютно твєрде тїло, можна перенести уздовж лінії дії в будь-яку точку, не порушивши при цьому кінематичний стан тїла.

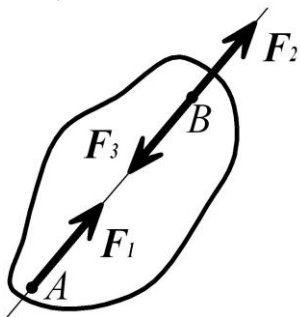


Рисунок 1.2 – До пояснення наслідка другої та третьої аксіом статички

На тїло, щò зображене на рис 1.2, діє сила  $F_1$ , щò прикладена в точці  $A$ . Сили  $F_2$  і  $F_3$ , які прикладені в точці  $B$ , рівні за величиною силі  $F_1$  і протилежні за напрямом між собою. Рівні за модулем і протилежно направлені сили  $F_1$  і  $F_3$  можна відкинути. Отже, силу  $F_1$  можна замінити на силу  $F_2$ , шляхом перенесення вектора уздовж лінії дії з точки  $A$  в точку  $B$ .

*Четверта (аксіома про додавання двох сил).* Рівнодійна двох сил, прикладених в одній точці, прикладена в тій самій точці і зображується діагоналлю паралелограма, дві суміжні сторони якого збігаються з відрізками, котрими зображуються вектори сил.

Інша назва аксіоми – правило паралелограма сил.

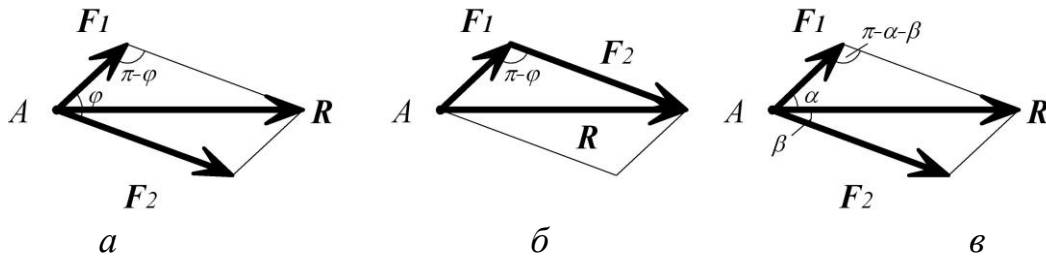


Рисунок 1.3 – До пояснення четвертої аксіоми статички

Рівнодійна двох сил знаходиться шляхом побудови паралелограма (рис. 1.3, а) або трикутника (рис. 1.3, б).

Сила  $\mathbf{R}$ , яка є рівнодійною двох сил  $\mathbf{F}_1$  та  $\mathbf{F}_2$ , знаходиться з векторного рівняння

$$\vec{\mathbf{R}} = \vec{\mathbf{F}}_1 + \vec{\mathbf{F}}_2. \quad (1.1)$$

За теоремою косинусів визначається модульне значення рівнодійної  $R$ :

$$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 - 2F_1F_2 \cos(\pi - \varphi)} = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2 \cos \varphi}. \quad (1.2)$$

Згідно з аксіомою сили  $\mathbf{F}_1$  і  $\mathbf{F}_2$  можна замінити на  $\mathbf{R}$  і навпаки – розкласти силу  $\mathbf{R}$  на  $\mathbf{F}_1$  і  $\mathbf{F}_2$  за відомими напрямками дій цих сил. Цим користуємося при розв’язуванні задач статички.

З рис. 1.3, в за теоремою синусів отримуємо співвідношення,

$$F_1/\sin\beta = F_2/\sin\alpha = R/\sin[\pi - \alpha - \beta] = R/\sin(\alpha + \beta), \quad (1.3)$$

з яких визначаються сили  $F_1$  і  $F_2$ :

$$F_1 = R \sin\beta / \sin(\alpha + \beta); \quad F_2 = R \sin\alpha / \sin(\alpha + \beta). \quad (1.4)$$

*П’ята (аксіома про рівність дії і протидії).* Будь-якій дії одного матеріального тіла на інше відповідає рівна за абсолютною величиною і протилежно направлена протидія. Необхідно зауважити, що ці сили не зрівноважують одна одну, оскільки вони прикладені до різних тіл.

У статисти користуються поняттям в’язей та їх реакціями.

Тїло, переміщенню якого в просторі не заважає жодне інше тїло, є **вільним**. Якщо ж переміщенню тїла в одному чи декількох напрямках чинять перешкоди інші тїла, то воно називається *пов’язаним*.

Тїла, що обмежують рух певного тїла у просторі називають **в’язями** (links), а сили, що діють з боку в’язей – *реакціями в’язей*.

Розглянемо основні типи в’язей.



*Нитка* (рис. 1.4, а). Закріплення її до основи тіла в точці  $M$  не дає цій точці віддалитися від точки  $A$ . Реакція такої в'язі  $T$  направлена вздовж нитки від точки  $M$  до точки  $A$ .

*Ідеальна гладка поверхня* (рис. 1.4, б). Обмежує рух тіла в напрямку, перпендикулярному до поверхні, і в цьому ж напрямку направлена реакція  $N$  в'язі.

*Нерухомий циліндричний шарнір* (рис. 1.4, в). Утворюється циліндричною втулкою, жорстко з'єднаною з тілом, яка встановлена на нерухомий циліндричний стержень. Рух втулки обмежується стержнем в будь-якому напрямку перпендикулярному до його осі. Реакція в'язі  $R$  лежить в площині  $xAy$ , в якій тіло може здійснювати обертання.

*Рухомий циліндричний шарнір* (рис. 1.4, г). Утворюється невагомою опорою, шарнірно з'єднаною з тілом і встановленою на основі з можливістю переміщення без тертя у певному напрямку. Реакція такої опори  $R$  направлена перпендикулярно до можливого переміщення опори.

*Нерухоме зацємлення стержня* (рис. 1.4, д). Виключає можливі переміщення стержня у напрямках осей  $x$  та  $y$  та можливість обертання в площині  $xy$ . Реакціями є сила  $R$  та момент  $M$ .

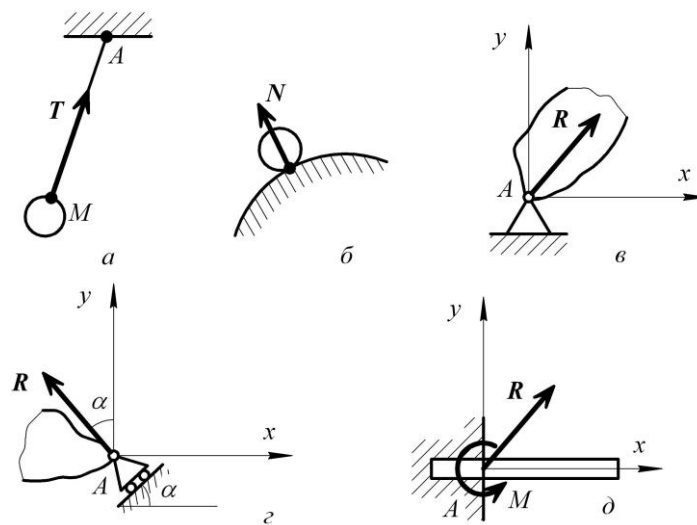


Рисунок 1.4 – Основні типи в'язей та їх реакції

Принцип звільнення твердих тіл від в'язей або *аксіома в'язей*: будь-яке пов'язане тіло можна розглядати як вільне, якщо відкинути в'язі та замінити їх дію реакціями в'язей.

## 1.2 Система збіжних сил

*Збіжними силами* (convergent forces) є сили лінії дії яких перетинаються в одній точці.

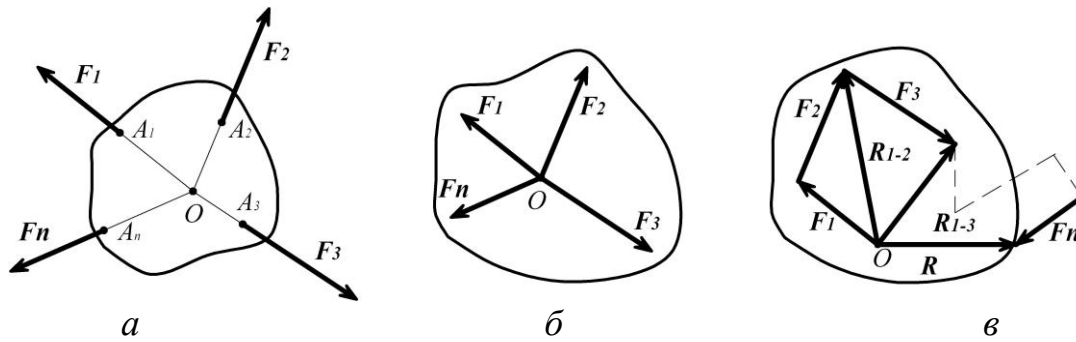


Рисунок 1.5 – Зведення системи збіжних сил до рівнодійної

Розглянемо тіло, до якого у точках  $A_1, A_2, \dots, A_n$  прикладено збіжні сили  $F_1, F_2, \dots, F_n$  (рис 1.5, а). Згідно з наслідком, що випливає з 2-ї та 3-ї аксіом, ці сили можуть бути перенесені в точку  $O$  перетину їх ліній дій (рис 1.5, б). Застосувавши аксіому додавання сил, отримаємо (рис. 1.5, в).

$$R_{1-2}=F_1+F_2; \quad R_{1-3}=R_{1-2}+F_3=F_1+F_2+F_3; \dots; \quad R=F_1+F_2+\dots+F_n \quad (1.5)$$

Отже, рівнодійна системи збіжних сил прикладена у точці перетину ліній дії цих сил і дорівнює їхній геометричній сумі.

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \quad (1.6)$$

Це твердження є справедливим не лише для плоскої системи сил, але й для просторової системи збіжних сил. Розглянемо просторову систему, що складається з трьох сил  $F_1, F_2, F_3$  (рис 1.6). Шляхом послідовної побудови двох паралелограмів отримаємо рівнодійну  $R$  цих сил, яка зображується діагоналлю паралелепіпеда. Тому правило складання трьох сил, які утворюють просторову систему, називається *правилом паралелепіпеда сил*. Це правило дозволяє будь-яку силу розкласти за трьома напрямками у просторі.

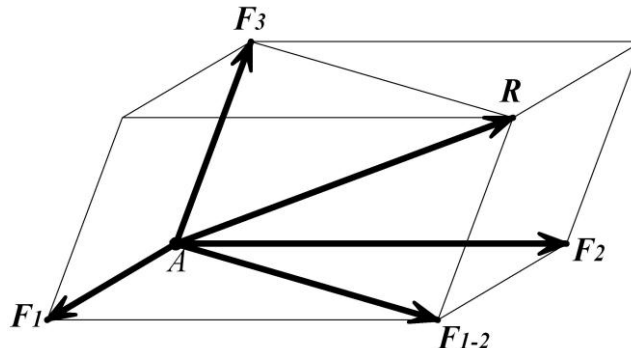


Рисунок 1.6 – Додавання просторової системи трьох сил

Збіжні сили зрівноважуються, коли їх рівнодійна дорівнює нулю. В цьому випадку багатокутник всіх діючих сил є замкнутим.

Умова рївноваги системи збїжних сил має вигляд:

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_i = 0 \quad (1.7)$$

Метод розв'язування задач статички, в якому використовується векторне рївняння (1.7), називається *геометричним*.

Розглянемо *аналїтичний спосїб* визначення рївнòдїйної системи збїжних сил.

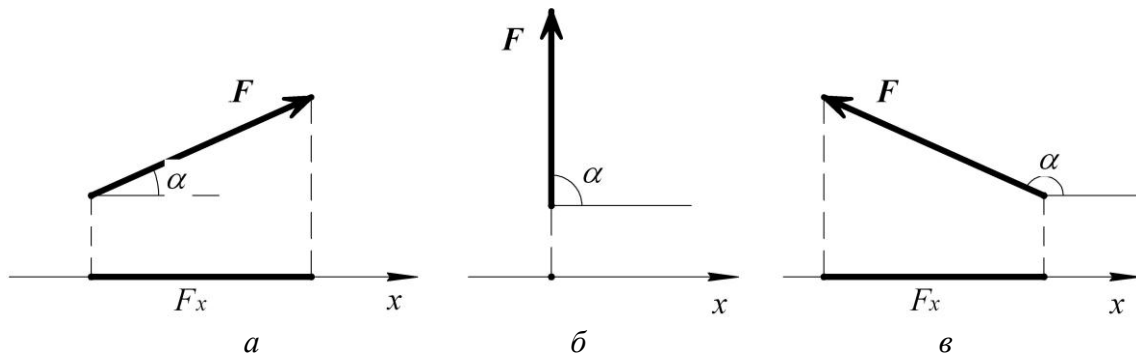
Для виконання аналїтичних перетворень системи сил, а також для запису аналїтичних рївнянь рївноваги, використовується поняття проекції сили на вїсь.

**Проекцією** сили на вїсь називається добуток модуля сили на косинус кута мїж напрямками сили та осї. Проекція сили є величина алгебраїчна.

Модуль проекції визначається довжиною вїдрїзка мїж проекціями точок початку та кїнця вектора сили.

Визначимо проекції сили  $F$  на вїсь  $x$  для трьох випадків, що наведенї на (рис. 1.7).

Якщо  $0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$  (рис. 1.7, а), то  $F_x = F \cos \alpha > 0$  і проекція додатна. Якщо  $\alpha = 90^\circ$  (рис. 1.7, б), то  $F_x = F \cos \alpha = 0$  і проекція рївна нулю. Якщо  $90^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$  (рис. 1.7, в), то  $F_x = F \cos \alpha < 0$  і проекція вїд'ємна.



Рисунк 1.7 – Характерні випадки визначення проекцій сили на вїсь

Розглянемо плоску систему сил, скориставшись взаємно перпендикулярними осями координат  $xOy$ . Силу  $F$  можна розкласти на двї складовї  $F_x$  та  $F_y$ , які є паралельними вїдповїдним осям координат. Тодї справедливим буде векторне рївняння

$$\vec{F} = F_x + F_y. \quad (1.8)$$

Проекції складових сили  $F$  знаходяться у виглядї

$$F_x = F \cos \alpha; \quad F_y = F \cos \beta. \quad (1.9)$$

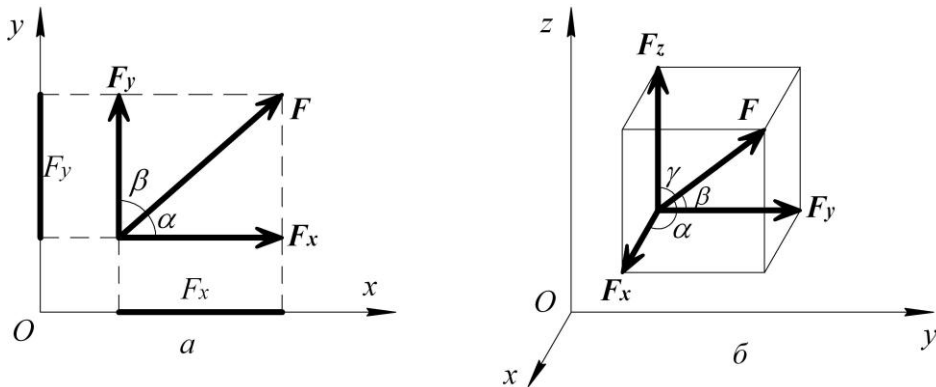


Рисунок 1.8 – Розкладання вектора сили на складові, паралельні до координатних осей

Якщо  $F_x$  та  $F_y$  відомі, то модуль сили  $F$  визначиться за формулою

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}, \quad (1.10)$$

а напрям сили –

$$\cos \alpha = \frac{F_x}{\sqrt{F_x^2 + F_y^2}}, \quad \cos \beta = \frac{F_y}{\sqrt{F_x^2 + F_y^2}}. \quad (1.11)$$

В просторовій системі сил складові сили  $F$ , які позначаються  $F_x$ ,  $F_y$ ,  $F_z$ , також паралельні відповідним осям (рис 1.8, б). Проекції цих сил на координатні осі позначаються  $F_x$ ,  $F_y$ ,  $F_z$ .

Для вектора сили  $F$  запишемо залежність

$$\mathbf{F} = F_x \mathbf{i} + F_y \mathbf{j} + F_z \mathbf{k}. \quad (1.12)$$

Проекції складових цієї сили визначаються за виразами:

$$F_x = F \cos \alpha; \quad F_y = F \cos \beta; \quad F_z = F \cos \gamma. \quad (1.13)$$

Модуль сили та напрям її вектора знаходяться за формулами

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2},$$

$$\cos \alpha = \frac{F_x}{\sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}}; \quad \cos \beta = \frac{F_y}{\sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}}; \quad \cos \gamma = \frac{F_z}{\sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}}. \quad (1.14)$$

Ці вирази дозволяють за проекціями на координатні осі визначити вектор сили або за відомими модулем сили та кутами, що утворює її вектор з осями координат, знайти проекції цієї сили.

Розглянемо систему збіжних сил  $F_1, F_2, \dots, F_n$  (рис. 1.9).

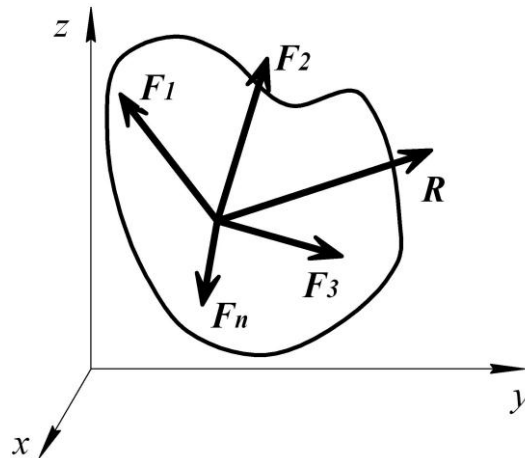


Рисунок 1.9 – До пояснення аналітичних умов рівноваги системи збіжних сил

Рівнодійну цих сил  $R$  можна знайти як їх геометричну суму. Проекція геометричної суми цих сил на кожну з осей координат дорівнює алгебраїчній сумі проєкцій усіх складових:

$$R_x = \sum_{i=1}^{n=3} \vec{F}_{xi}, R_y = \sum_{i=1}^{n=3} \vec{F}_{yi}, R_z = \sum_{i=1}^{n=3} \vec{F}_{zi}, \quad (1.15)$$

де,  $F_{xi}, F_{yi}, F_{zi}, R_x, R_y, R_z$  – проєкції сил системи і рівнодійної на відповідні осі координат, що визначаються як

$$F_{xi} = F_i \cos \alpha_i; F_{yi} = F_i \cos \beta_i; F_{zi} = F_i \cos \gamma_i, \quad (1.16)$$

$$R_x = R \cos \alpha; R_y = R \cos \beta; R_z = R \cos \gamma.$$

У виразах (1.16)  $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$  – кути, що утворюють вектори сил  $F_1, F_2, \dots, F_n$  з осями декартової системи координат, а  $\alpha, \beta, \gamma$  – кути, що утворені рівнодійною  $R$  з відповідними осями координат. За отриманими із співвідношень (1.15) значеннями проєкцій рівнодійної, її модуль і напрям визначиться за формулами:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2},$$

$$\cos \alpha = R_x/R, \quad \cos \beta = R_y/R, \quad \cos \gamma = R_z/R. \quad (1.17)$$

У випадку, коли сили системи взаємно зрівноважуються, їх рівнодійна  $R$  дорівнює нулю. Тоді із першого співвідношення (1.17) отримуємо вирази

$$R_x = 0; R_y = 0; R_z = 0. \quad (1.18)$$

Відповідно умова рівноваги просторової системи сил, з урахуванням (1.15) та (1.18), має вигляд

$$\sum_{i=1}^{n=3} \vec{F}_{xi} = 0; \quad \sum_{i=1}^{n=3} \vec{F}_{yi} = 0; \quad \sum_{i=1}^{n=3} \vec{F}_{zi} = 0. \quad (1.19)$$

Отже, для *рівноваги просторової системи збіжних сил* необхідно і достатньо щоб суми проекцій всіх сил системи на осі координат  $x$ ,  $y$ ,  $z$  дорівнювали нулю.

Відповідно для *рівноваги плоскої системи збіжних сил* необхідно і достатньо щоб суми проекцій всіх сил на осі декартових координат  $x$ ,  $y$  дорівнювали нулю.

Тоді рівняння рівноваги набувають вигляд

$$\sum_{i=1}^{n=3} \vec{F}_{xi} = 0; \quad \sum_{i=1}^{n=3} \vec{F}_{yi} = 0. \quad (1.20)$$

Розв'язування задач статистики із застосуванням рівнянь рівноваги (1.19) або (1.20) є *аналітичним* методом їх розв'язку.

Найчастіше задачею статистики є визначення реакцій в'язей матеріального тіла. Іноді до числа невідомих належать деякі активні сили, геометричні параметри, що визначають розміри або положення одного і того ж тіла, сили взаємодії матеріальних тіл.

Розв'язання задач статистики виконується в такій послідовності:

- вибираємо тіло, рівновага якого має бути розглянута (іноді це може бути декілька тіл);
- звільняємо тіло від в'язей, складаємо його розрахункову схему з позначенням усіх навантажень і реакцій в'язей;
- складаємо рівняння рівноваги;
- визначаємо шукані величини, виконуємо перевірку та аналіз отриманих значень.

*Геометричним методом* задачі статистики можуть бути розв'язані у випадку:

- коли невідома лінія дії, абсолютна величина та напрям дії однієї з сил;
- коли невідомі напрями дії та абсолютні величин двох сил;
- коли невідомі абсолютна величина і напрям дії однієї сили та лінія дії іншої.

Аналітичним методом зручно користуватися для плоских і просторових систем.

Для плоскої системи збіжних сил можна скласти два рівняння рівноваги, причому число невідомих, що входять до цих рівнянь, не

повинно перевищувати два. В іншому випадку задача не може бути розв'язана методами статички і відноситься до класу статично невизначених задач.

### 1.3 Момент сили відносно точки і відносно осі

*Алгебраїчний момент сили* (moment of force) *відносно точки*. Щоб охарактеризувати обертальну дію сили навколо того чи іншого центра, необхідно ввести поняття моменту сили відносно точки. Якщо сили, що діють на тіло, лежать в одній площині, котра збігається з площиною рисунка, зручно користуватись поняттям моменту як алгебраїчної величини.

*Алгебраїчним моментом сили  $F$  відносно точки  $O$*  (рис. 1.10, а) називається величина, що дорівнює взятому з відповідним знаком добуткові модуля сили на її плече  $h$ :

$$M_O(F) = \pm F \cdot h. \quad (1.21)$$

*Плечем сили* відносно точки називається відстань від даної точки до лінії дії сили.

Момент сили відносно точки вважається додатним, якщо сила  $F$  намагається повернути тіло у площині рисунка в напрямі, протилежному до напрямку обертання годинникової стрілки, і від'ємним – якщо в напрямі руху годинникової стрілки.

За одиницю моменту сили приймають 1 ньютонметр (Н·м).

Відмітимо основні властивості моменту:

1) момент сили відносно точки не зміниться, якщо точку прикладання сили перенести уздовж лінії дії цієї сили;

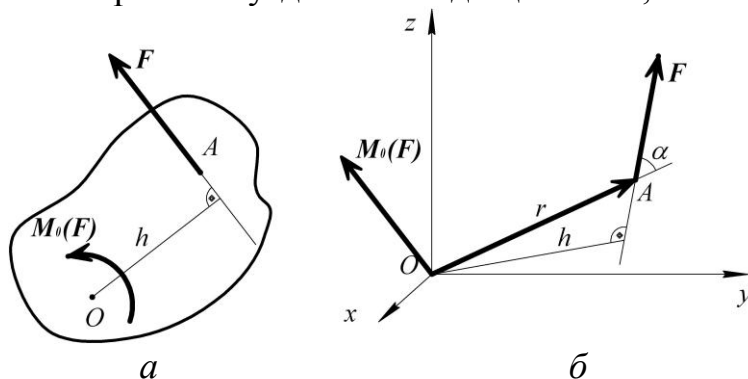


Рисунок 1.10 – До визначення алгебраїчного і векторного моментів сили відносно точки

2) момент сили відносно точки дорівнює нулю, якщо лінія дії сили проходить через дану точку.

*Векторний момент сили відносно точки.* Обертальна дія довільно розташованої у просторі сили  $\mathbf{F}$  відносно деякого центра  $O$  характеризується такими факторами: абсолютною величиною моменту сили  $\mathbf{F}$  відносно точки  $O$ ; розташуванням площини дії моменту, тобто площини, що проходить через точку  $O$  і лінію дії сили  $\mathbf{F}$ ; напрямом обертальної дії сили  $\mathbf{F}$  відносно точки  $O$  у цій площині. Тому момент сили  $\mathbf{F}$ , відносно точки  $O$  (рис. 1.10, б) зображають прикладенням у цій точці вектором  $\mathbf{M}_O(\mathbf{F})$ , перпендикулярним до площини, що проходить через точку  $O$  і лінію дії сили  $\mathbf{F}$ , і направленим таким чином, щоб з його кінця обертальна дія сили спостерігалася направленою проти руху стрілки годинника. За абсолютною величиною вектора  $\mathbf{M}_O(\mathbf{F})$  дорівнює добуткові модуля сили  $\mathbf{F}$  на плече цієї сили відносно точки  $O$ .

Якщо з точки  $O$  провести радіус-вектор  $\mathbf{r}$  у точку  $A$  (рис. 1.10, б), то вектор моменту сили можна подати як векторний добуток

$$\mathbf{M}_O(\mathbf{F}) = \mathbf{r} \times \mathbf{F}. \quad (1.22)$$

Векторний добуток  $\mathbf{r} \times \mathbf{F}$  є вектором, перпендикулярним до площини розташування векторів  $\mathbf{r}$  і  $\mathbf{F}$  і направленим у той бік, з якого поворот вектора  $\mathbf{r}$  для його суміщення з вектором  $\mathbf{F}$  на кут  $\alpha$  ( $\alpha \leq 180^\circ$ ), спостерігається проти руху стрілки годинника. Модуль векторного добутку дорівнює модулю моменту сили  $\mathbf{F}$  відносно точки  $O$ :

$$|\mathbf{r} \times \mathbf{F}| = r \cdot F \cdot \sin \alpha = F \cdot h = |\mathbf{M}_O(\mathbf{F})| \quad (1.23)$$

*Момент сили відносно осі.* Обертальна дія сили навколо деякої осі характеризується моментом сили відносно цієї осі. Моментом сили  $\mathbf{F}$  відносно осі  $z$  називається алгебраїчна величина, яка чисельно дорівнює взятому зі знаком плюс або мінус добуткові модуля проекції відносно точки  $O$  перетину осі з площиною:

$$M_z(\mathbf{F}) = \pm F_{xy} \cdot h \quad (1.24)$$

Момент сили відносно осі вважається додатним, якщо з кінця осі  $z$  обертальна дія проекції  $\mathbf{F}_{xy}$  навколо точки  $O$  спостерігається направленою проти руху стрілки годинника.

Момент сили відносно осі дорівнює нулю у таких випадках:

- 1) якщо  $F_{xy} = 0$ , тобто коли сила  $\mathbf{F}$  є паралельною до осі  $z$ ;
- 2) якщо  $h = 0$ , тобто коли лінія дії сили  $\mathbf{F}$  перетинається з віссю  $z$ .

Залежність між моментом сили відносно точки і моментом сили відносно осі, що проходить через цю точку, визначається теоремою, яку наведемо без доведення: *проекція вектора моменту сили відносно деякої*



точки на вісь, що проходить через цю точку, дорівнює моментів сили відносно даної осі.

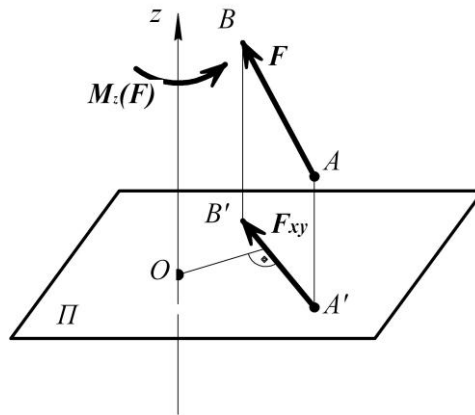


Рисунок 1.11 – До визначення моменту сили відносно осі

*Теорема Варіньйона* дозволяють сформулювати важливі властивості плоскої та просторової систем збіжних сил. Наведемо ці теореми без доведення.

1. Алгебраїчний момент рівнодійної плоскої системи збіжних сил відносно будь-якої точки дорівнює алгебраїчній сумі моментів складових сил відносно тієї самої точки.

2. Момент рівнодійної просторової системи збіжних сил відносно будь-якої осі дорівнює алгебраїчній сумі моментів усіх складових сил відносно тієї самої осі.

#### 1.4 Пара сил. Система пар

**Парою сил** (pair of forces) називається система двох сил рівних за модулем, паралельних і направлених у протилежних напрямках (рис. 1.12, а). Площина, в якій розташовані сили, є площиною дії пари. Відстань  $h$  між лініями дії сил пари є *плечем пари*.

Сили, що утворюють пару, не зрівноважують одна одну, оскільки діють не уздовж однієї прямої. Крім того, пара не має рівнодійної.

Дія пари сил на тверде тіло характеризується її моментом. Якщо усі пари, які ми розглядаємо, розташовані в одній площині, то користуються поняттям алгебраїчного моменту пари.

*Алгебраїчним моментом пари* називають величину, що дорівнює взятому з відповідним знаком добутку однієї з сил на плече пари:

$$M = \pm F \cdot h. \quad (1.25)$$

Момент пари буде додатним, якщо пара намагається повернути тіло у площині рисунку проти руху стрілки годинника (рис. 1.12, б), і – від'ємним, якщо в напрямі руху стрілки годинника (рис. 1.12, в).

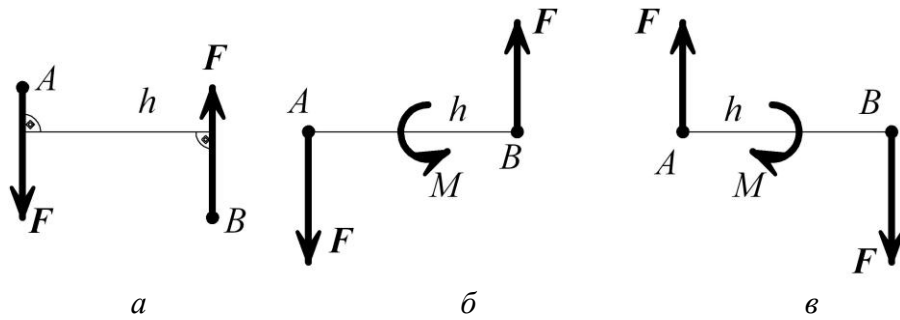


Рисунок 1.12 – До пояснення пари сил і алгебраїчного моменту пари

Алгебраїчний момент пари сил чисельно дорівнює алгебраїчному моменту однієї з сил пари відносно точки прикладання іншої сили даної пари тобто

$$M = M_A(F') = M_B(F). \quad (1.26)$$

Коли розглядається система моментів пар, що не лежать в одній площині, то момент пар зображають вектором  $\mathbf{M}$ , модуль якого дорівнює модулю алгебраїчного моменту пари, направленому перпендикулярно до площини дії пари у той бік, з якого спостерігається напрям дії моменту проти годинникової стрілки.

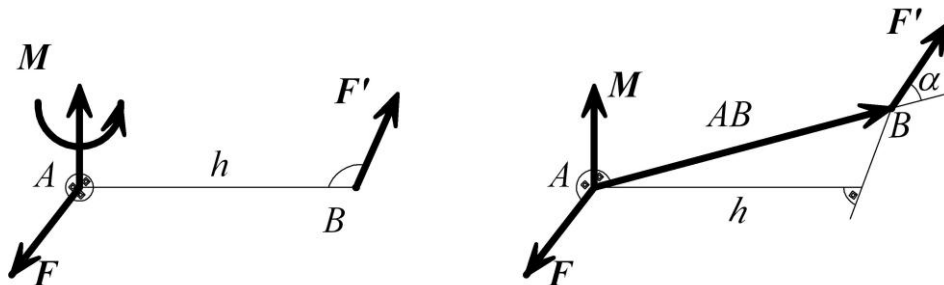


Рисунок 1.13 – До пояснення векторного моменту пари сил

Векторний момент  $\mathbf{M}$  пари сил  $\mathbf{F}$  та  $\mathbf{F}'$  (рис. 1.13) може бути визначений як векторний добуток вектора  $\mathbf{AB}$ , що з'єднує точки прикладання сил, і сили  $\mathbf{F}'$ , тобто

$$\mathbf{M} = \mathbf{AB} \times \mathbf{F}', \quad (1.27)$$

а модуль вектора

$$M = AB \cdot F \cdot \sin \alpha = Fh. \quad (1.28)$$

Векторний момент пари сил визначається як вектор моменту однієї з сил пари, відносно точки прикладання іншої сили цієї пари

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_A(\mathbf{F}') = \mathbf{M}_B(\mathbf{F}) \quad (1.29)$$

Властивїсть пари сил визначається теоремою, яку подаємо без доведення: *алгебраїчна сума моментів сил відносно будь-якого центра, що лежить у площині дії пари, не залежить від вибору цього центра і дорівнює моментів пари.*

Для встановлення *еквівалентності пар* доведено таку теорему: механічна дія на абсолютно тверде тіло не зміниться, якщо прикладену до нього пару сил замінити іншою парою, що лежить у тій же площині і має той самий момент.

З цієї теореми випливають такі наслідки:

- дія пари сил на абсолютно тверде тіло не зміниться, якщо цю пару перенести в площині її дії в будь-яке місце;
- дія пари сил на абсолютно тверде тіло не зміниться, якщо довільно замінити модуль сил і плече, залишивши незмінним момент пари.

Таким чином, дві пари, що розташовані в одній площині і мають однакові моменти є еквівалентними. Дія пари сил на абсолютно тверде тіло повністю характеризується площиною дії пари та моментом пари. Щоб задати пару в деякій площині достатньо задати її момент.

Розглянемо другу теорему: дія пари сил на абсолютно тверде тіло не зміниться, якщо цю пару перенести із заданої площини в будь-яку іншу площину, паралельну до даної.

Отже, дві пари, що розташовані в паралельних площинах і мають однакові моменти, є еквівалентними.

З наведених теорем можна зробити висновок, що дія пара сил на тверде тіло не зміниться, якщо пару перенести у будь-яку іншу площину, паралельну до площини дії пари, а також якщо змінити сили і плече пари, залишивши незмінними модуль і напрям моменту пари.

Вектор моменту пари сил можна перенести в будь-яку іншу точку, тобто він є *вільним* вектором і враховує всі три елементи пари: положення площини дії пари, напрям обертальної дії у цій площині і числове значення моменту.

Наведемо теорему, про додавання пар розташованих в одній площині, без доведення: система пар, що розташована в одній площині, еквівалентна одній парі, що лежить у тій самій площині і має момент який дорівнює алгебраїчній сумі моментів усіх пар системи, тобто

$$M = \sum_{i=1}^n M_i, \quad (1.30)$$

де  $n$  – число пар.

З цієї теореми випливає, що для рівноваги плоскої системи пар необхідно і достатньо, щоб алгебраїчна сума моментів усіх пар системи дорівнювала нулю:

$$\sum M_i = 0. \quad (1.31)$$

Тобто, для плоскої системи пар можна скласти лише одне алгебраїчне рівняння рівноваги (1.31).

Доведемо теорему про паралельне перенесення сили. До твердого тіла в точці  $A$  прикладена сила  $F$  (рис. 1.14,  $a$ ). В довільну точку  $O$  перенесемо зрівноважену систему сил  $F'$  та  $F''$ , які рівні за величиною силі  $F$  і протилежно направлені одна одній. Сила  $F'$  є результатом паралельного перенесення сили  $F$  з точки  $A$  в точку  $O$ . При цьому утворилась пара сил  $F''$ ,  $F$ , момент якої  $M$  визначається як момент сили  $F$  відносно точки  $O$ , тобто

$$M = M_0(F). \quad (1.32)$$

Таким чином, за допомогою еквівалентних перетворень сила  $F$  замкнена силою  $F'$  та моментом пари  $M$ .

Отже, дія сили на абсолютно тверде тіло не зміниться, якщо її паралельно перенести в довільну точку тіла, додаючи пару, момент якої дорівнює моменту даної сили відносно цієї точки.

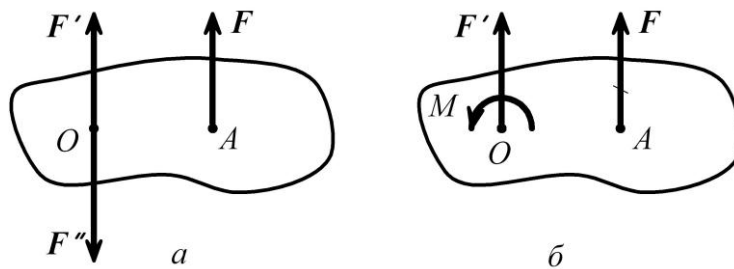


Рисунок 1.14 – До теореми про паралельне перенесення сили

Розглянемо систему сил  $F_1, F_2, \dots, F_n$ , що розташовані в одній площині і прикладені до різних точок  $A_1, A_2, \dots, A_n$  абсолютно твердого тіла (рис. 1.15,  $a$ ). Центром зведення виберемо точку  $O$  і перенесемо, з урахуванням теореми про паралельне перенесення сили, усі сили в цю точку. В результаті на тіло будуть діяти сили  $F'_1, F'_2, \dots, F'_n$ , і пари сил з моментами  $M_1, M_2, \dots, M_n$  (рис. 1.15,  $b$ ).

Замінімо сили, що прикладені в точці  $O$ , рівнодієюною  $R$ , яка прикладена в тій самій точці (рис. 1.15,  $a$ ). Згідно з (1.6)

$$R = \sum_{i=1}^n F'_i. \quad (1.33)$$

За допомогою правила додавання пар замінюємо утворену систему пар однією парою, момент якої рівний

$$M = \sum_{i=1}^n M_i. \quad (1.34)$$

Тоді з врахуванням рівності сил при їх паралельному перенесенні та виразів (1.33) і (1.34) одержуємо

$$\mathbf{R} = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i, \quad (1.35)$$

$$M = \sum_{i=1}^n M_0(\mathbf{F}_i). \quad (1.36)$$

Вектор  $\mathbf{R}$ , що дорівнює геометричній сумі усіх сил системи, називається *головним вектором системи*, а алгебраїчна величина  $M_0$ , чисельно дорівнює сумі моментів сил системи навколо центра  $O$ , називається *головним моментом системи навколо даного центра*.

Отже, будь-яка плоска система сил, прикладених до абсолютно твердого тіла, внаслідок зведення до довільно вибраного центра замінюється однією, прикладеною в центрі зведення силою, що дорівнює головному вектору системи, та однією парою, момент якої дорівнює головному моменту системи відносно центра зведення.

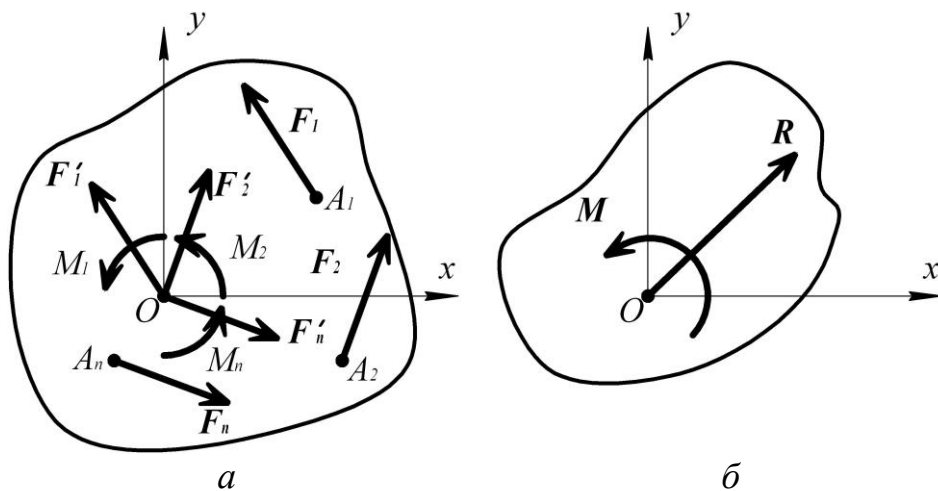


Рисунок 1.15 – Зведення плоскої системи сил до одного центра

Плоска система сил відносно довільно вибраного центра  $O$  може бути зведена до головного вектора і головного моменту за формулами (1.35) і (1.36). Необхідною і достатньою умовою рівноваги цієї системи є виконання умов:

$$\mathbf{R} = 0, M = 0. \quad (1.37)$$

Основна форма аналітичної умови рівноваги, що відповідає співвідношенням (1.37) записується у такому вигляді:

$$\sum_{i=1}^n F_{xi} = 0, \sum_{i=1}^n F_{yi} = 0, \sum_{i=1}^n M_0(\mathbf{F}_i) = 0.$$

Аналогічно для просторової системи сил аналітичні умови рівноваги мають вигляд:

$$\sum_{i=1}^n F_{xi} = 0, \sum_{i=1}^n F_{yi} = 0, \sum_{i=1}^n F_{zi} = 0, \quad (1.38)$$

$$\sum_{i=1}^n M_x(F_i) = 0, \sum_{i=1}^n M_y(F_i) = 0, \sum_{i=1}^n M_z(F_i) = 0. \quad (1.39)$$

## 1.5 Приклади розрахунків

**Задача 1.1** Кронштейн складається із двох стержнів  $AC$  і  $BC$ , шарнірно зв'язаних між собою і з вертикальною стіною (рис. 1.14,  $a$ ). До шарніра  $C$  підвішений вантаж вагою  $P$ . Вісь стержня  $AC$  є перпендикулярною до стіни, тобто  $BAC = 90^\circ$ , а вісь стержня  $BC$  нахилена до стіни під кутом  $\alpha$ . Визначити сили, з якими розтягуються чи стискаються стержні кронштейна.

**Розв'язання.** Невідомі сили можна знайти, розкладаючи силу  $P$  на складові або застосовуючи аналітичні чи геометричні умови рівноваги. Розглянемо усі три способи розв'язування задачі.

**Спосіб розкладання сили на складові.** Перенесемо силу  $P$  уздовж її лінії дії з центра ваги вантажу до центра шарніра  $C$  і розкладемо на складові  $S_{AC}$  і  $S_{BC}$  (рис. 1.14,  $b$ ), направлені уздовж осей стержнів  $AC$  і  $BC$ . Лінії дії одержаних складових збігаються з відповідними лініями дії реакцій стержнів, що утримують вузол  $C$ .

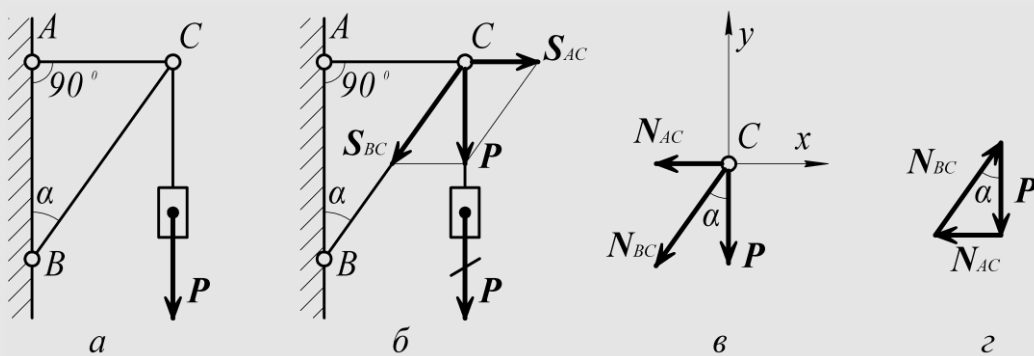


Рисунок 1.14 – До задачі 1.1

Отже, стержень  $AC$  розтягується силою  $S_{AC}$ , а стержень  $BC$  стискається силою  $S_{BC}$ . Модулі цих сил

$$S_{AC} = P \operatorname{tg} \alpha, S_{BC} = \frac{P}{\cos \alpha}.$$

**Аналітичний спосіб.** Розглянемо у рівновазі шарнір  $C$ , що перебуває під дією відомої сили  $P$  і реакцій  $N_{AC}$  та  $N_{BC}$  стержнів  $AC$  і  $BC$

(рис. 1.14, в). Скориставшись прямокутною системою координат  $x, y$ , запишемо аналітичні рівняння рівноваги у вигляді

$$\begin{aligned}\sum F_{xi} &= 0: -N_{AC} - N_{BC} \sin \alpha = 0, \\ \sum F_{yi} &= 0: -P - N_{BC} \cos \alpha = 0.\end{aligned}$$

З рівнянь рівноваги одержуємо

$$N_{BC} = -\frac{P}{\cos \alpha}, N_{AC} = P \operatorname{tg} \alpha.$$

Знак "мінус" у формулі для визначення реакції  $N_{BC}$  вказує на те, що ця реакція має протилежний напрям до передбачуваного. Отже, стержень  $AC$  є розтягнутим, а стержень  $BC$  – стиснутим.

*Геометричний спосіб.* Відповідно до схеми, зображеної на (рис. 1.14, в), запишемо векторне рівняння рівноваги шарніра  $C$  у вигляді

$$\sum \vec{F}_i = 0: \vec{P} + \vec{N}_{AC} + \vec{N}_{BC} = 0.$$

Лінії дії усіх сил, що входять в одержане рівняння, а також модуль сили  $P$  – відомі. Невідомі є модулі і напрями реакцій  $N_{AC}$  і  $N_{BC}$ . Для їх знаходження будуємо замкнутий трикутник сил. Починаючи з довільно вибраної точки, викреслюємо вектор  $P$ , через його кінець проводимо лінію, паралельну до лінії дії сили  $N_{AC}$ , а через початок – лінію, паралельну до лінії дії сили  $N_{BC}$ . Знайшовши точку перетину проведених ліній, завершуємо побудову силового трикутника (рис. 1.14, з). Напрями шуканих сил позначаємо так, щоб початок вектора  $N_{AC}$  збігався з кінцем вектора  $P$ , а кінець вектора  $N_{BC}$  – з початком вектора  $P$ . Як видно з одержаного трикутника сил, стержень  $AC$  є розтягнутим, а стержень  $BC$  стиснутим. Модулі сил  $N_{AC}$  і  $N_{BC}$  знаходимо у вигляді

$$N_{BC} = \frac{P}{\cos \alpha}, N_{AC} = P \operatorname{tg} \alpha.$$

Отже, усі три способи розв'язування задачі приводять до одного й того ж результату.

**Задача 1.2** Вантаж вагою  $P$  підвішений на двох тросах  $AC$  і  $BC$  (рис. 1.15, а), що утворюють однакові кути  $\alpha$  з горизонталлю. Визначити, з якими силами натягнуті троси.

*Розв'язання.* Розв'яжемо задачу трьома способами.

*Спосіб розкладання сили на складові.* Перенесемо силу  $P$  з центра ваги вантажу у точку  $C$  і розкладемо на складові  $T_{AC}$  і  $T_{BC}$ , направлені вздовж осей тросів  $AC$  і  $BC$  (рис. 1.15, б). Ці складові мають спільні лінії дії з відповідними реакціями тросів, а тому збігаються з цими реакціями й за модулями. Трос  $AC$  розтягується силою  $T_{AC}$ , а трос  $BC$  – силою  $T_{BC}$ . Модулі шуканих сил, згідно з (рис. 1.15, б) такі:

*Аналїтичний спосїб.* Розглянемо у рївновазї вузол  $C$ , до якого прикладена перенесена сила  $P$  і реакції тросів  $N_{AC}$  та  $N_{BC}$  (рис. 1.15, е). Скориставшись прямокутною системою координат  $x, y$  запишемо аналїтичні умови рївноваги вузла у виглядї

$$\begin{aligned}\sum F_{xi} = 0: -N_{AC} \cos \alpha + N_{BC} \cos \alpha &= 0, \\ \sum F_{yi} = 0: N_{AC} \sin \alpha + N_{BC} \sin \alpha - P &= 0.\end{aligned}$$

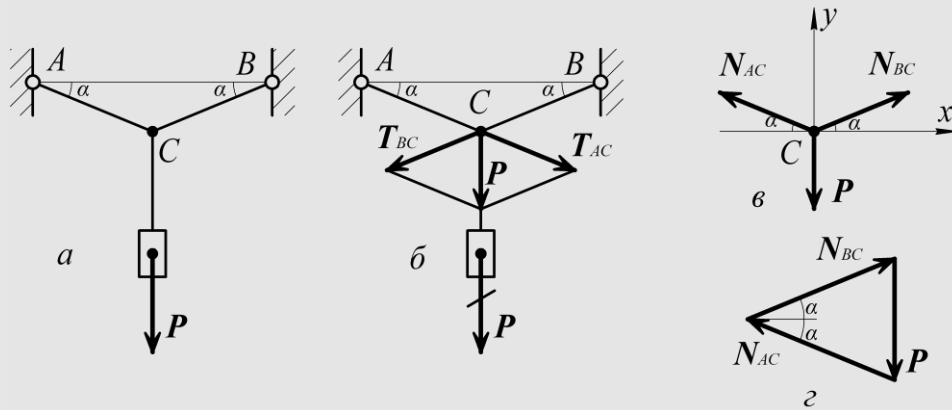


Рисунок 1.15 – До задачї 1.2

З рївняння рївноваги одержуємо

$$N_{AC} = N_{BC} = \frac{P}{2 \sin \alpha}.$$

Додатні знаки сил свїдчать про те, що обидва троси розтягнутї.

*Геометричний спосїб.* Запишемо векторне рївняння рївноваги системи сил, що дїють на вузол  $C$ , у виглядї

$$\sum F_i = 0: P + N_{AC} + N_{BC} = 0.$$

Розв'язуючи одержане рївняння графічно (рис. 1.15, в), бачимо, що троси  $AC$  і  $BC$  розтягнутї, а модулі їх реакцій

$$N_{AC} = N_{BC} = \frac{P}{2 \sin \alpha}.$$

Результати розв'язування задачї трьома рїзними способами збїгаються.

**Задача 1.3** Вантаж вагою  $P$  лежить на абсолютно гладкїй площинї, нахиленїй до горизонту під кутом  $\alpha$  (рис. 1.16, а). Знайти значення сили  $F$ , напрямленої паралельно до похилої площини (рис. 1.16), яку необхідно прикласти до вантажу, щоб утримати його в протївазї. Визначити силу, з якою дїє вантаж на площину.

**Розв'язання.** Для знаходження шуканих сил можна скористатися аналїтичними або геометричною умовами рївноваги.



*Аналїтичний спосїб.* Звїльнимо вантаж від в'язї, якою є гладка площина, і замїнимо дїю в'язї реакцією  $N$ . Вантаж перебуває в рївновазї під дїєю системи збїжних сил  $P$ ,  $F$  і  $N$ , (рис. 1.16, б). Вибравши декартову систему координат  $x$ ,  $y$ , запишемо аналїтичні умови рївноваги вантажу у виглядї

$$\begin{aligned}\sum F_{xi} &= 0: P \sin \alpha - F = 0, \\ \sum F_{yi} &= 0: -P \cos \alpha + N = 0.\end{aligned}$$

Звїдки одержуємо

$$F = P \sin \alpha, N = P \cos \alpha.$$

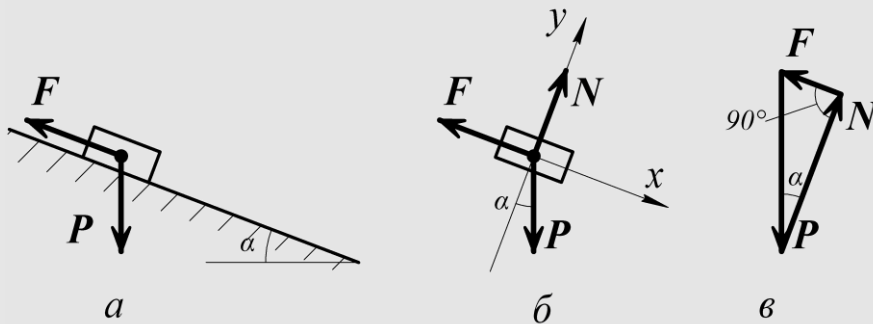


Рисунок 1.16 – До задачі 1.3

Додатні знаки одержаних виразів вказують на те, що дійсні напрями сил  $F$  і  $N$  збїгаються з прийнятими.

Згїдно з аксіомою про рївність дїї і протидїї сила  $Q$ , з якою дїє вантаж на площину, є даною за модулем і протилежно направленою щодо сили  $N$ , тобто

$$Q = -N, Q = N = P \cos \alpha.$$

*Геометричний спосїб.* Запишемо векторне рївняння рївноваги вантажу вїдповїдно до схеми, поданої на (рис. 1.16, б):

$$P + F + N = 0.$$

Розв'яжемо це рївняння геометричним способом, побудувавши трикутник сил (рис. 1.25, в). З одержаного трикутника знаходимо

$$F = P \sin \alpha, N = P \cos \alpha.$$

Сила  $Q$ , з якою вантаж дїє на площину, легко визначається, як і під час розв'язування задачі аналїтичним способом.

**Задача 1.4** Балка, обперта в точцї  $A$  на нерухому шарнїрну опору і в точцї  $B$  на рухому шарнїрну опору, навантажена силою  $F$  (рис. 1.17, а). Вїдстанї від осей шарнїрїв до точки прикладання навантаження становлять  $a$  і  $b$  вїдповїдно. Площина, по якїй може перемїщуватися рухома шарнїрна опора, нахилена до горизонталї під кутом  $\alpha$ . Визначити реакцїї опор балки.

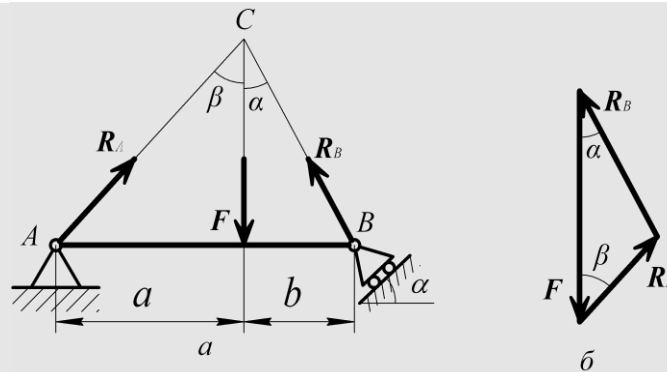


Рисунок 1.17 – До задачі 1.4

Розв'язання. Позначимо реакції опор балки. Реакцію  $R_B$ , що виникає в рухомій шарнірній опорі, направляємо перпендикулярно до площини можливого переміщення опори. Знаходимо точку  $C$  перетину ліній дії сил  $F$  і  $R_B$ . Скориставшись теоремою про три сили, визначаємо положення лінії дії реакції  $R_A$  нерухомої опори, позначаємо цю реакцію. Записуємо векторне рівняння рівноваги балки:

$$F + R_A + R_B = 0,$$

для розв'язання якого будуємо силувий трикутник (рис. 1.17, б).

Для одержаного трикутника записуємо співвідношення

$$R_A \operatorname{tg} \beta - R_B \operatorname{tg} \alpha = 0,$$

$$R_A \cos \beta + R_B \operatorname{tg} \alpha = 0,$$

з яких визначаємо шукані реакції опор

$$R_A = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \alpha \cos \beta + \operatorname{tg} \beta \cos \alpha},$$

$$R_A = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \alpha \cos \beta + \operatorname{tg} \beta \cos \alpha}.$$

Невідомий кут  $\beta$ , що входить до формул для обчислення реакцій, знаходимо із (рис. 1. 17. а) у вигляді:

$$\beta = \operatorname{arctg}\left(\frac{a}{b} \operatorname{tg} \alpha\right).$$

**Задача 1.5** Визначити реакції опор стержневої конструкції, зображеної на рис. 1.18, а, якщо  $P = 4$  кН;  $G = 5$  кН;  $M = 8$  кН·м;  $q = 2,5$  кН/м;  $a = 2$  м;  $\alpha = 45^\circ$ .

Розв'язання. Відкинемо в'язі стержневої конструкції, до яких належать нерухома та рухома шарнірні опори, замінивши їхню дію реакціями в'язей (рис. 1.18, б). Реакція  $R_B$  рухомої шарнірної опори направлена вертикально, а положення лінії дії реакції  $R_A$ , що виникає в

нерухомїй шарнїрній опорї, невідоме. Тому цю реакцію подаємо у вигляді двох складових  $X_A$ ,  $Y_A$ . Дїю нитки на стержневу конструкцію замїнюємо силою натягу нитки, що дорївнює вазї вантажу  $G$ .

Для плоскòї системи сил, що дїє на стержневу конструкцію, складаємо три рївняння рївноваги у вибранїй системї координат  $x$  і  $y$

$$\sum F_{xi} = 0: Xa - P \cos \alpha - G \cos \alpha - qa = 0,$$

$$\sum F_{yi} = 0: Ya - R_B - P \sin \alpha - G \sin \alpha = 0,$$

$$\sum M_{Ai} = 0: M + P a \sin \alpha + G 2a \sin \alpha - R_B a - \frac{qa^2}{2} = 0.$$

Із першого рївняння рївноваги визначаємо  $X_A$ :

$$Xa = P \cos \alpha + G \cos \alpha + qa = 4 \cos 45^\circ + 5 \cos 45^\circ + 2,5 \cdot 2 = 11,36 \text{ кН}.$$

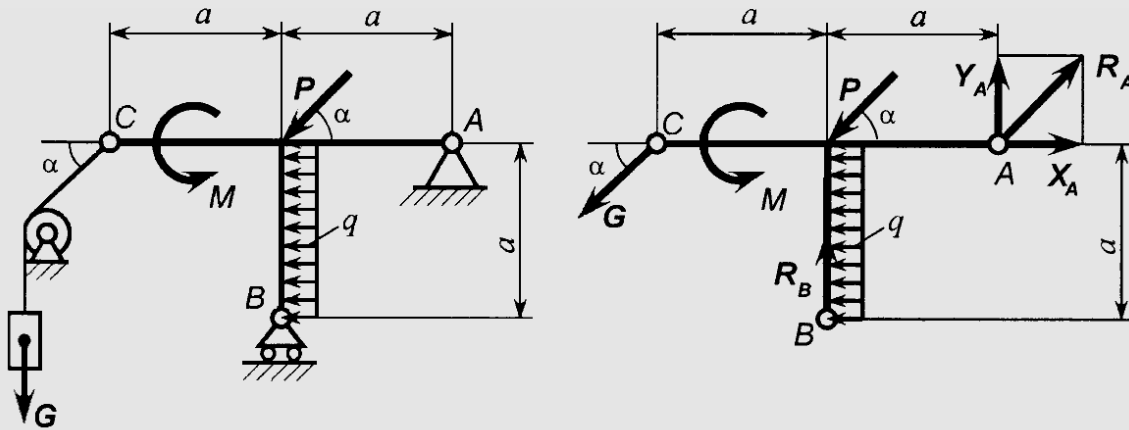


Рисунок 1.18 – До задачї 1.5

З третього рївняння рївноваги одержуємо:

$$R_B = \frac{M}{a} + P \sin \alpha + 2G \sin \alpha - \frac{qa}{2} = \frac{8}{2} + 4 \sin 45^\circ - 2 \cdot 5 \sin 45^\circ - \frac{2,5 \cdot 2}{2} = -2,74 \text{ кН}.$$

З другого рївняння рївноваги знаходимо:

$$Ya = P \sin \alpha + G \sin \alpha - R_B = 4 \sin 45^\circ + 5 \sin 45^\circ + 2,74 = 9,11 \text{ кН}.$$

Одержанї значення  $X_A$  і  $Y_A$  додатні, отже, дїйсні напрями реакцій  $X_A$  і  $Y_A$  вїдповїдають позначенням (на рис. 1.18, б). Обчислене значення  $R_B$  вїд'ємне, дїйсний напрям реакції  $R_B$  є протилежним щодо позначеного на згаданому рисунку. За складовими  $X_A$  і  $Y_A$  знаходимо реакцію опори  $A$ :

$$R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2} = \sqrt{11,36^2 + 9,11^2} = 14,56 \text{ кН}.$$



## Геометричні характеристики плоских перерізів

### 2.1 Геометричні характеристики плоских перерізів

#### 2.1.1 Статичні моменти і центр ваги перерізів

Під час розв'язування задач, що пов'язані з дією згинальних моментів, виникає необхідність у визначенні деяких геометричних характеристик поперечних перерізів балки. Ці характеристики мають суто специфічне застосування в основному в межах задач згину, а тому в загальному курсі геометрії не вивчаються. Окрім відомої геометричної характеристики плоских перерізів, якою є площа, користуються ще центром ваги перерізу, статичним моментом та моментом інерції цих плоских перерізів.

Нехай поперечний переріз деякого елемента в системі координат  $xOy$  має форму, що зображена на рис. 2.1. Виділимо із всієї площі  $A$  перерізу деяку елементарну площинку  $dA$  і пов'яжемо її з системою координат  $x, y$ .

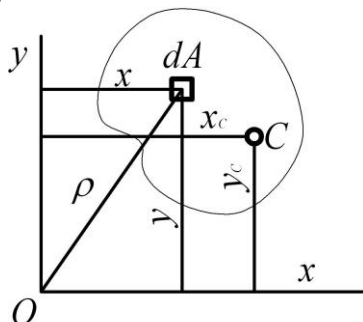


Рисунок 2.1 – До визначення геометричних характеристик перерізу

**Статичним** (static) **моментом** перерізу відносно осі називають взяту по всій площі перерізу суму добутків площінок  $dA$  на інші відстані до даної осі:

$$S_x = \int_A y dA; \quad S_y = \int_A x dA. \quad (2.1)$$

Статичний момент перерізу може бути як додатним так і від'ємним або дорівнювати нулю. Осі, відносно яких статичний момент рівний нулю, називаються *центральними*. Точка перетину центральних осей називається **центром ваги**. Якщо координати центра ваги перерізу  $C$  позначити через  $x_c$  і  $y_c$  (див. рис. 2.1) то статичні моменти можна визначити за формулами:

$$S_x = A y_c, \quad S_y = A x_c. \quad (2.2)$$

Вираз (2.2) дає можливість визначити координати центра ваги перерізу за умови, коли відомі статичні моменти  $S_x$ ,  $S_y$  та площа перерізу  $A$ ,

$$x_c = \frac{S_y}{A}, \quad y_c = \frac{S_x}{A}. \quad (2.3)$$

У багатьох випадках положення центра ваги перерізу можна визначити безпосередньо. Наприклад, якщо переріз має дві осі симетрії, то центр ваги лежить в точці їхнього перетину. У випадку, коли переріз має одну вісь симетрії, центр ваги розташований на осі, але для встановлення його конкретного положення потрібно знайти ще одну координату.

Якщо переріз розділити на скінченне число  $n$  окремих фігур, площі яких  $A_i$  і координати центрів ваги  $x_{ci}$  та  $y_{ci}$  відомі, то застосовують формули:

$$A = \sum A_i, \quad S_x = \sum A_i y_{ci}, \quad S_y = \sum A_i x_{ci}. \quad (2.4)$$

Отримані таким чином значення  $A$ ,  $S_x$  і  $A_y$  можна підставити у вирази (2.3) і визначити координати центра ваги перерізу.

## 2.1.2 Момент інерції плоских перерізів і радіус інерції

**Осьовим** (axial) **моментом інерції** перерізу відносно осі називають взятую по всій площі перерізу суму добутоків площинок  $dA$  на квадрати їх відстані до цієї осі (див. рис. 2.1):

$$I_x = \int_A y^2 dA, \quad I_y = \int_A x^2 dA. \quad (2.5)$$

**Полярний** (polar) **момент інерції** перерізу називають взятую по всій площі перерізу суму добутоків площинок  $dA$  на квадрати відстаней до деякої точки  $O$ , яку прийнято називати полюсом (див. рис. 2.1):

$$I_p = \int_A \rho^2 dA. \quad (2.6)$$

Осьові і полярні моменти інерції завжди додатні. Розмірність осьових і полярного моментів інерції –  $[\text{мм}^4]$  або  $[\text{м}^4]$ .

Зв'язок між полярним та осьовими моментами інерції перерізу, враховуючи, що  $\rho^2 = x^2 + y^2$ ,

$$I_p = \int_A (x^2 + y^2) dA = \int_A x^2 dA + \int_A y^2 dA = I_y + I_x. \quad (2.7)$$

Отже, сума осьових моментів інерції відносно двох взаємно перпендикулярних осей дорівнює полярному моменту інерції відносно точки перетину цих осей, тобто початку координат.

**Відцентровим** (centrifugal) **моментом інерції** перерізу відносно осей координат називають взятую по всій площі перерізу суму добутків площинок  $dA$  на добуток їх відстаней до осей координат (див. рис. 2.1):

$$I_{xy} = \int_A xy dA. \quad (2.8)$$

Відцентровий момент інерції може бути додатним, від'ємним або дорівнювати нулю. Якщо одна із осей є віссю симетрії перерізу, то відцентровий момент інерції завжди дорівнює нулю.

**Радіусом інерції перерізу** відносно даної осі називають величину, яка дорівнює кореню квадратному із відношення осьового моменту інерції відносно цієї осі до площі перерізу:

$$i_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}}, \quad i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}}. \quad (2.9)$$

Радіус інерції перерізу має розмірність [мм] або [м].

### 2.1.3 Головні осі і головні моменти інерції

Розглянемо, як зміняться моменти інерції за умови повороту осей координат. Допустимо, що відомі моменти інерції перерізу відносно деяких осей  $x$  і  $y$  (рис. 2.2). Необхідно визначити моменти інерції відносно осей  $x_\alpha$  та  $y_\alpha$ , повернутих відносно першої системи на кут  $\alpha$ .

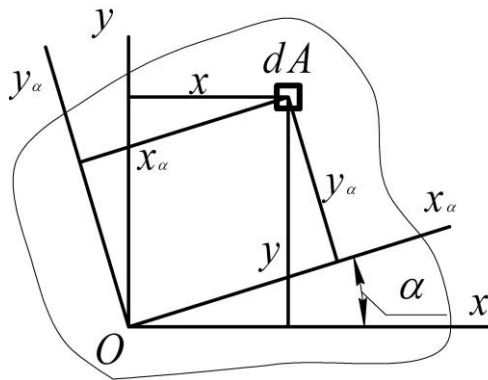


Рисунок 2.2 – До визначення моментів інерції при повороті осей

Після повороту осей координати довільної елементарної площинки  $dA$  в нових осях можна виразити через координати попередньої системи осей так:

$$x_\alpha = x \cos \alpha + y \sin \alpha, \quad y_\alpha = y \cos \alpha - x \sin \alpha.$$

Застосувавши формули (2.5) і (2.8), запишемо:

$$I_{x\alpha} = \int_A (y \cos \alpha + x \sin \alpha)^2 dA = \cos^2 \alpha \int_A y^2 dA - 2 \sin \alpha \cos \alpha \int_A xy dA + \sin^2 \alpha \int_A x^2 dA =$$

$$I_{y\alpha} = \int_A (x \cos \alpha + y \sin \alpha)^2 dA = \cos^2 \alpha \int_A x^2 dA + 2 \sin \alpha \cos \alpha \int_A xy dA +$$

$$+ \sin^2 \alpha \int_A y^2 dA = I_y \cos^2 \alpha + 2I_{xy} \sin \alpha \cos \alpha + I_x \sin^2 \alpha.$$

Склавши почленно два вирази, отримуємо:

$$I_{x\alpha} + I_{y\alpha} = I_x + I_y. \quad (2.10)$$

Тобто, із зміною кута повороту осей сума моментів інерції *незмінна*. Осі, відносно яких осьові моменти набувають максимальних значень, називають *головними осями*, а моменти – *головними моментами інерції*.

Очевидно, що через будь-яку точку в перерізі можна провести пару головних осей. Однак практичний інтерес становлять лише ті з них, які проходять через центр ваги перерізу. Ці осі прийнято називати *головними центральними осями*, а моменти інерції відносно таких осей – *головними центральними моментами інерції*.

Можна довести, що відносно головних осей відцентровий момент інерції завжди дорівнює нулю. Оскільки відцентровий момент інерції перерізу відносно осей, одна з яких або обидві збігаються з осями симетрії, дорівнює нулю, то можна стверджувати, що взаємно перпендикулярні осі, з яких одна або обидві збігаються з осями симетрії перерізу, завжди є головними центральними осями.

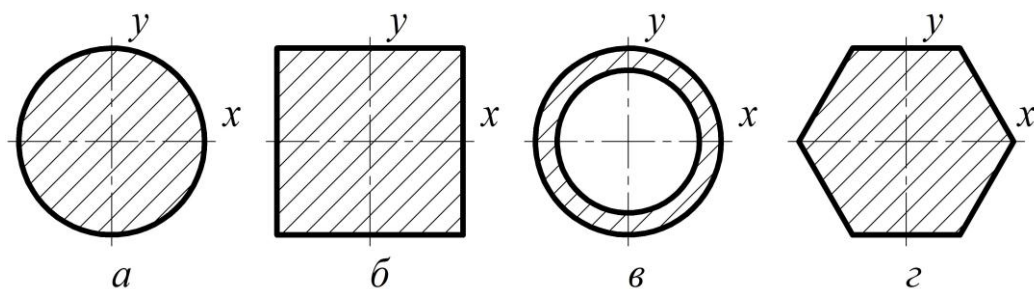


Рисунок 2.3 – Форми перерізів з двома осями симетрії

На рис. 2.3 показані форми перерізів у вигляді кола (а), круглого кільця (в), квадрата (б), правильного шестикутника (г), які мають безмежну кількість головних центральних осей. Будь-які осі  $x_a$  та  $y_a$  є головними центральними осями інерції зображених перерізів.

### 2.1.4 Моменти інерції плоских і складних форм перерізів

Розглянемо деякі приклади визначення центральних моментів інерції перерізів плоских форм (рис. 2.4)

Для прямокутника з розмірами  $b$  і  $h$  (рис 2.4, а) момент інерції відносно центральної осі  $x$ , паралельно до сторони розміром  $b$ , можна визначити в такий спосіб. Виділимо з прямокутника на відстані  $y$  від осі  $x$  елемент, який має розміри  $b$  і  $dy$  та площу  $dA = bdy$ . Тоді за означенням

$$I_x = \int_A y^2 dA = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} y^2 b dy = b \frac{y^3}{3} \Big|_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} = \frac{bh^3}{12}. \quad (2.11)$$

Аналогічно момент інерції відносно осі  $y$  визначається за формулою

$$I_y = \frac{hb^3}{12}. \quad (2.12)$$

За подібним принципом визначаються моменти інерції і для інших перерізів простих форм. Для кола діаметром  $d$  (рис. 2.4, б) момент інерції відносно центральних осей  $x$  та  $y$  визначається за такою формулою

$$I_x = I_y = \frac{\pi \cdot d^4}{64}. \quad (2.13)$$

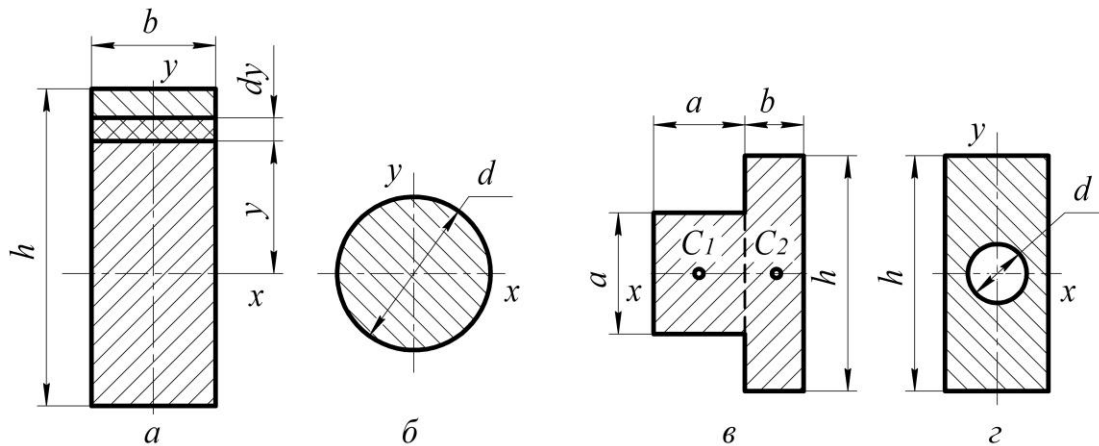


Рисунок 2.4 – До визначення моментів інерції перерізів простих форм

Якщо взяти до уваги формулу (2.12), то отримаємо вираз для визначення полярного моменту інерції кола діаметром  $d$

$$I_p = I_x + I_y = \frac{\pi \cdot d^4}{32}. \quad (2.14)$$

На рис 2.4, в зображено форму перерізу, який можна розділити на два елементи: квадрат з розміром сторони  $a$  і прямокутник зі стороною  $b$  і



h. Якщо вісь  $x$  проходить через центри ваги  $C_1$  і  $C_2$  квадрата і прямокутника, то для зображеної на рис. 2.4, в форми перерізу момент інерції відносно осі  $x$  дорівнює сумі моментів інерції двох фігур

$$I_x = I_{x1} + I_{x2} = \frac{a^4}{12} + \frac{bh^3}{12}. \quad (2.15)$$

Якщо в перерізі є отвір (рис. 2.4, з), то його вважають частиною фігури з від'ємною площею. Тоді осьовий момент інерції, наприклад, відносно осі  $x$ , для двох складових фігур (прямокутника і кола)

$$I_x = I_{x1} - I_{x2} = \frac{bh^3}{12} - \frac{\pi d^4}{64}. \quad (2.16)$$

## 2.2 Приклади розрахунків

**Задача 2.1** Визначити координати центра ваги перерізу, форма і розміри якого подані на рис 2.5. Розміри подані в міліметрах.

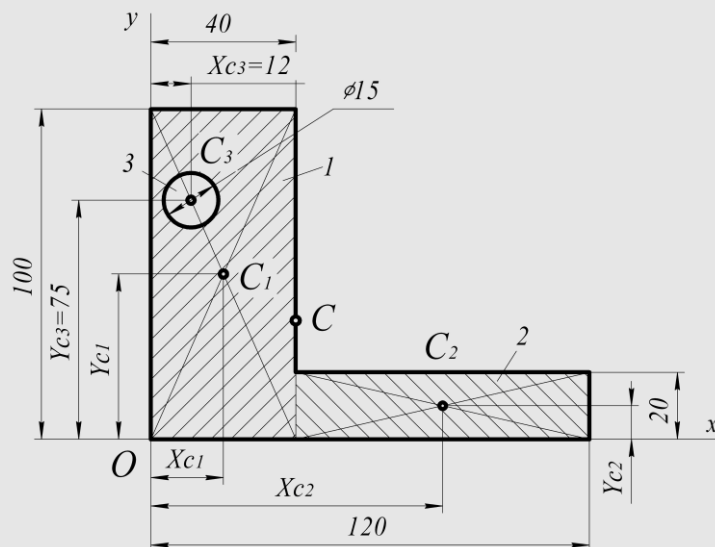


Рисунок 2.5 – До визначення координат центра ваги перерізу

**Розв'язання.** Заданий переріз розбиваємо на два прямокутники 1 та 2, які мають центри ваги відповідно  $C_1$  і  $C_2$  в точках перетину їхніх діагоналей та коло 3, яке має центр ваги у точці  $C_3$ . Координати центрів ваги  $C_1$ ,  $C_2$  та  $C_3$  у прийнятій системі координат  $хоу$ :

$$\begin{aligned} x_{c1} &= 40/2 = 20 \text{ мм}, & y_{c1} &= 100/2 = 50, & x_{c2} &= (120 - 40)/2 + 40 = 80 \text{ мм}, \\ y_{c2} &= 20/2 = 10 \text{ мм}, & x_{c3} &= 12 \text{ мм}, & y_{c3} &= 75 \text{ мм}. \end{aligned}$$

Площі прямокутників 1 і 2, кола 3 та загальна площа перерізу:

$$A_1 = 100 \cdot 40 = 4 \cdot 10^3 \text{ мм}^2, \quad A_2 = (120 - 40) \cdot 20 = 1,6 \cdot 10^3 \text{ мм}^2,$$

$$A_3 = \frac{\pi \cdot d^2}{4} = \frac{3,14 \cdot 15^2}{4} = 0,0176 \cdot 10^4 \text{ мм}^2,$$

$$A = \hat{A}_1 + \hat{A}_2 - A_3 = 4 \cdot 10^3 + 1,6 \cdot 10^3 - 0,176 \cdot 10^3 = 5,424 \cdot 10^3 \text{ мм}^2.$$

Статичні моменти перерізу відносно осей  $x$  і  $y$ :

$$S_x = A_1 y_{c1} + A_2 y_{c2} - A_3 y_{c3} = 3,8 \cdot 10^3 \cdot 50 + 1,6 \cdot 10^3 \cdot 10 - 0,176 \cdot 10^3 \cdot 75 = 166 \cdot 10^3 \text{ мм}^3,$$

$$S_y = A_1 x_{c1} + A_2 x_{c2} - A_3 x_{c3} = 3,8 \cdot 10^3 \cdot 20 + 1,6 \cdot 10^3 \cdot 80 - 0,176 \cdot 10^3 \cdot 12 = 200 \cdot 10^3 \text{ мм}^3.$$

Координати центра ваги перерізу:

$$x_c = S_y / A = 200 \cdot 10^3 / 5,424 \cdot 10^3 = 36,87 \text{ мм},$$

$$y_c = S_x / A = 166 \cdot 10^3 / 5,424 \cdot 10^3 = 30,60 \text{ мм}.$$

**Задача 2.2** Визначити головні центральні моменти інерції перерізу, форма і розміри якого показано на рис 2.6. Розміри подані в міліметрах.

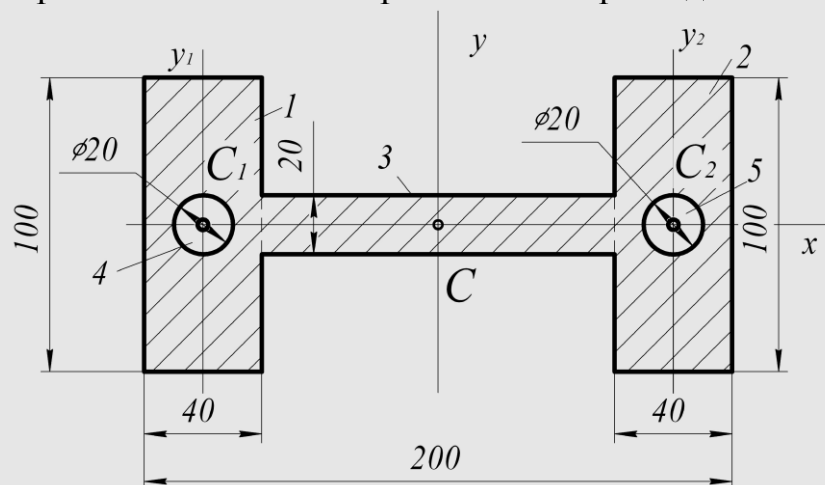


Рисунок 2.6 – До визначення головних центральних моментів інерції перерізу

**Розв'язання.** Заданий переріз має осі симетрії, які і є головними центральними осями  $x$  та  $y$  перерізу. Точка  $C$  перетину осей  $x$  і  $y$  є центром ваги перерізу.

Для знаходження головних моментів інерції перерізу відносно осей  $x$  та  $y$  розіб'ємо переріз на три прямокутники 1, 2 і 3 та два рівних отвори 4 та 5. Центри ваги прямокутників знаходяться в точках  $C_1$  і  $C_2$ , та збігаються з центрами ваги отворів. Центр ваги прямокутника 3 збігається із загальним центром ваги тіла та знаходиться в точці  $C$ .

Оскільки вісь  $x$  є центральною для прямокутників 1, 2 і 3 та отворів ( $C_1$ ,  $C_2$  і  $C_3$  лежать на осі  $x$ ), то головний момент інерції перерізу відносно осі  $x$

$$I_x = I_{1x} - I_{4x} + I_{2x} - I_{5x} + I_{3x} = \frac{40 \cdot 100^3}{12} - \frac{3,14 \cdot 20^4}{64} + \frac{40 \cdot 100^3}{12} - \frac{3,14 \cdot 20^4}{64} + \frac{(200 - 40 \cdot 2) \cdot 20^3}{12} = 6,7 \cdot 10^6 \text{ і } \text{і}^4.$$

Моменти інерції прямокутників 1 і 2 відносно осі  $y$ :

$$I_{1y} = I_{2y} = I_{1y} - I_{4y} + (A_1 - A_4(200/2 - 40/2)^2) = \frac{100 \cdot 40^3}{12} - \frac{\pi \cdot 20^4}{64} + ((100 \cdot 40 - \frac{\pi \cdot 20^2}{4}) \cdot 80^2) = 25 \cdot 10^6 \text{ і } \text{і}^4.$$

Момент інерції прямокутника 3 відносно осі  $y$ :

$$I_{3y} = \frac{20 \cdot (200 - 40 \cdot 2)^3}{12} = 2,88 \cdot 10^6 \text{ і } \text{і}^4.$$

Головний момент інерції всього перерізу відносно осі  $y$ :

$$I_y = I_{1y} + I_{2y} + I_{3y} = 25 \cdot 10^6 + 25 \cdot 10^6 + 2,88 \cdot 10^6 = 57,88 \cdot 10^6 \text{ і } \text{і}^4.$$

Розрахунки показують, що для заданого перерізу  $I_y$  у 8 разів більший, ніж  $I_x$ .

**Задача 2.3** Визначити положення головних центральних осей та головних моментів для прямокутного трикутника, що показаний на рис. 2.7.

Де  $h = 60$  мм,  $b = 25$  мм.

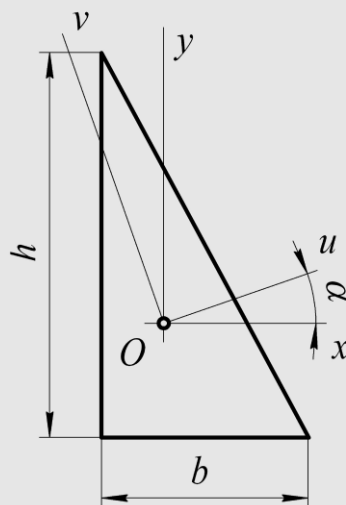


Рисунок 2.7 – До задачі 2.3

**Розв'язання.** Для центральних осей, що паралельні катетам, отримаємо:

$$I_x = \frac{bh^3}{36}, \quad I_y = \frac{hb^3}{36}, \quad I_{xy} = -\frac{b^2h^2}{72}.$$

$$I_x = \frac{0,025 \cdot 0,06^3}{36} = 1,5 \cdot 10^{-7} \text{ м}^4, \quad I_y = \frac{0,06 \cdot 0,025^3}{36} = 2,6 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4;$$

$$I_{xy} = -\frac{0,025^2 \cdot 0,06^2}{72} = -3,2 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4.$$

Відповідно до формули знаходимо:

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{bh}{h^2 - b^2} = \frac{0,025 \cdot 0,06}{0,06^2 - 0,025^2} = 0,504.$$

$$\alpha = 30^\circ.$$

Головні осі трикутника:

$$I_{\max/\min} = \frac{bh}{72} (b^2 + h^2 \pm \sqrt{b^4 - b^2h^2 + h^4}),$$

$$I_{\max} = \frac{0,025 \cdot 0,06}{72} (0,025^2 + 0,06^2 + \sqrt{0,025^4 - 0,025^2 \cdot 0,06^2 + 0,06^4}) = 1,574 \cdot 10^{-7},$$

$$I_{\min} = \frac{0,025 \cdot 0,06}{72} (0,025^2 + 0,06^2 - \sqrt{0,025^4 - 0,025^2 \cdot 0,06^2 + 0,06^4}) = 1,861 \cdot 10^{-8}.$$



## Загальні положення про розрахунки на міцність і жорсткість

### 3.1 Основні задачі розрахунків на міцність і жорсткість

Елементи деталей машин під час роботи зазнають деформацій під дією робочих навантажень, тобто змінюють свої початкові розміри та форму. Наприклад: стержень, що навантажений силою  $G$ , (рис. 3.1, *а*) чи балка навантажена силою  $F$  (рис. 3.1, *б*), зазнають деформації.

Якщо до сталевого стержня підвісити невеликий вантаж  $G_1$ , то стержень видовжиться на величину  $\Delta$ , тобто здеформується (рис 3.1, *а*). Після припинення дії сили  $G_1$  стержень повернеться до своєї початкової довжини. Якщо після дії сили тіло відновлює свою початкову форму і розміри, то таке тіло є **абсолютно пружним** (elasticity).

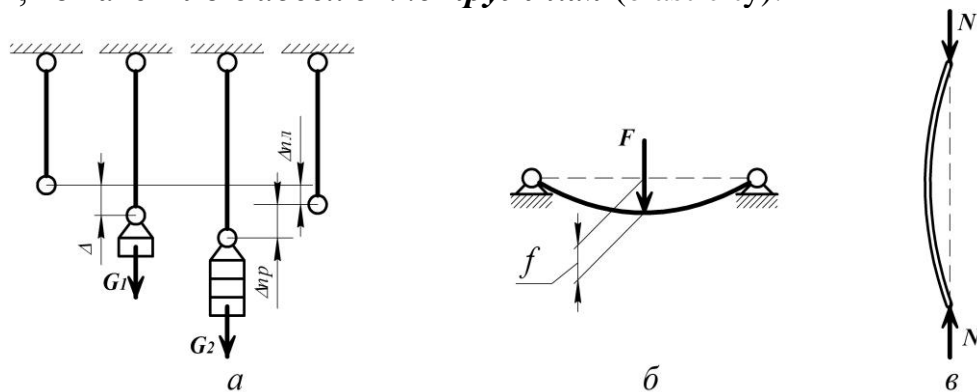


Рисунок 3.1 – Деформації деталей під дією прикладених сил

При досягненні певних значень навантажень  $G_2$ , які будуть більшими за  $G_1$ , після розвантаження в тілі можуть поряд з пружними деформаціями виникати такі, що не зникають. Їх називають **залишковими** або **пластичними**. Тобто, після припинення дії сили  $G_2$  стержень не повернеться до своєї початкової довжини і вона збільшиться на величину  $\Delta_{пл}$ . Загальна деформація буде визначатись за виразом

$$\Delta = \Delta_{\text{пр}} + \Delta_{\text{пл}}, \quad (3.1)$$

де  $\Delta_{\text{пр}}$  – пружна деформація,

$\Delta_{\text{пл}}$  – пластична деформація.

Подальше зростання вантажу призведе до руйнування стержня.

Таким чином, наявність в елементах технічних об'єктів залишкових деформацій на рівні з руйнуванням, призводить до зміни нормальної їх роботи, що є недопустимим.

Здатність тіла сприймати навантаження не руйнуючись і без залишкових деформацій називається **міцністю** (strength).

Кожна деталь механічного пристрою зазнає зміни форми і розмірів під дією навантажень, що виникають під час його роботи. Якщо ці зміни є незначними і відповідають умовам роботи пристрою, не порушуючи його функціонування, то їх можна віднести до властивостей цих деталей, без яких жодна з них не може сприймати навантаження.

Здатність тіла зберігати свої розміри і форму під дією сил у встановлених межах називається **жорсткістю** (stiffness).

Якщо під дією сили  $G$  стержень здеформується на величину  $\Delta$ , чи під дією сили  $F$  балка прогнеться на величину  $f$ , то жорсткість  $j$  визначиться за виразом

$$j = \frac{G}{\Delta} = \frac{F}{f}. \quad (3.2)$$

Розглянемо ще один випадок деформації деталей. Якщо навантажити стержень силою  $N$ , то він зігнеться в боковому напрямку (рис. 3.1, в), тобто, втратить початкову форму. Якщо сила є незначною, то після розвантаження стержень повернеться у початкове положення.

Здатність тіла зберігати під дією сил початкову форму пружної рівноваги називається **стійкістю** (stability).

Втрата стійкості технічних об'єктів переважно призводить до значних переміщень і їх руйнувань.

Таким чином, основними задачами розрахунків на міцність і жорсткість є забезпечення відповідних розмірів та призначення матеріалів для виготовлення елементів конструкції, які виключають можливість руйнування чи появу залишкових деформацій під час навантаження в експлуатаційних умовах. При цьому необхідно отримати мінімальні розміри деталей з метою зменшення їх ваги та вартості виготовлення.

### 3.2 Зовнішні сили та їх класифікація

Дію об'єкта чи об'єктів на певне тіло замінюють силами, які називають **зовнішніми**. А систему зовнішніх сил та реакцій в'язей, прикладених до тіла, називають **навантаженням** (load).

**Зовнішні** сили можуть бути об'ємними та поверхневими.

Сили, що виникають за відсутності контакту двох тіл, і прикладені до кожної точки об'єму тіла, називаються **об'ємними** чи **масовими** силами. До них відносяться сила ваги тіла, сили інерції, що виникають під час прискорення його руху.

**Поверхневі** – це сили, що характеризують безпосередню контактну взаємодію тіла з іншими тілами. Поверхневі сили можуть бути неперервно

розподілені по всій поверхні тіла чи на її частині.

Поверхневі сили поділяють на зосереджені, розподілені по лінії та по поверхні. Розглянемо дію цих силових факторів на одну з деталей найпростішої форми, якою замінено реальну форму елемента технічного об'єкта (рис. 3.2).

**Зосереджена сила  $F$**  [Н, кН], або **зосереджений момент  $M$**  [Н·м] – це зовнішні силові фактори, що прикладені на дуже обмежену за розмірами ділянку поверхні тіла в порівнянні з розмірами самого елемента.

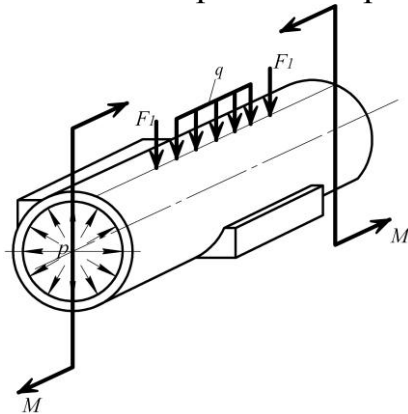


Рисунок 3.2 – Зображення зовнішніх сил, що діють на елемент технічного об'єкта

**Розподілена по лінії сила  $q$**  [Н/м, кН/м] характеризується прикладанням вздовж лінії контакту взаємодіючих тіл чи вздовж осі стержня значної довжини.

**Розподілена по поверхні сила  $p$**  (сила тиску) [Н/м<sup>2</sup>, кН/м<sup>2</sup>] діє на значній частині поверхні тіла, наприклад, сила тиску в порожнині труби, як зображено на рис. 3.2.

За характером дії сил протягом певного відрізка часу розрізняють *статичні* та *динамічні* сили.

Навантаження вважаємо *статичним*, якщо воно не змінюється в часі або порівняно повільно і плавно зростає від нуля до свого кінцевого значення, а потім залишається незмінним.

**Динамічні навантаження** прикладаються до тіла за малий проміжок часу чи миттєво з врахуванням ефекту прискорення як самого тіла, так і тіла, що передає навантаження. Динамічні навантаження поділяються на *миттєво прикладені*, *ударні* та *повторно-змінні в часі* (циклічні).

**Миттєво прикладене навантаження** зростає від нуля до максимуму впродовж частки секунди. Таке навантаження виникає під час спалаху горючої суміші в циліндрі двигуна внутрішнього згоряння чи при зрушенні з місця залізничного потягу.

**Ударне навантаження** характеризується тим, що в момент його

прикладання тіло, яке створює це навантаження, має певну кінетичну енергію. Таке навантаження виникає, наприклад, під час забивання палі за допомогою копра, чи в елементах ковальських молотів.

**Повторно-змінні в часі навантаження** характеризуються своєю неперервною періодичністю. Такі навантаження виникають при роботі валів конструкцій, осей залізничних вагонів, коливальних елементів пристрою.

### **3.3 Поняття про напруження. Співвідношення між внутрішніми зусиллями і напруженнями**

У розрахунках елементів технічних об'єктів користуються різними гіпотезами та принципами, які надають методу розрахунків певної універсальності і спрощують розв'язування поставлених задач.

В опорі матеріалів користуються такими **основними гіпотезами**:

а) *гіпотеза про суцільність матеріалу* припускає, що матеріал деформованого тіла до і після навантаження є суцільним без будь-яких пустот та тріщин;

б) *гіпотеза про однорідність та ізотропність матеріалу* вважає, що матеріал деформованого тіла є однорідним, тобто не містить ніяких включень, що могли б змінити його фізико-механічні властивості в будь-якому щонайменшому мікрооб'ємі, а також, що він ізотропний тобто його фізико-механічні властивості за всіма напрямками однакові під час навантаження;

в) *гіпотеза про ідеальну пружність* передбачає, що матеріал має ідеальну пружність, тобто після розвантаження деформації повністю зникають і тіло відновлює свою початкову форму;

г) *гіпотеза про лінійну залежність між деформацією та навантаженням (закон Гука)*. Згідно з цією гіпотезою прийнято вважати, що деформація елемента розрахунку прямо пропорційні діючим на нього навантаженням;

д) *гіпотеза плоских перерізів* припускає, що плоскі та перпендикулярні до осі плоскі перерізи до деформації залишаються такими ж і після деформації стержня.

Окрім гіпотез в опорі матеріалів користуються і деякими принципами механіки деформування:

а) *принцип незалежності дії сил (суперпозиції)* полягає в тому, що деформації тіла, які спричинені діями кількох сил, дорівнюють сумі деформацій, спричинених кожною силою окремо. З цього принципу випливає, що результат деформування групи сил не залежить від послідовності прикладання навантаження ними конструкції і дорівнює



сумі результатів деформування кожної із сил окремо;

б) *принцип Сен-Венена* стверджує, що в перетинах, які достатньо віддалені від місця прикладання навантаження, напружено-деформований стан не залежить від способу прикладання цих навантажень. На основі цього принципу під час розрахунків розподілене навантаження може замінюватись зосередженою силою;

в) *принцип незмінності початкових розмірів* полягає в тому, що зміна лінійних розмірів під час навантаження суттєво менше початкових розмірів, тобто переміщення точок тіла, що обумовлені його пружними деформаціями, малі в порівнянні з розмірами тіла.

Між сусідніми частинками будь-якого тіла (кристалами, молекулами, атомами) завжди є певні сили взаємодії, які називаються *внутрішніми силами*. Ці сили намагаються зберегти тіло як одне ціле, протидіючи всьому, що може змінити взаємне розташування частинок, тобто його деформувати. Вони виникають під дією зовнішніх сил у перерізах тіл і є причиною руйнування елементів технічних об'єктів.

Для розрахунків на міцність, жорсткість та стійкість необхідно вміти визначати внутрішні зусилля в кожному перерізі елемента розрахунку. При визначенні *внутрішніх сил* користуються *методом перерізів*.

Суть методу полягає в тому, що навантажене тіло уявно розтинають деякою площиною на дві частини. Для того, щоб кожна з цих частин знаходилась в рівновазі під дією прикладених до неї зовнішніх сил, необхідно дію відкинутої будь-якої частини тіла замінити певною системою внутрішніх сил у цьому перетині. Ці сили і є силами взаємодії між частинами тіла. Внутрішні сили, що діють в перетині з боку однієї частини тіла, відповідно до третього закону Ньютона, рівні за величиною і протилежні за напрямком внутрішнім силам, що діють в перетині з боку другої частини тіла. Цю систему внутрішніх сил можна звести до головного вектора  $\mathbf{R}$  і головного моменту  $M$ , прикладених у центрі ваги  $O$  перерізу (рис 3.3, а). В системі координат  $Oxyz$ , в якій вісь  $x$  перпендикулярна до площини перерізу, а осі  $Oy$  і  $Oz$  лежать в площині перерізу, спроектуємо головний вектор  $\mathbf{R}$  і головний момент  $M$  на вказані осі. Отримаємо шість внутрішніх силових факторів (рис 3.3, б): сили  $N$ ,  $Q_y$ ,  $Q_z$ ; моменти  $T$ ,  $M_y$ ,  $M_z$ . Сила  $N$ , що перпендикулярна до площини перерізу є *нормальною* або *поздовжньою*, а сили  $Q_y$ ,  $Q_z$ , що лежать в цій площині – *поперечні*. Момент  $T$ , що діє в площині перерізу називається **крутним моментом** (torque), а моменти  $M_y$ ,  $M_z$ , що діють в перпендикулярних до перерізу площинах, називаються *згинальними моментами*.

Для практичних розрахунків зусиль і моментів в перерізі необхідно мати на увазі, що:  $N$  чисельно рівна алгебраїчній сумі проєкцій всіх зовнішніх сил, що діють на одну з частин (ліву чи праву) розрізаного

стержня, на вісь стержня;  $Q_y$ ,  $Q_z$  – те саме на вісі  $y$  та  $z$ , відповідно;  $T$  чисельно рівний алгебраїчній сумі моментів всіх зовнішніх сил, що діють на одну з частин (ліву чи праву) розрізаного стержня, відносно осі стержня;  $M_y$ ,  $M_z$  – те саме відносно осей  $y$  та  $z$ .

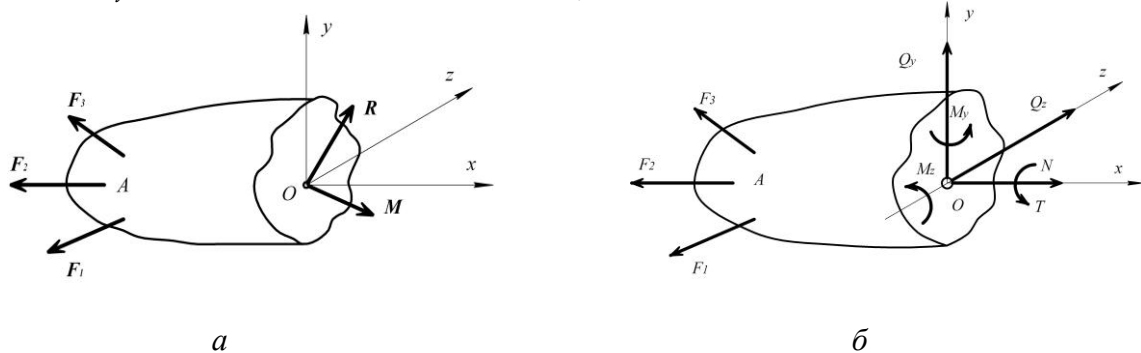


Рисунок 3.3 – До визначення внутрішніх зусиль у перерізі тіла

Внутрішні зусилля в різних перерізах тіла неоднакові. Якщо в поперечному перерізі виникає лише один внутрішній силовий фактор, то такий випадок деформації називають простим її видом. До простих видів деформації відносять: **розтяг (стиск)**, **зсув (зріз)**, **кручення**, **чистий згин**.

Розтяг (стиск) виникає при дії на стержень зовнішніх сил вздовж його осі, зсув (зріз) – при дії в поперечному перерізі поперечних сил, кручення – при дії тільки крутного моменту, а чистий згин – при дії тільки згинального моменту. Коли в поперечному перерізі стержня одночасно діє декілька внутрішніх силових факторів під дією зовнішнього навантаження, то в цьому випадку стержень має складний вид деформацій.

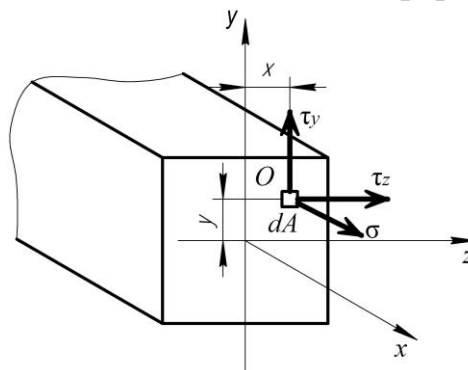


Рисунок 3.4 – До визначення напруження в точці тіла

У кожному перерізі, навантаженому зовнішніми силами тіла, виникають внутрішні зусилля, які в різних перерізах неоднакові, а в розглядуваному – розподіляються нерівномірно. Оцінити величину внутрішніх зусиль в конкретній точці  $O$  перерізу (рис. 3.4) можна, виділивши навколо неї елементарну площинку  $dA$ . Через надто малі її розміри будемо вважати, що внутрішні зусилля на ній розподілені

рівномірно і їх можна представити на цій площинці тільки головним вектором  $dR$ . Головний момент  $M = 0$  через те, що внутрішні зусилля прийняті рівні за величиною і за напрямом. Головний вектор  $dR$  має проекції на координатні осі  $x$ ,  $y$  і  $z$ , відповідно  $dN$ ,  $dQ_y$ ,  $dQ_z$ . Оскільки на безмежно малій площинці зусилля вважаються розподіленими рівномірно, то поділивши їх на  $dA$ , знайдемо інтенсивність внутрішніх зусиль. Внутрішні зусилля віднесені до одиниці площі називаються напруженнями в цій точці і відповідно позначаються

$$\sigma = \frac{dN}{dA}, \quad \tau_y = \frac{dQ_y}{dA}, \quad \tau_z = \frac{dQ_z}{dA}. \quad (3.3)$$

Напруження  $\sigma$  називається *нормальним* (діє в перпендикулярно до площини перерізу), а  $\tau_y$  і  $\tau_z$  – *дотичні* (діють у площині перерізу). Розмірність напружень Н/мм<sup>2</sup>, або мегапаскаль МПа (1 Н/мм<sup>2</sup> = 1 МПа = 10<sup>6</sup> Па = 10<sup>6</sup> Н/м<sup>2</sup>).

Напруження в різних перерізах, проведених через одну точку, неоднакові. Тому напруження в точці визначається обов'язково у вказаному перерізі. Напружений стан в точці відомий, коли відомі напруження на будь-яких трьох взаємно перпендикулярних площинах, проведених через цю точку.

Повне напруження  $\sigma_\Sigma$  визначається за формулою

$$\sigma_\Sigma = \sqrt{\sigma_2^2 + \tau_y^2 + \tau_z^2}. \quad (3.4)$$

### 3.4 Пружні деформації та їх зв'язок з напруженнями

Всі існуючі в природі матеріали не є абсолютно твердими і під дією зовнішніх сил певною мірою змінюють свою форму, тобто деформуються. Слід зазначити, що поняття “деформація” має подвійний зміст. В широкому розумінні, під деформацією розуміємо всяку зміну форми без кількісної її оцінки. В опорі матеріалів і в теорії пружності деформація має строге визначення і є кількісною мірою зміни геометричних розмірів навколо точки. Причиною деформування тіл є внутрішні зусилля і викликані ними напруження. В подальшому розглядаються тільки пружні деформації тіл, які появляються при навантаженні і повністю зникають після розвантаження тіла.

Зауважимо, що деформація залежить від двох факторів – від розмірів і геометричної форми тіла, а також від матеріалу з якого воно виготовлено.

Розрізняють лінійні та кутові деформації.

Розглянемо однорідний напружений стан бруса в якому виділимо елементарний об'єм у вигляді паралелепіпеда (рис. 3.5, а). Нормальні

напруження  $\sigma$ , що діють на його гранях, є незмінними по довжині. До навантаження паралелепіпед мав розміри  $l$  і  $a$ , а після навантаження його розміри змінилися і стали  $l+\Delta l$  і  $a-\Delta a$ . Зміна лінійних розмірів  $\Delta l$  називається **абсолютним видовженням**, а  $\Delta a$  – абсолютним зменшенням відповідних розмірів частини цього тіла.

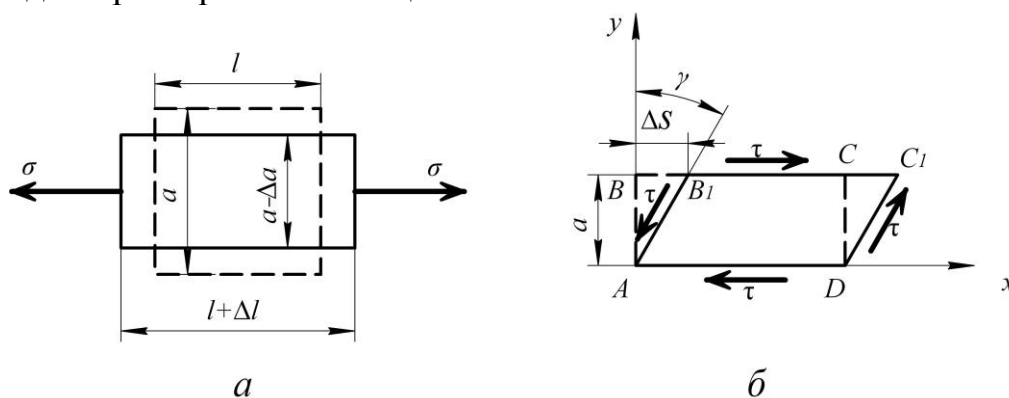


Рисунок 3.5 – Лінійна і кутова деформації

Відношення

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} \quad (3.5)$$

називаємо **поzdовжньою відносною деформацією**, а відношення

$$\varepsilon' = -\frac{\Delta a}{a} \quad (3.6)$$

– **поперечною відносною деформацією**.

Наведені види деформацій відносяться до **лінійних деформацій**. Експериментально встановлено, що в межах пружних деформацій відношення поперечної деформації  $\varepsilon'$  до лінійної величини  $\varepsilon$  є постійним для цього матеріалу і називається **коефіцієнтом Пуассона**. Цей коефіцієнт прийнято позначати грецькою буквою  $\mu$ , тобто

$$\mu = \frac{\varepsilon'}{\varepsilon} = \text{const.} \quad (3.7)$$

Між лінійними деформаціями і напруженнями, що виникають в тілі, існує зв'язок, що обумовлений пружними властивостями матеріалу. Вперше цей зв'язок встановив в 1676 р. англійський вчений Роберт Гук. За **законом Гука** нормальні напруження прямо пропорційні лінійним деформаціям, тобто

$$\sigma = \varepsilon \cdot E. \quad (3.8)$$

Коефіцієнт пропорційності  $E$  називається **модулем пружності** (elasticity modulus) **матеріалу**. Розмірність його така, як і напруження (Н/мм<sup>2</sup> або МПа).

Модуль пружності та коефіцієнт Пуассона є важливими характеристиками матеріалу. Для сталі  $\mu = 0,3$ ,  $E = 2,1 \cdot 10^5$  МПа, для чавуну  $E = 1,2 \cdot 10^5$  МПа, для алюмінію  $E = 7 \cdot 10^5$  МПа, для гуми  $E = 7$  МПа. Коефіцієнт Пуассона в загальному випадку  $0 \leq \mu \leq 0,5$ .

У випадку коли, поздовжня сила  $N$  і площа поперечного перерізу  $A$  є постійними по довжині бруса, отримуємо вираз закону Гука у вигляді

$$\Delta l = \frac{N \cdot l}{E \cdot A}. \quad (3.9)$$

Добуток  $E \cdot A$  називається *жорсткістю бруса* при розтягу (стиску).

Кутові зміщення (деформації) тіла пов'язані з дією дотичних напружень. За умови, коли на гранях безмежно малого паралелепіпеда нормальні напруження  $\sigma = 0$ , а дотичні  $\tau \neq 0$ , то відбувається зсув перерізу на певний кут  $\gamma$  (рис. 3.5, б). В цьому випадку прямокутник  $ABCD$  перетвориться в паралелограм  $AB_1C_1D$ . Кут  $\gamma$  називається відносним зсувом і визначається за виразом

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{\Delta S}{a} \approx \gamma, \quad (3.10)$$

де  $\Delta S$  – абсолютний зсув.

Кутові деформації в межах незначних напружень підпорядковуються також закону Гука, який для цього випадку записують так:

$$\tau = \gamma \cdot G, \quad (3.11)$$

де  $G$  – модуль пружності при зсуві, який аналогічний за змістом модулю пружності при розтягу  $E$  і має таку ж розмірність.

Між  $G$  і  $E$  та коефіцієнтом Пуассона існує зв'язок, який визначається формулою

$$G = \frac{E}{2(1 + \mu)}. \quad (3.12)$$

### 3.5 Основи теорії напружень

Напружений стан в деякій точці навантаженого тіла вважається відомим, якщо відомі компоненти напружень на будь-яких взаємно перпендикулярних площинах, проведених через цю точку. Виділимо безмежно малий елемент тіла у формі кута з відомими на його гранях напруженнями.

Напружений стан характеризується у загальному випадку дев'ятьма компонентами напружень:  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yx}, \tau_{zx}, \tau_{xz}, \tau_{zy}, \tau_{yz}$ . Ці компоненти існують на всіх гранях кубика як видимих, так і на невидимих (зображені на рисунку штриховими лініями).

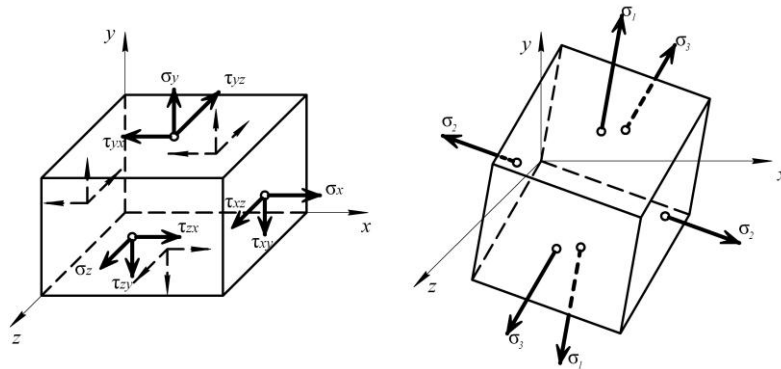


Рисунок 3.5 – Компоненти напружень і головні напруження

Рівновага кубика буде за умови рівності за модулем протилежно направлених нормальних напружень, а також дотичних напружень на двох взаємно перпендикулярних гранях, що перпендикулярні до спільного ребра цих граней, тобто  $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ ;  $\tau_{zx} = \tau_{xz}$ ;  $\tau_{zy} = \tau_{yz}$ . Ці співвідношення відомі під назвою **закону парності дотичних напруг**.

Наведені шість компонент визначають напруження на будь-якій іншій площині і дозволяють дослідити питання про екстремальність напружень. Через вказану точку можна провести три інші взаємно перпендикулярні площини, на яких нормальні напруження будуть досягати екстремальних значень, а дотичні будуть відсутні. Ці площини називають **головними**, а нормальні напруження – **головними напруженнями**.

Позначають головні напруження  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  при цьому необхідно зберігати співвідношення:  $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ . Наприклад,  $\sigma_1 = 40$  МПа,  $\sigma_2 = 0$ ,  $\sigma_3 = -50$  МПа. Зазначимо, що напруження вважається додатним, якщо воно діє від грані куба, і від’ємним – якщо до грані куба.

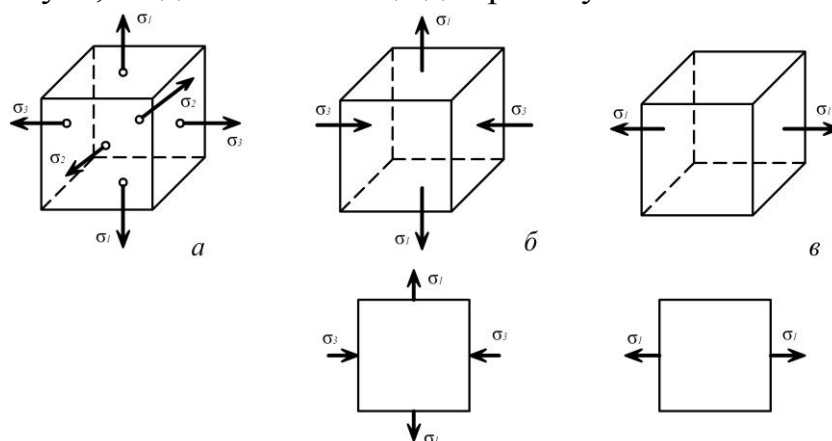


Рисунок 3.6 – Об’ємний, плоский і лінійний напружені стани

Наявність відмінних від нуля головних напружень визначає такі види напруженого стану (рис. 3.6): **об’ємний (тривісний)**, коли всі три головні напруження відмінні від нуля (рис. 3.6, а); **плоский (двовісний)**, якщо два

головні напруження не дорівнюють нулю (рис. 3.6, б); *лінійний (одновісний)*, коли не дорівнює нулю тільки одне головне напруження (рис. 3.6, в).

Аналіз напруженого стану в точках навантаженого тіла дозволяє зробити такі висновки, які подано без доведення.

- Головні площинки, які проведені через будь-яку точку тіла, є взаємно перпендикулярні.
- На головних площинках дотичні напруження дорівнюють нулю.
- Дотичні напруження досягають максимальних значень на площинках, повернутих відносно головних на кут  $45^\circ$ .
- У випадку плоского напруженого стану, за умови  $\sigma_1 = -\sigma_3$  (рис. 3.7), виникає деформація чистого зсуву, коли на площинках, повернутих відносно головних на кут  $45^\circ$ , виникає максимальне дотичне напруження  $\tau = \sigma_1 = -\sigma_3$ , а нормальні напруження відсутні.

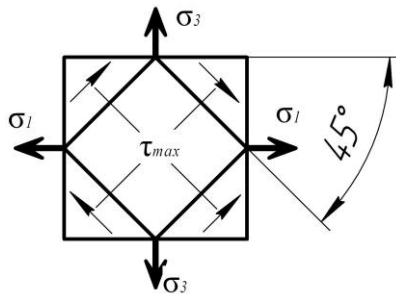


Рисунок 3.7 – До пояснення деформації чистого зсуву

### 3.6 Загальні принципи розрахунків на міцність

Розрахунок на міцність є однією з найголовніших задач забезпечення функціональної здатності елементів машин та споруд в умовах експлуатації. Втратою міцності, як вже зазначалось вище, прийнято вважати виникнення хоча би в одній точці залишкових деформацій або ознак руйнування.

Напруження, при яких виникають залишкові деформації чи ознаки руйнування, прийнято називати *граничними* і позначати  $\sigma_{lim}$ . Ці напруження для різних матеріалів можна визначити тільки експериментально.

З іншого боку, відповідними розрахунками в навантаженому тілі можна виявити небезпечні точки, де виникають найбільші напруження  $\sigma_{max}$ , які вважають *розрахунковими напруженнями*. Тоді оцінку міцності можна здійснити порівнянням розрахункового і граничного напружень. Міцність буде забезпечена, якщо  $\sigma_{max} < \sigma_{lim}$ . Число, яке показує, у скільки разів розрахункове напруження менше від граничного, називається коефіцієнтом запасу міцності, який позначають  $s$ .

Якщо йти таким шляхом, то для кожного можливого напруженого стану і для різних матеріалів треба мати граничні напруження, які отримують експериментально. Зрозуміло, що широка різноманітність можливих напружених станів, велика номенклатура застосовуваних в техніці матеріалів, відсутність або надмірна складність випробовувальної техніки для створення будь-якого виду напруженого стану, роблять такий підхід до розв'язання задачі неприйнятним. Тому потрібно знайти такий спосіб оцінки міцності, який би дозволив за експериментальними даними, отриманими в умовах простого одновісного розтягу чи стиску, проводити оцінку міцності деталей, що працюють в умовах будь-якого напруженого стану.

Нині прийнято таку схему оцінки міцності деталей. Довільний напружений стан в точці, який характеризується головними напруженнями  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  і  $\sigma_3$  (рис. 3.8), замінюють рівно небезпечним одновісним напруженим станом з еквівалентним розрахунковим напруженням  $\sigma_E$ , яке порівнюють з граничним напруженням  $\sigma_{lim}$ , отриманим в умовах достатньо вивченого експериментально одновісного розтягу.

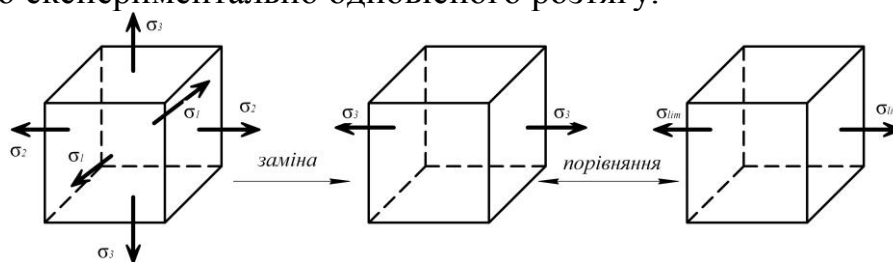


Рисунок 3.8 – Підхід до розрахунку на міцність

В такому підході до розрахунку на міцність коефіцієнт запасу міцності визначають за виразом

$$s = \frac{\sigma_{lim}}{\sigma_E}. \quad (3.13)$$

Щоб реалізувати подану схему розрахунку на міцність, необхідно пов'язати напруження двох рівно небезпечних станів певною залежністю, тобто виразити  $\sigma_E$  через головні напруження  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  і  $\sigma_3$ . Для встановлення такої залежності висунуто ряд гіпотез і запропоновано кілька *теорій міцності*.

**Теорія найбільших нормальних напружень** сформульована Галілеєм у XVII ст. За цією теорією основним фактором, що викликає небезпечний стан матеріалу в точці при об'ємному напруженому стані, є найбільше нормальне напруження. Тут еквівалентне напруження рекомендується приймати:

$$\sigma_E = \sigma_1 \text{ або } \sigma_E = |\sigma_3|. \quad (3.14)$$



Недоліком теорії є те, що при об'ємному напруженому стані вона враховує лише найбільші напруження і нехтує іншими напруженнями. Вона дає задовільні результати лише у разі перевірки міцності елементів, виготовлених з дуже крихких матеріалів (типу камінь, цегла та ін.).

**Теорія найбільших лінійних деформацій.** Ця теорія розроблена Маріоттом у 1682 р. Згідно з цією теорією вважається, що міцність матеріалу при об'ємному напруженому стані буде порушена тоді, коли найбільше відносне видовження досягне небезпечної величини. За теорією найбільших лінійних деформацій еквівалентне напруження прийнято визначати за формулою

$$\sigma_E = \sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3). \quad (3.15)$$

З формули видно, що теорія міцності враховує всі три головні напруження. Однак експериментальна перевірка теорії показала, що вона підтверджується лише для крихких матеріалів типу легованого чавуну, високоміцних сталей.

**Теорія найбільших дотичних напружень** запропонована Кулоном в 1773 р. За цією теорією небезпечний стан матеріалу в точці настає тоді, коли найбільші дотичні напруження досягають граничного значення  $\tau_{\text{lim}}$ . За еквівалентне напруження в теорії найбільших дотичних напружень приймають

$$\sigma_E = \sigma_1 - \sigma_3. \quad (3.16)$$

Ця теорія міцності підтверджується експериментами, особливо для деталей, виготовлених з пластичних матеріалів.

**Енергетична теорія міцності.** В 1904 р. М. Губер проаналізував недоліки попередніх теорій і запропонував теорію, згідно з якою небезпечний стан матеріалу при об'ємному напруженому стані настає тоді, коли питома потенціальна енергія формозміни досягає граничного значення. За цією теорією еквівалентне напруження при об'ємному напруженому стані визначають так

$$\sigma_E = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}. \quad (3.17)$$

Розрахунки за цією теорією підтверджуються експериментально тільки для деталей, що виготовлені з пластичних матеріалів.

**Теорія міцності Мора.** Ця теорія, яка сформульована Мором в 1900 р., побудована на припущенні, що з трьох головних напружень об'ємного напруженого стану на міцність впливають тільки найбільше  $\sigma_1$  та найменше  $\sigma_3$  головні напруження. Відповідно до теорії Мора еквівалентне напруження визначається за формулою

$$\sigma_E = \sigma_1 - k\sigma_3. \quad (3.18)$$

Тут  $k = \sigma_{p\lim} / \sigma_{c\lim}$  – коефіцієнт, що встановлює співвідношення між граничним напруженням при розтягу  $\sigma_{p\lim}$  і граничним напруженням при стиску  $\sigma_{c\lim}$  матеріалу деталі.

Теорія міцності Мора найбільш універсальна її можна застосовувати як для крихких, так і для пластичних матеріалів. Найкращі результати ця теорія дає для випадку, коли  $\sigma_1 > 0$  і  $\sigma_3 < 0$ . Ця обставина істотна, оскільки при розв'язуванні практичних задач напружений стан такого вигляду зустрічається досить часто.

Розглянемо тепер, для прикладу, спрощений плоский напружений стан (рис. 3.9). Так прийнято умовно називати частковий випадок напруженого стану, коли лише на одній грані кубика виникає нормальне напруження  $\sigma$ , а на інших гранях мають місце дотичні напруження  $\tau$  (рис. 3.9, а). Для такого напруженого стану головні напруження (рис. 3.9, б) визначають за формулами:

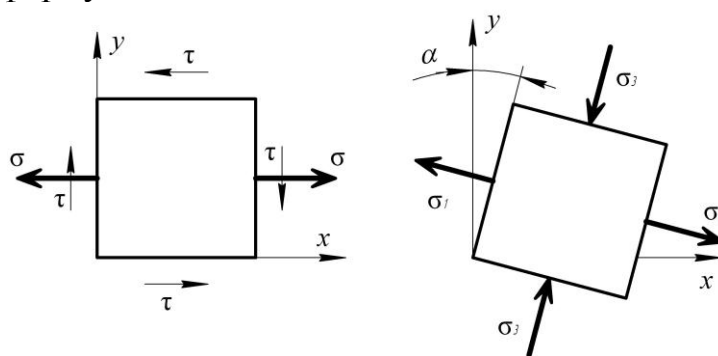


Рисунок 3.9 – Спрощений плоский напружений стан

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= \frac{\sigma}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}, \\ \sigma_2 &= 0, \\ \sigma_3 &= \frac{\sigma}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}.\end{aligned}\tag{3.19}$$

Якщо застосовувати теорію міцності Мора для такого напруженого стану, то отримаємо такий вираз для визначення еквівалентного напруження

$$\sigma_E = \frac{1-k}{2} \sigma + \frac{1+k}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}.\tag{3.20}$$

У формулу напруження  $\sigma$  треба підставляти зі своїм знаком. У випадку, коли матеріал деталі має при розтягу і стиску однакові характеристики, тобто  $\sigma_{p\lim} = \sigma_{c\lim}$ , то формула набуває вигляду

$$\sigma_E = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}.\tag{3.21}$$

Для такого ж матеріалу при чистому зсуві (див. рис. 3.10), коли  $\sigma_1 = -\sigma_3 = \tau_{\max}$ , теорія міцності Мора при  $k=0$  дає такий результат:

$$\sigma_E = 2\tau_{\max}. \quad (3.22)$$

У випадку одновісного розтягу (рис. 3.6, в)  $\sigma_1 = \sigma_p$ ,  $\sigma_3 = 0$  чи одновісного стиску  $\sigma_1 = 0$ ,  $\sigma_3 = -\sigma_c$  за теорією міцності Мора маємо:

$$\sigma_E = \sigma_p \text{ або } \sigma_E = \sigma_c.$$

У розрахунках на міцність коефіцієнт запасу міцності  $s$  за формулою (3.13) завжди повинен бути більшим від одиниці. Мінімально допустимі значення коефіцієнтів запасу міцності встановлюють на основі досвіду проектування і експлуатації різних технічних об'єктів; ці значення прийнято називати *допустимими* (або нормативними) і позначати  $[s]$ . Міцність елемента розрахунку вважається забезпеченою, якщо його розрахунковий коефіцієнт запасу не менший, ніж допустимий, тобто

$$s \geq [s]. \quad (3.23)$$

Допустимі коефіцієнти запасу міцності можуть прийматись в широких межах: від 1,3 до 5 і більше. Все залежить від точності визначення розрахункових напружень, достовірності інформації про граничні напруження, ступеня відповідальності об'єкта розрахунку і т.д. Детальніші відомості про вибір допустимих коефіцієнтів запасу міцності подано в розділах, де розглядаються розрахунки конкретних елементів різних технічних об'єктів.

Часто розрахунки на міцність зручно вести за допустимим навантаженням, яке визначають за виразом

$$[\sigma] = \frac{\sigma_{\lim}}{[s]}. \quad (3.24)$$

В цьому випадку умову міцності записують так:

$$\sigma_E \leq [\sigma]. \quad (3.25)$$

### 3.7 Побудова епюр внутрішніх сил

Графіки (діаграми), що показують як змінюється зусилля і моменти під час переходу від одного перерізу до іншого, називаються епюрами зусиль та моментів.

Під час побудови епюр рекомендується користуватись такими правилами:

- вісь (базу), на якій будується епюра, завжди вибирають так, щоб вона була паралельна осі стержня (або співпадала з нею).
- ординати епюр, які відповідають у вибраному масштабі значенням зусилля чи моменту, відкладають від осі епюри перпендикулярно до неї.

- епюри прийнято заштриховувати лініями, перпендикулярними до осі. Додатні значення сили або моментів відкладають вгору від осі, від'ємні – вниз.

- на епюрах проставляють числові значення, які показують величини характерних ординат, а в полі епюри в колі ставлять знаки сили.

Епюри внутрішніх зусиль будують в такій послідовності:

- за допомогою рівнянь рівноваги стержня (якщо він має опори) визначають реакції в'язей або перевіряють рівновагу стержня, якщо відомі всі зовнішні сили, що діють на нього;

- розбивають стержень на ділянки, в межах яких внутрішні зусилля можна визначити за елементарними функціями координати поперечного перерізу;

- для кожної з ділянок записують аналітичні вирази внутрішніх силових факторів;

- за одержаними виразами визначають внутрішні зусилля для характерних точок епюри;

- виконують побудову епюри внутрішнього силового фактора.

#### ***Епюри поздовжніх зусиль у стержнях.***

Поздовжні (нормальні) зусилля в поперечних перерізах стержня виникають в тих випадках, коли стержень навантажений зовнішніми силами, які діють вздовж його осі. Тоді у будь-якому поперечному перерізі всі внутрішні силові фактори дорівнюють нулю, крім поздовжнього зусилля ( $N \neq 0$ ). Поздовжнє зусилля за абсолютною величиною у довільному перерізі визначається за формулою:

$$|N| = \sum_{i=1}^n F_{ix} \varepsilon^i_a = \sum_{i=1}^k F_{ix} \delta a^i_a, \quad (3.26)$$

де  $F_{ix}$  – проекції зовнішніх сил на вісь стержня, а  $n$  і  $k$  – число зовнішніх сил, які діють відповідно зліва і справа від розглядуваного перерізу стержня.

Поздовжнє зусилля  $N$  прийнято вважати додатним, якщо воно діє від перерізу, і від'ємним – якщо до перерізу. Під час розв'язування задач знак  $N$  зручно встановлювати залежно від напрямку зовнішніх сил: якщо зовнішня сила направлена від розглядуваного перерізу, то вона викликає у цьому перерізі додатне поздовжнє зусилля, а якщо до перерізу, – то від'ємне.

Для прикладу побудови епюри поздовжніх зусиль розглянемо закріплений одним кінцем стержень (рис. 3.10), який навантажений в перерізах  $A$ ,  $B$ ,  $C$  зосередженими силами  $F_1 = 4F$ ,  $F_2 = 5F$ ,  $F_3 = 4F$ , направленими вздовж осі стержня.

Відкинувши опору стержня і замінивши її дію реакцією  $R$ , за умовою рівноваги дістаємо:

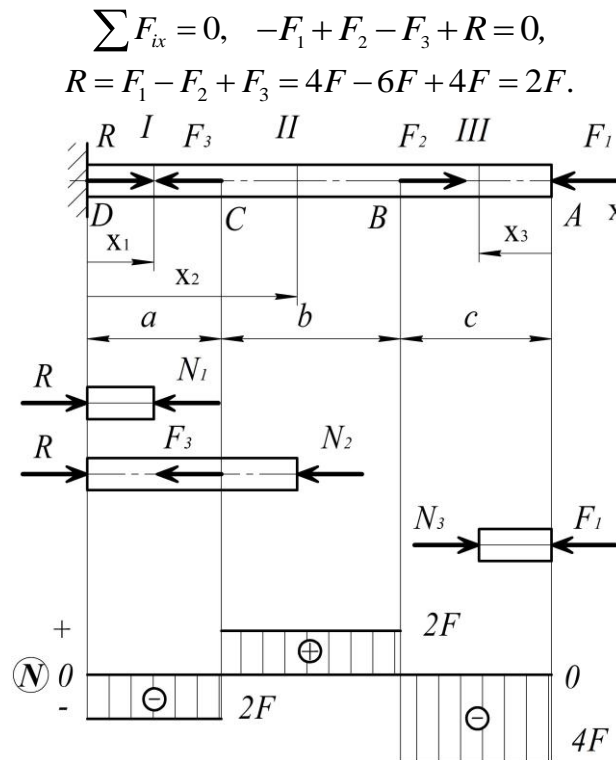


Рисунок 3.10 – До побудови епюри поздовжніх зусиль

Для побудови епюри поздовжніх зусиль розбиваємо стержень на три ділянки: ділянку I (DC), ділянку II (CB) і ділянку III (BA).

Поздовжні зусилля за виразом (3.26) в довільних перерізах на кожній ділянці (з урахуванням правила знаків):

в перерізі на ділянці I ( $0 \leq x_1 \leq a$ ):

$$N_1 = \sum F_{ix|_{x_1}} = R = 2F,$$

в перерізі на ділянці II ( $a \leq x_2 \leq a + b$ ):

$$N_2 = \sum F_{ix|_{x_2}} = R - F_3 = 2F - 4F = -2F,$$

в перерізі на ділянці III ( $0 \leq x_3 \leq c$ ):

$$N_3 = \sum F_{ix|_{x_3}} = F_1 = 3F.$$

Для перерізу з координатою  $x_3$  на III ділянці доцільно додавання виконувати справа від цього перерізу, оскільки справа діє тільки одна сила  $F_1$  і спрощується підрахунок поздовжнього зусилля  $N_3$ . Такий же результат для  $N_3$  можна отримати, просумувавши  $F_{ix}$  для зовнішніх сил, розташованих зліва від довільного перерізу на ділянці III.

Розрахунок поздовжніх зусиль  $N_1, N_2, N_3$  у цій задачі показує, що ці зусилля не залежать від координат  $x_1, x_2, x_3$  перерізів, тобто на кожній ділянці стержня поздовжні зусилля мають сталу величину, але можуть мати різні знаки. Епюра поздовжніх зусиль для заданої схеми навантаження стержня зображена на рис. 3.10.

### 3.8 Побудова епюр крутних моментів

Якщо до прямого стержня у площинах, перпендикулярних до його осі, прикладені зовнішні моменти пар сил, то у його поперечних перерізах всі внутрішні силові фактори дорівнюють нулю, крім крутного моменту ( $T \neq 0$ ). Крутний момент за абсолютним значенням у поперечному перерізі визначається за виразом:

$$|T| = \sum_{i=1}^n M_x(F_i)_{\text{лів.}} = \sum_{i=1}^k M_x(F_i)_{\text{прав.}} \quad (3.27)$$

Тут  $M_x(F_i)$  – моменти зовнішніх сил, прикладених до стержня, взятих відносно його осі  $x$ , а  $n$  і  $k$  – число зовнішніх моментів сил, що діють відповідно зліва і справа від перерізу, в якому визначають крутний момент.

Крутний момент вважають додатним, якщо він направлений за рухом годинникової стрілки за умови, коли дивитись на розглядуваний переріз, і від'ємним – якщо він направлений проти руху годинникової стрілки. Додатні крутні моменти викликають зовнішні моменти сил, які направлені проти руху годинникової стрілки, якщо дивитись на розглядувану частину стержня вздовж осі з боку перерізу.

Побудову епюри крутних моментів розглянемо на прикладі стержня (рис. 3.11), навантаженого у площинах, перпендикулярних до його осі  $x$ , зовнішніми моментами сил  $M_1 = 3M$ ,  $M_2 = 5M$  і  $M_3 = 2M$ .

Стержень під дією заданих зовнішніх моментів сил повинен знаходитись в рівновазі, тобто

$$\sum M_x(F_i) = 0; -M_1 + M_2 - M_3 = -3M + 5M - 2M = 0.$$

В довільних перерізах на двох ділянках (I – довжиною  $a$  і II – довжиною  $b$ ) стержня визначимо з урахуванням правила знаків крутні моменти (див. рис. 3.11).

В перерізі на ділянці I ( $0 \leq x_1 \leq a$ ):

$$T_1 = \sum M_x(F_i)_{\text{лів.}} = -M_1 = -3M.$$

В перерізі на ділянці II ( $0 \leq x_2 \leq b$ ):

$$T_2 = \sum M_x(F_i)_{\text{прав.}} = M_3 = 2M.$$

Крутні моменти  $T_1$ , і  $T_2$  в заданій схемі навантаження стержня не залежать від координат  $x_1$  і  $x_2$  перерізів, а їхня епюра зображена на рис. 3.11.

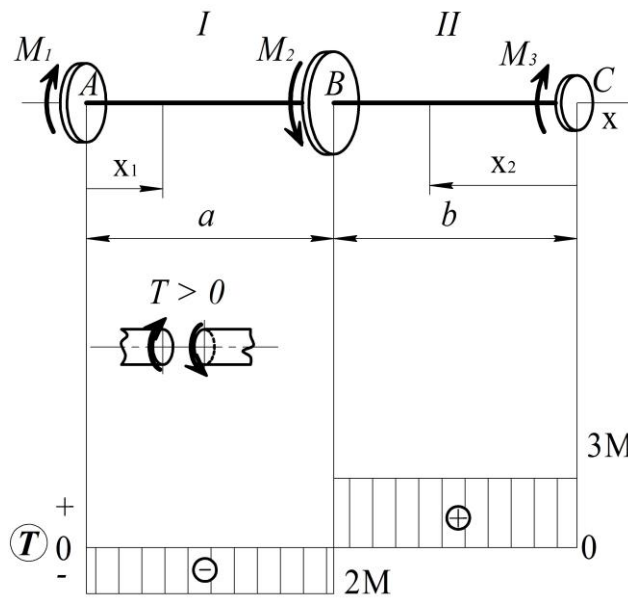


Рисунок 3.11 – До побудови епюри крутних моментів

### 3.9 Епюри поперечних зусиль і згинальних моментів

Поперечні зусилля і згинальні моменти виникають у поперечних перерізах стержнів типу балок. Балками називають стержні, що знаходяться в стані плоского поперечного згину. Плоский згин можливий за умови, що все зовнішнє навантаження, яке діє на балку, розташоване в одній площині і вісь балки деформується в цій же площині. При плоскому поперечному згині у будь-якому перерізі балки всі внутрішні силові фактори дорівнюють нулю, крім згинального моменту ( $M \neq 0$ ) і поперечної сили ( $Q \neq 0$ ).

Схема навантаження балки, що знаходиться у стані плоского поперечного згину, показана на рис. 3.12, а. Розрахункова схема балки зображується спрощено, причому поздовжню вісь балки позначають  $x$ , а осі поперечного перерізу –  $y$  і  $z$  так, як показано на рис. 3.12, б.

Поперечне зусилля в будь-якому поперечному перерізі балки чисельно дорівнює алгебричній сумі проекцій на вісь  $y$  всіх зовнішніх сил, розташованих по один бік від перерізу (зліва або справа від розглядуваного перерізу).

Поперечне зусилля  $Q$  в перерізі балки вважають додатним, якщо воно обертає розглядувану частину балки за ходом годинникової стрілки (рис. 3.12, в), і від'ємним, – якщо проти ходу годинникової стрілки (рис. 3.12, г). Додатне поперечне зусилля викликають зовнішні сили, що намагаються повернути розглядувану частину балки навколо осі  $z$  перерізу за ходом годинникової стрілки, і від'ємне, якщо навпаки.

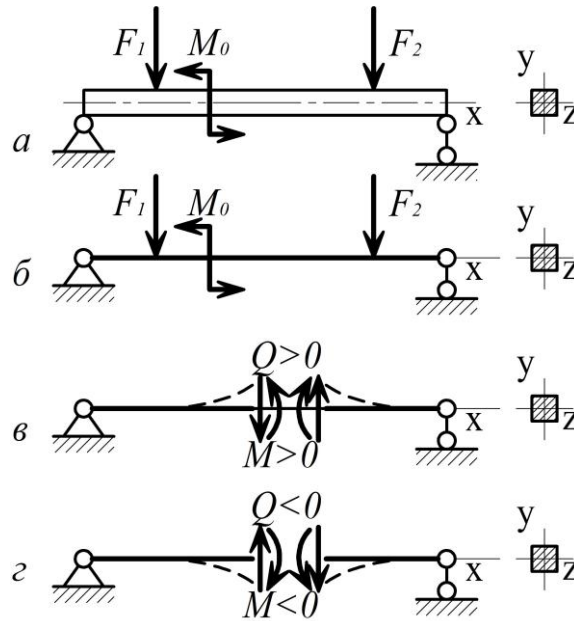


Рисунок 3.12 – Поперечне зусилля і згинальний момент при плоскому згині балки

$$|Q| = \sum_{i=1}^n F_{iy}|_{\text{лів.}} = \sum_{i=1}^k F_{iy}|_{\text{права}} \quad (3.28)$$

Загальний момент  $M$  у будь-якому поперечному перерізі балки чисельно рівний алгебричній сумі моментів відносно осі  $z$  перерізу всіх зовнішніх сил, розташованих по один бік від перерізу (зліва чи справа).

$$|M| = \sum_{i=1}^n M_z(F_i)|_{\text{лів.}} = \sum_{i=1}^k M_z(F_i)|_{\text{права}}. \quad (3.29)$$

Згинальний момент приймають додатним, якщо він вигинає розглядувану частину балки опуклістю вниз (рис. 3.12, в), і від'ємним, – якщо опуклістю вгору (рис. 3.12, г).

Для прикладу розглянемо побудову епюр поперечних зусиль і згинальних моментів для деяких найпростіших схем навантаження балок.

1. Балка оперта кінцями на шарнірні опори і навантажена зосередженою силою (рис. 3.13).

Реакції опор балки знаходимо за умовами її рівноваги:

$$\sum M_A(F_i) = 0, \quad -Fa + R_B l = 0, \quad R_B = \frac{Fa}{l},$$

$$\sum M_B(F_i) = 0, \quad Fb - R_A l = 0, \quad R_A = \frac{Fb}{l}.$$

Балка має дві ділянки: ділянку I (AC) і ділянку II (CB).

Для довільного перерізу ( $0 \leq x_1 \leq a$ ) на ділянці I отримаємо:

$$Q_1(x_1) = \sum F_{iy}|_{\text{лів.}} = R_A = \frac{Fb}{l},$$



$$M_1(x_1) = \sum M_z(F_i)_{\text{ліва}} = R_A x_1 = \frac{Fb}{l} \cdot x_1,$$

$$M_1(0) = 0, \quad M_1(a) = \frac{Fab}{l}.$$

Для довільного перерізу ( $0 \leq x_2 \leq b$ ) на ділянці II отримаємо:

$$M_2(a) = R_A a - M_0 = 7,5 \cdot 1 - 10 = -2,5 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

$$M_2(x_2) = \sum M_z(F_i)_{\text{ліва}} = R_A x_2 = \frac{Fb}{l} \cdot x_2,$$

$$M_2(0) = 0, \quad M_2(b) = \frac{Fab}{l}.$$

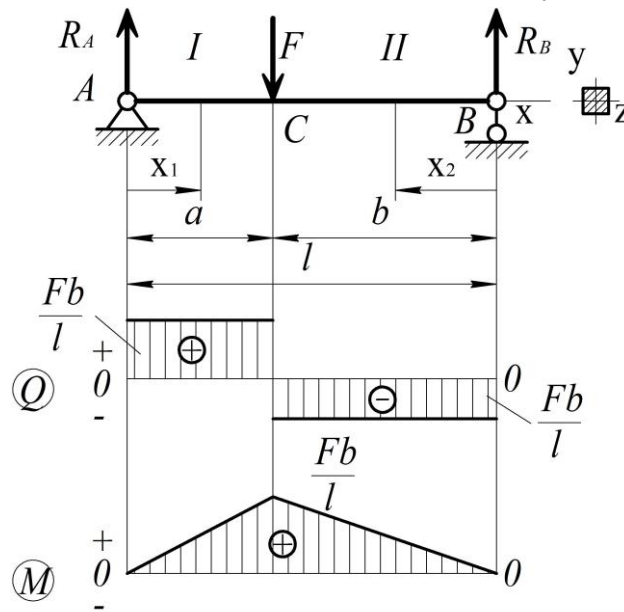


Рисунок 3.13 – До побудови епюр  $Q$  і  $M$

На обох ділянках поперечне зусилля  $Q$  є сталою величиною, а згинальний момент  $M$  виражається лінійною функцією координати  $x_1$  або  $x_2$  поперечного перерізу балки.

За одержаними значеннями поперечних зусиль і згинальних моментів в характерних перерізах побудовані епюри  $Q$  і  $M$  мають вигляд, зображений на рис. 3.13. Тут додатні згинальні моменти прийнято відкладати вниз від нульової лінії, а від'ємні – вгору. Це пов'язано з тим, що епюра буде побудована на опуклому боці зігнутої осі балки і наближено відтворювати цю вісь.

2. Балка оперта кінцями на шарнірні опори і навантажена рівномірно розподіленою по довжині силою  $q$  (рис. 3.14).

Реакції опор балки за умовами її рівноваги:

$$\sum M_A(F_i) = 0, \quad -\frac{ql^2}{2} + R_B l = 0, \quad R_B = \frac{ql}{2},$$

$$\sum M_B(F_i) = 0, \quad \frac{ql^2}{2} - R_A l = 0, \quad R_A = \frac{ql}{2}.$$

Балка із заданою схемою навантаження має одну ділянку, оскільки для всього діапазону зміни координати поперечного перерізу  $0 \leq x \leq l$  можна записати аналітичні вирази для поперечного зусилля і згинального моменту:

$$Q_2(x_2) = \sum F_{iy|сз\hat{a}} = R_A - qx = q(0,5l - x),$$

$$Q(0) = \frac{ql}{2}, \quad Q(l) = -\frac{ql}{2},$$

$$M(x) = \sum M_z(F_i)|_{лив.} = R_A x - \frac{qx^2}{2} = 0,5q(lx - x^2),$$

$$M(0) = 0, \quad M(l) = 0.$$

Поперечне зусилля  $Q$  є лінійною функцією координати  $x$  перерізу балки, а згинальний момент  $M$  – параболічною функцією. Для визначення максимуму згинального моменту знайдемо похідну

$$\frac{dM(x)}{dx} = 0,5q(l - 2x),$$

яка в точці екстремуму функції повинна дорівнювати нулю:

$$0,5q(l - 2x_m) = 0.$$

Тут  $x_m$  – координата поперечного перерізу балки, згинальний момент у якому набуває екстремального значення. Із записаного рівняння отримуємо  $x_m = 0,5l$ . Екстремальне значення згинального моменту

$$M(x_m) = M(0,5l) = 0,5q(0,5l^2 - 0,25l^2) = \frac{ql^2}{8}.$$

Побудовані за одержаними значеннями  $Q$  і  $M$  епюри поперечних зусиль і згинальних моментів зображені на рис. 3.14.

3. Двоопорна балка навантажена зосередженою парою сил моментом  $M_0$  (рис. 3.15).

Умови рівноваги балки і реакції її опор:

$$\sum M_A(F_i) = 0, \quad -R_B l + M_0 = 0, \quad R_B = \frac{M_0}{l},$$

$$\sum M_B(F_i) = 0, \quad -R_A l + M_0 = 0, \quad R_A = \frac{M_0}{l}.$$

Для двох ділянок балки I (AC) і II (CB) визначимо поперечні зусилля згинальні моменти.

Для довільного перерізу ( $0 \leq x_1 \leq b$ ) наділянні I:

$$Q_1(x_1) = \sum F_{iy}|_{\varepsilon^2\hat{a}} = R_A = \frac{M_0}{l},$$

$$M_1(x_1) = \sum M_z(F_i)|_{\varepsilon^2\hat{a}} = R_A x_1 = \frac{M_0}{l} \cdot x_1, \quad M_1(0) = 0, \quad M_1(a) = \frac{M_0 a}{l}.$$

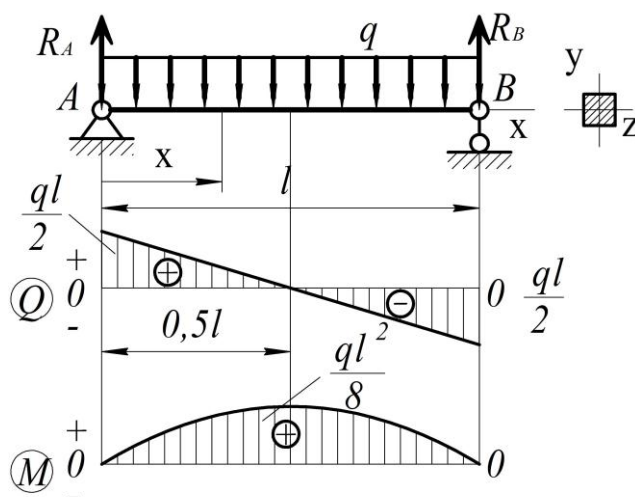


Рисунок 3.14 – До побудови епюр  $Q$  і  $M$

У довільному перерізі ( $0 \leq x_2 \leq b$ ) на ділянці II:

$$Q_2(x_2) = \sum F_{iy}|_{\varepsilon^2\hat{a}} = R_A = \frac{M_0}{l},$$

$$M_2(x_2) = \sum M_z(F_i)|_{\varepsilon^2\hat{a}} = -R_A x_2 = -\frac{M_0}{l} \cdot x_2, \quad M_2(0) = 0, \quad M_2(b) = -\frac{M_0 b}{l}.$$

Епюри поперечних зусиль і згинальних моментів для розглянутої схеми навантаження балки зображені на рис. 3.15.

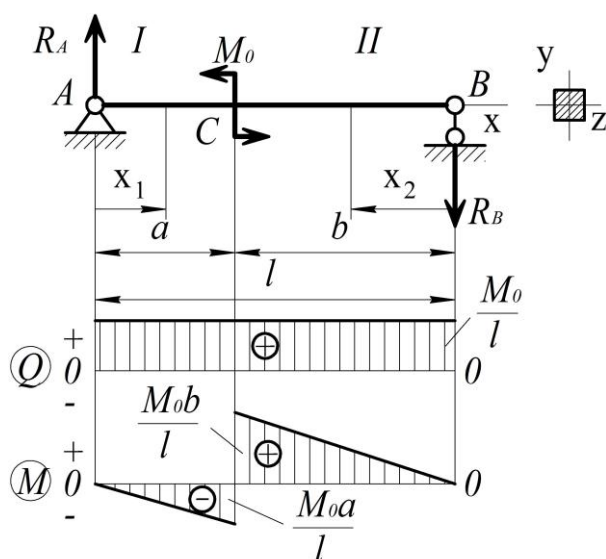


Рисунок 3.15 – До побудови епюр  $Q$  і  $M$

### 3.10 Приклади розрахунків

**Задача 1.1** Побудувати епюру поздовжніх зусиль, що виникають у поперечних перерізах стержня, зображеного на рис. 3.16, якщо  $F_1=20$  кН,  $F_2=50$  кН,  $F_3=30$  кН.

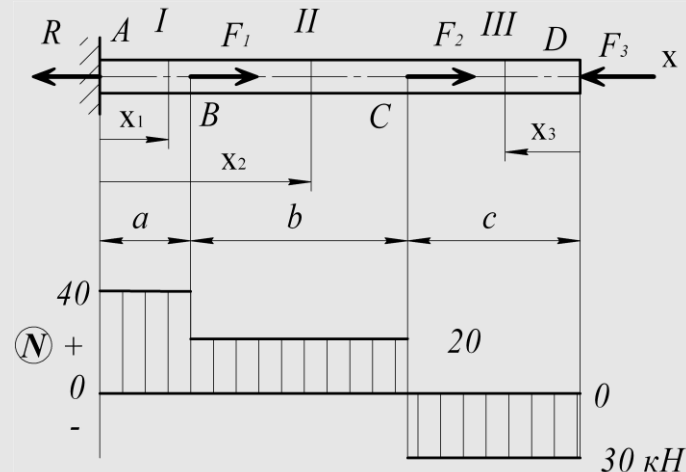


Рисунок 3.16 – Побудова епюри поздовжнього зусилля  $N$

**Розв'язання.** Звільнивши стержень від в'язі і змінивши її дію реакцією  $R$ , запишемо умову рівноваги стержня

$$\sum F_{ix} = 0; \quad -R + F_1 + F_2 - F_3 = 0.$$

Звідки  $R = F_1 + F_2 - F_3 = 20 + 50 - 30 = 40$  кН.

Для побудови епюри поздовжніх зусиль розділимо стержень на три ділянки: ділянку I ( $AB$ ), ділянку II ( $BC$ ) і ділянку III ( $CD$ ).

Поздовжні зусилля на кожній з ділянок знайдемо за виразом:

$$\text{Ділянка I } (0 \leq x_1 \leq a): N_1 = \sum F_{ix| \vec{e}_3 \vec{a}} = R = 40 \text{ кН};$$

$$\text{Ділянка II } (a \leq x_2 \leq a+b): N_2 = \sum F_{ix| \vec{e}_3 \vec{a}} = R - F_1 = 40 - 20 = 20 \text{ кН};$$

$$\text{Ділянка III } (0 \leq x_3 \leq c): N_3 = \sum F_{ix| \vec{r} \vec{\partial} \vec{a}} = -F_3 = -30 \text{ кН};$$

В межах кожної з ділянок поздовжнє зусилля є сталою величиною (не залежить від координати  $x$  перерізу). Епюра поздовжніх зусиль для заданої схеми навантаження стержня зображена на рис. 3.16.

**Задача 1.2** Побудувати епюру крутних моментів, що виникають у поперечних перерізах стержня із жорстко закріпленими на ньому дисками (рис. 3.17), якщо до дисків прикладені моменти сил  $M_0=100$  Н·м,  $M_1=20$  Н·м,  $M_2=30$  Н·м,  $M_3=50$  Н·м, котрі діють у площинах, перпендикулярних до осі стержня.

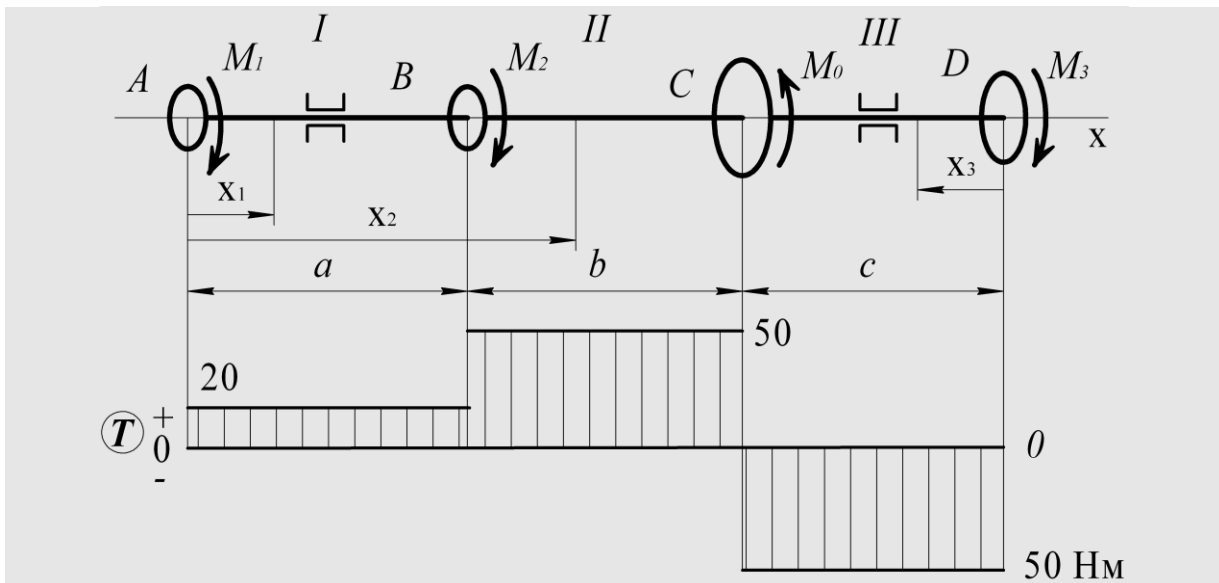


Рисунок 3.17 – Побудова епюри крутного моменту  $T$

Розв'язання. Перевірка рівноваги стержня:

$$\sum M_x(F_i) = 0; \quad M_1 + M_2 - M_0 = 20 + 30 - 100 + 50 = 0.$$

Умова рівноваги стержня виконується.

Стержень поділимо на три ділянки: ділянку I (AB), ділянку II (BC) і ділянку III (CD). Для довільних перерізів на кожній ділянці визначимо крутні моменти за виразом:

Ділянка I ( $0 \leq x_1 \leq a$ ):

$$T_1 = \sum M_x(F_i)_{\text{ліва}} = M_1 = 20 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

Ділянка II ( $a \leq x_2 \leq a + b$ ):

$$T_2 = \sum M_x(F_i)_{\text{ліва}} = M_1 + M_2 = 20 + 30 = 50 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

Ділянка III ( $0 \leq x_3 \leq c$ ):

$$T_3 = \sum M_x(F_i)_{\text{права}} = -M_3 = -50 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

В межах кожної ділянки крутний момент є сталим. Епюра крутних моментів зображена на рис. 3.11.

**Задача 1.3** Побудувати епюру поперечних зусиль і згинальних моментів, що виникають у поперечних перерізах балки, зображеної на рис. 3.18. Балка має шарнірні опори A і C і навантажена в площині рисунка розподіленою силою інтенсивності  $q=10$  кН/м, зосередженою силою  $F=5$  кН і парою сил, момент якої  $M_0=10$  Н·м. Довжини ділянок балки становлять  $a=1$  м,  $b=2$  м,  $c=1,5$  м.

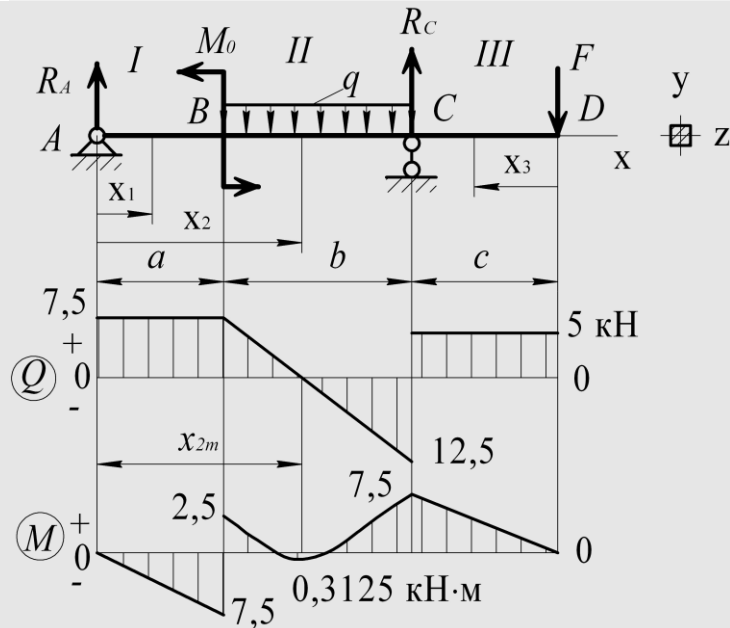


Рисунок 3.18 – Побудова епюр  $Q$  і  $M$

Розв'язання. Звільнивши балку від опор і замінивши їхню дію реакціями  $R_A$  і  $R_C$ , за умови рівноваги балки визначимо невідомі реакції.

$$\sum M_A(F_i) = 0, \quad M_0 - qb(a + 0,5b) + R_C(a + b) - F(a + b + c) = 0,$$

$$R_C = \frac{1}{a + b} [F(a + b + c) + qb(a + 0,5b) - M_0] =$$

$$= \frac{1}{1 + 2} [5(1 + 2 + 1,5) + 10 \cdot 2(1 + 0,5 \cdot 2) - 10] = 17,5 \text{ кН},$$

$$\sum M_C(F_i) = 0, \quad -R_A(a + b) + M_0 + 0,5qb^2 - Fc = 0,$$

$$R_A = \frac{1}{a + b} [M_0 + 0,5qb^2 - Fc] = \frac{1}{1 + 2} [10 + 0,5 \cdot 10 \cdot 2^2 - 5 \cdot 1,5] = 7,5 \text{ кН}.$$

Балку розбиваємо на три ділянки: ділянку I (AB), ділянку II (BC) і ділянку III (CD). Поперечні зусилля і згинальні моменти в поперечних перерізах на кожній з ділянок визначимо відповідно за виразами:

Ділянка I ( $0 \leq x_1 \leq a$ ):

$$Q_1(x_1) = \sum F_{iy|e^3a} = R_A = 7,5 \text{ кН},$$

$$M_1(x_1) = \sum M_z(F_i)_{|e^3a} = R_A x_1,$$

$$M_1(0) = 0, \quad M_1(a) = R_A a = 7,5 \cdot 1 = 7,5 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Ділянка II ( $a \leq x_2 \leq a + b$ ):

$$Q_2(x_2) = \sum F_{iy|z\hat{a}} = R_A - q(x_2 - a),$$

$$Q_2(a) = R_A = 7,5 \text{ кН} , \quad Q(a+b) = R_A - qb = 7,5 - 10 \cdot 2 = -12,5 \text{ кН} ,$$

$$M_2(x_2) = \sum M_z(F_i)_{|z\hat{a}} = R_A x_2 - M_0 - \frac{1}{2} q(x_2 - a)^2,$$

$$M_2(a) = R_A a - M_0 = 7,5 \cdot 1 - 10 = -2,5 \text{ кН} \cdot \text{м} ,$$

$$M_2(a+b) = R_A(a+b) - M_0 - \frac{1}{2} qb^2 = 7,5 \cdot (1+2) - 10 - \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 2^2 = -7,5 \text{ кН} \cdot \text{м} .$$

На ділянці II поперечне зусилля є лінійною функцією, а згинальний момент – параболічною функцією координати  $x_2$ . Знайдемо значення цієї координати  $x_{2m}$ , що відповідає екстремуму згинального моменту. Для цього прирівняємо поперечне зусилля  $Q_2(x_2)$  до нуля

$$Q_2(x_2) = R_A - q(x_{2m} - a) = 0,$$

звідки

$$x_{2m} = \frac{R_A}{q} + a = \frac{7,5}{10} + 1 = 1,75 \text{ м} .$$

Екстремальне значення згинального моменту

$$M_2(x_{2m}) = R_A x_{2m} - M_0 - \frac{1}{2} q(x_{2m} - a)^2 = 7,5 \cdot 1,75 - 10 - \frac{1}{2} \cdot 10(1,75 - 1)^2 = 0,3125 \text{ кН} \cdot \text{м} .$$

Ділянка III ( $0 \leq x_3 \leq c$ ):

$$Q_3(x_3) = \sum F_{iy|\bar{y}\delta\hat{a}\hat{a}} = F = 5 \text{ кН},$$

$$M_3(x_3) = \sum M_z(F_i)_{|\bar{y}\delta\hat{a}\hat{a}} = -F x_3,$$

$$M_3(0) = 0, \quad M_3(c) = -F c = -5 \cdot 1,5 = -7,5 \text{ кН} \cdot \text{м} .$$

Побудовані епюри  $Q$  і  $M$ , відповідно до отриманих характерних значень поперечних і згинальних моментів, мають форму, показану на рис 3.18.



## Основні поняття з теорії механізмів і машин

### 4.1 Загальні означення, структура і класифікація механізмів

*Теорія механізмів і машин (ТММ)* – це наука, що вивчає структуру, кінематику і динаміку механізмів і машин. Більш повне означення предмета ТММ дала Міжнародна організація теорії механізмів і машин, що створена в 1969 р.: теорія механізмів і машин є галузь науки, що займається теоретичними й експериментальними дослідженнями геометрії руху, динаміки та керування систем машин, окремих машин і механізмів та їх складових частин з урахуванням технологічних питань, передачі енергії і, якщо необхідно, передачі та обробки інформації.

Оскільки рух механізмів і машин залежить від їх будови та сил, що діють на них, ТММ розв'язує дві задачі: дослідження механізмів, яке називається **аналізом** (analysis); створення механізмів із заданими структурними, кінематичними і динамічними властивостями, що називається **синтезом** (synthesis).

Широкий клас різних об'єктів охоплюється поняттям “машина”. **Машина** (machine) – це механізм або комплекс механізмів, створений людиною, що виконує рухи для перетворення енергії матеріалів чи інформації, для заміни або полегшення фізичної та розумової праці, збільшення її продуктивності, чи повної заміни людини у виконанні нею трудових функцій.

Основною ознакою машини є виконання цим пристроєм механічного руху і здійснення певної корисної роботи. Залежно від функціонального призначення розрізняють:

- *енергетичні машини*, які перетворюють будь-який вид енергії в енергію механічну, і навпаки; до енергетичних машин відносять двигуни внутрішнього згорання, електродвигуни, електрогенератори, турбіни тощо;
- *технологічні і транспортні машини*, які перетворюють матеріали, змінюють властивості, форму, стан і положення об'єктів праці; до них відносяться металообробні верстати, прокатні стани, гірничі й текстильні машини, літаки, автомобілі, поїзди, транспортери тощо.
- *інформаційні машини*, які призначення для отримання і перетворення інформації; інформаційні машини виконують контрольні-вимірювальні операції, функції регулювання і керування технологічними процесами.



Машина використовується, як правило, у вигляді сукупності, системи машин. В класичному виконанні така система складається із машини – двигуна Д (рис. 4.1), передавального механізму ПМ, та виконавчої ланки ВЛ. Передавальний механізм перетворює різні види рухів із зміною параметрів для забезпечення робочих функцій виконавчої ланки. Для узгодження функціонування двигуна та виконавчої ланки використовують систему керування СК. Залежно від умов роботи машинного агрегату режим керування може здійснюватися вручну чи автоматично.

Система декількох машин, що взаємодіють і зв'язані конструктивно між собою, називається **машинним агрегатом**. Для узгодження роботи двигуна та виконавчої ланки вводять систему керування СК.

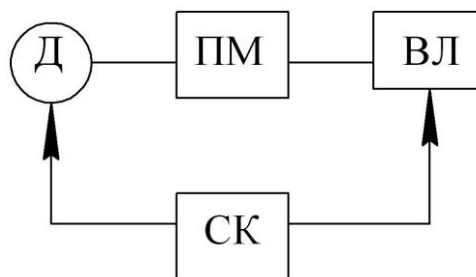


Рисунок 4.1 – Принципова схема машинного агрегату

У структурному відношенні машина є єдиним комплексом механізмів, що забезпечує виконання притаманних їй функцій.

**Механізмом** (mechanism) називають систему рухомоз'єднаних між собою ланок, призначених для перетворення одного виду руху на інший. Механізми, що входять до складу машини дуже різноманітні. За функціональним призначенням механізми машин зазвичай поділяють на передавальні, виконавчі, механізми керування, контролю та регулювання, подачі, транспортування та сортування.

За характером руху, що здійснюють окремі точки ланок, механізми поділяють на *плоскі* та *просторові*. У плоских механізмах точки всіх деталей рухаються в площинах, паралельних одній нерухомій площині. В просторових механізмах ця умова не зберігається.

**Ланкою** (link) **механізму** називаємо деталь чи групу жорстко з'єднаних між собою його деталей. Крім того, ланки можуть бути гнучкими (троси, паси, ланцюги), рідинними чи газоподібними. Механізм, кінематична схема якого показана на рис. 4.2, складається з чотирьох ланок.

Ланка 1, яка може обертатись, називається *кривошипом*; ланка 2, що здійснює складний рух, – *шатуном*; ланка 3, що рухається поступально, – *повзуном*. Нерухому ланку 4 прийнято називати *стояком*. Розглянутий механізм називається кривошипно-повзунний.

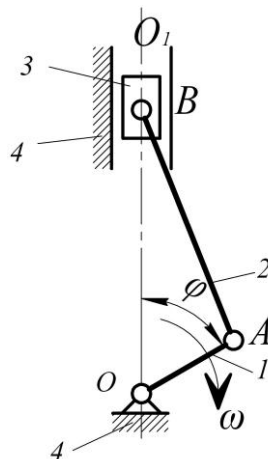


Рисунок 4.2 – Кривошипно-повзунний механізм

У кожному механізмі розрізняють початкову, ведучу і ведену ланки. *Початковою* називають ланку, закон руху якої задається. **Ведуча** (driving) – ланка, до якої прикладені рушійні сили, що приводять механізм в рух. Ланка, що здійснює рух для виконання якого призначений механізм, називається **веденою** (driven). Інші рухомі ланки механізму називаються **проміжними**.

**Кінематична пара** – це рухоме з'єднання двох ланок, що перебувають в безпосередньому дотику. Поверхні, лінії, точки ланки, якими вона може дотикатись до інших ланок, утворюючи кінематичну пару, називають *елементами кінематичної пари*. Від геометричних форм елементів кінематичної пари залежить ступінь обмеження руху однієї ланки кінематичної пари відносно іншої.

За характером дотику ланок кінематичні пари поділяють на *вищі* та *нижчі*. В нижчих кінематичних парах ланки дотикаються між собою по поверхні, а у вищих – по лінії або в точці. Залежно від характеру відносного руху ланок нижчі кінематичні пари можуть бути *обертовими*, *поступальними*, *сферичними* і *гвинтовими*. Вищі кінематичні пари дозволяють отримати більш різноманітні види взаємного руху їх ланок, ніж нижчі. Але нижчі кінематичні пари здатні передавати значні зусилля за меншого зношування в порівнянні з вищими парами.

Кінематичні пари розрізняють залежно від числа умов зв'язку, що накладаються ними на відносний рух ланок. Академіком І. І. Артоболевським введена класифікація кінематичних пар для просторових механізмів, згідно з якою всі пари поділяються на п'ять класів. Розглянемо класифікацію кінематичних пар для плоских механізмів. Кожна ланка, що здійснює плоский рух, має три ступені вільності. Якщо кінематична пара накладає на ланку  $S$  умови зв'язку на відносний рух, то ця ланка має число ступенів вільності

$$H = 3 - S.$$

Отже, число ступенів вільності ланки кінематичної пари при відносному русі може бути в межах від одного до двох, оскільки число умов зв'язку, яке може накладати кінематична пара, дорівнюватиме 1 або 2 (якщо  $S = 0$ , то ланки не утворюють кінематичну пару, а якщо  $S = 3$ , то маємо жорстке з'єднання ланок). Клас кінематичної пари визначається числом умов зв'язку  $S = 3 - H$ , які накладає ця пара на відносний рух ланок.

На рис. 4.3 зображена вища кінематична пара 4-го класу (1, 2 та 3-й класи кінематичних пар властиві просторовим механізмам), яка утворена, наприклад, колесом і рейкою. В цій кінематичній парі число умов зв'язку  $S = 1$  ( $y_A = \text{const}$ ), а число ступенів вільності ланок  $H = 2$  (можливе переміщення колеса вздовж осі  $X$  і його обертання навколо осі  $A$ ).

Нижча кінематична пара 5-го класу (рис. 4.4) утворена кривошипом і стояком. Тут число умов зв'язку  $S = 2$  ( $x = \text{const}$  і  $y_A = \text{const}$ ), а число ступенів вільності ланок  $H = 1$  (можливе обертання ланок навколо осі  $A$ ).

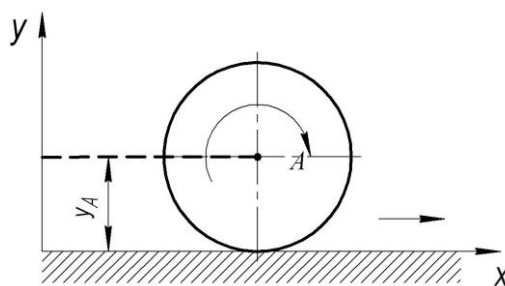


Рисунок 4.3 – Вища кінематична пара 4-класу

Група ланок, в якій окремі ланки з'єднані між собою кінематичними парами, називається *кінематичним ланцюгом*. Кінематичні ланцюги бувають прості і просторові, замкнені і відкриті. В простому кінематичному ланцюзі кожна ланка входить не більше ніж у дві кінематичні пари. Складний кінематичний ланцюг має хоча би одну ланку, яка входить більш ніж у дві кінематичні пари. До замкнених відносяться ланцюги, в яких кожна ланка входить, щонайменше в дві кінематичні пари, а до незамкнених – ланцюги, в яких є ланки, що входять тільки в одну кінематичну пару.

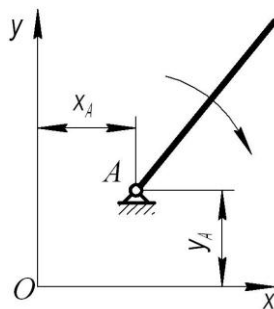


Рисунок 4.4 – Нижча кінематична схема 5-го класу

На підставі наведених вище означень і понять можна сформулювати, що **механізм** – це кінематичний ланцюг з однією нерухомою ланкою, в якому під час заданого руху однієї або декількох ланок всі інші ланки здійснюють цілком конкретні переміщення.

Під час дослідження механізмів користуються їх умовним зображенням, складаються структурні, кінематичні та інші схеми. На структурних схемах за допомогою умовних позначень, встановлених держстандартом, зображають ланки, кінематичні пари, вказують стояк та ведучі ланки (див. рис. 4.2). Структурні схеми, виконані у відповідному масштабі, називаються кінематичними схемами.

Метод класифікації плоских механізмів та принципи їх побудови були розроблені на початку XX ст. російським ученим Л. В. Ассуром. Академік І. І. Артоболевський поширив класифікацію Л. В. Ассура на просторові механізми. Практичне значення класифікації полягало в тому, що вона давала можливість встановлювати відповідність ступеня складності механізму (його класу) методам його дослідження і побудови. Класифікація Ассура-Артоболевського є найраціональнішою для плоских важільних механізмів з нижчими парами, що пов'язано єдністю методів кінематичного та динамічного досліджень кінематичних ланцюгів, віднесених до одного класу.

В основі класифікації лежить поняття ступінь рухомості механізму, яке характеризує число ступенів вільності механізму відносно нерухомої ланки (стояка). Якщо у плоскому механізмі число рухомих ланок дорівнює  $n$ , тоді загальне число ступенів вільності цих ланок, що зв'язані між собою, дорівнює  $3n$ . Ланки у механізмі можуть утворювати нижчі і вищі кінематичні пари. Кожна нижча кінематична пара накладає на ланку дві умови зв'язку, а кожна вища пара – одну умову зв'язку. Якщо у механізмі число нижчих пар дорівнює  $p_5$ , а вищих –  $p_4$ , то ступінь рухомості плоского механізму

$$W = 3n - 2p_5 - p_4. \quad (4.1)$$

Формула (4.1) називається **структурною формулою** плоского механізму і носить ім'я П. Л. Чебишева, який довів її на 14 років раніше, ніж німецький вчений Грюблер.

Ступінь рухомості механізму відповідає тій кількості незалежних між собою координат (узагальнених координат), яку необхідно задати для однозначного визначення положення всіх ланок механізму. Так, для чотириланкового кривошипно-повзунного механізму (див. рис. 4.2) маємо:

$$n = 3, \quad p_5 = 4, \quad p_4 = 0.$$

Визначимо ступінь рухомості за формулою Чебишева (4.1):

$$W = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 4 - 0 = 1.$$

Отже, ступінь рухомості механізму дорівнює одиниці. Це означає, що такий механізм повинен мати одну ведучу ланку і одну узагальнену координату. Досить задати цій ланці закон руху, щоб рух інших був цілком визначений. Узагальненою координатою є кут  $\varphi$ , утворений стояком і кривошипом. Для роботи механізмів з двома і більше ступенями рухомості треба задати число незалежних рухів, яке дорівнює ступеню рухомості цих механізмів.

За класифікацією Ассура-Артоболевського, кожний механізм розглядають як складну систему, до якої входять стояк, початкові ланки і статично визначені групи ланок з нульовим ступенем рухомості (групи Ассура) відносно ланок, до яких ці групи приєднуються. Початкова ланка, об'єднана зі стояком, утворює механізм, ступінь рухомості якого дорівнює одиниці, і має назву початковий механізм 1-го класу (рис 4.5 а, б).

Будь-який плоский важільний механізм з кінематичними парами 5-го класу можна створити, послідовно приєднуючи до початкового механізму групи Ассура.

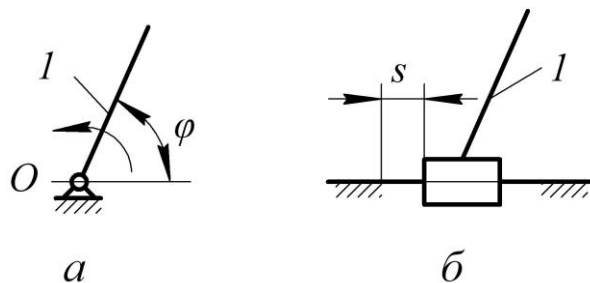


Рисунок 4.5 – Початкові механізми

Структурною **групою Ассура** (group of Assyria) називається кінематичний ланцюг з парами 5-го класу, ступінь рухомості якого після умовного приєднання елементів зовнішніх кінетичних пар до стояка (механізму) дорівнює нулю, і який не можна поділити на простіші ланцюги, що мають нульовий ступінь рухомості.

Отже, першою ознакою групи Ассура є рівність її ступенів рухомості нулю:

$$\begin{aligned} W &= 0, \\ 3n - 2p_5 &= 0. \end{aligned} \tag{4.2}$$

З формули (4.2) маємо

$$p_5 = 3n/2. \tag{4.3}$$

Оскільки кількість кінематичних пар  $p_5$  завжди ціле число, то кількість рухомих ланок групи Ассура  $n$  – завжди парна (кратна двом). Отже, другою ознакою групи Ассура є парність її ланок, тобто  $n = 2, 4, 6, 8, \dots$ , а  $p_5 = 3, 6, 9, 12, 15, \dots$ . Наприклад, якщо  $n = 2$ , то група Ассура буде мати число кінематичних пар  $p_5 = 3$ . Така група зображена на рис. 4.6, а і називається **діадою** або **двоповодковою** групою. Оскільки пари 5-го класу можуть бути обертальними та поступальними, то можливі й інші їх з'єднання (рис. 4.6, б, в).

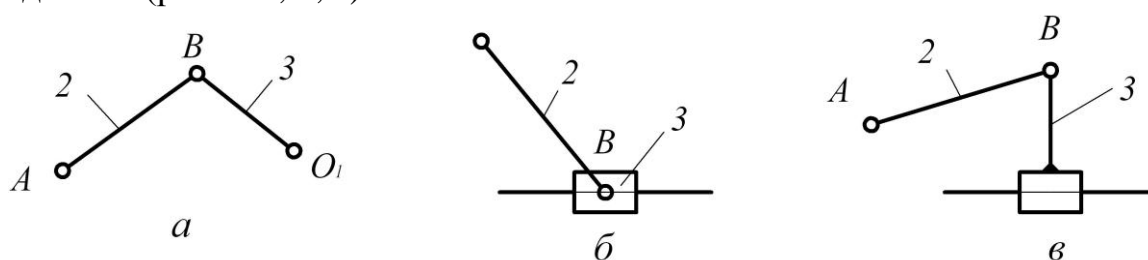


Рисунок 4.6 – Двоповодкові групи Ассура

Групи Ассура мають внутрішні і зовнішні кінематичні пари. Внутрішні пари з'єднують між собою ланки групи, а зовнішніми парами група приєднується до ланок кінематичного ланцюга. В зображеній на рис. 4.6, а групі Ассура кінематична пара  $B$  є внутрішньою, а кінематичні пари  $A$  і  $O_1$  – зовнішніми.

Якщо приєднати через зовнішню кінематичну пару  $A$  дволанкову групу Ассура до початкової ланки 1, а через пару  $O_1$  – до стояка 4, то утвориться механізм, який називається чотириланковий кривошипно-коромисловий (рис. 4.7)

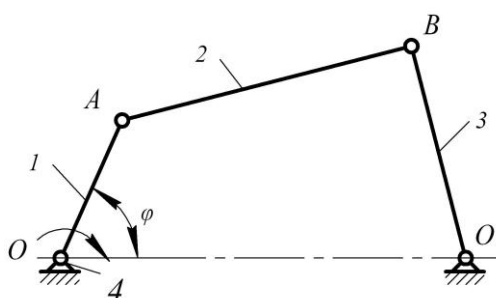


Рисунок 4.7 – Кривошипно-коромисловий механізм

Одним із методів подальшого розвитку групи Ассура є так званий метод “розвитку поводка”. З формули (4.4) видно, що наступна, складніша група Ассура матиме число ланок  $n = 4$  і число кінематичних пар  $p_5 = 6$ . Таку групу можна отримати з діади (рис. 4.6, а) розвиванням, наприклад, поводка 3. Для цього до поводка 3 необхідно приєднати ще одну діаду, а до шарнірів  $B$  і  $O_1$  – поводки 4 і 5. В результаті одержимо нову систему, що

називається триповідковою групою (рис. 4.8). В цій групі ланка 3 входить до складу трьох кінематичних пар і називається базисною. Користуючись цим методом, можна отримати чотири-, п'ятиповідкову і більш складні групи. Ассур запропонував віднести такі групи до першого класу.

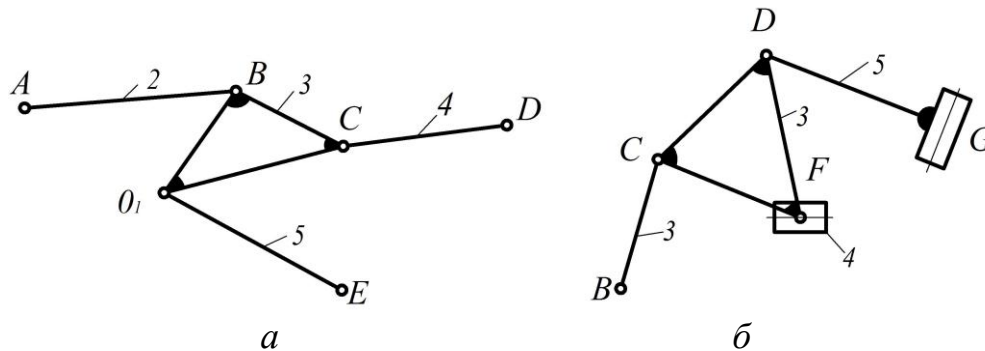


Рисунок 4.8 – Триповідкові групи Ассура

Групи Ассура мають певний порядок. **Порядок групи** визначається кількістю елементів зовнішніх кінематичних пар. Діада, наприклад, має другий порядок. Триповідкова група (рис. 4.8) має третій порядок.

Структурний аналіз механізмів (дослідження структури механізмів) передбачає:

- визначення кількості ланок механізму, числа і класу його кінематичних пар;
- визначення ступеня рухомості механізму;
- поділ механізму на початковий механізм і структурні групи;
- визначення класу та порядку структурних груп.

Результатом структурного аналізу є визначення класу всього механізму, який відповідає найвищому класу групи Ассура, що входить до складу механізму. Визначення класу механізму, згідно з класифікацією Ассура-Артоболевського, можливе, якщо в результаті попереднього структурного аналізу встановлено виконання таких умов:

- ступінь рухомості механізму відповідає кількості ведучих ланок;
- ведучі ланки входять в кінематичні пари зі стояком;
- в механізмі є тільки кінематичні пари 5-го класу.

Рекомендується така послідовність від'єднання структурних груп з кінематичного ланцюга механізму. Від'єднання груп починається з ланок, найбільш віддалених від ведучої ланки. В першу чергу від'єднуються групи Ассура найбільш низького класу.

Слід зазначити, що після від'єднання кожної групи ступінь рухомості механізму повинен залишатись незмінним, а кожна ланка і кінематична пара можуть входити тільки в одну структурну групу. Поділ кінематичного ланцюга механізму на групи Ассура виконується до тих пір, доки не залишаються тільки початкові механізми (ведучі ланки та стояк).

Розглянемо структурний аналіз і класифікацію механізмів за Ассуром-Артоболовським на прикладі механізму, зображеного на рис 4.9.

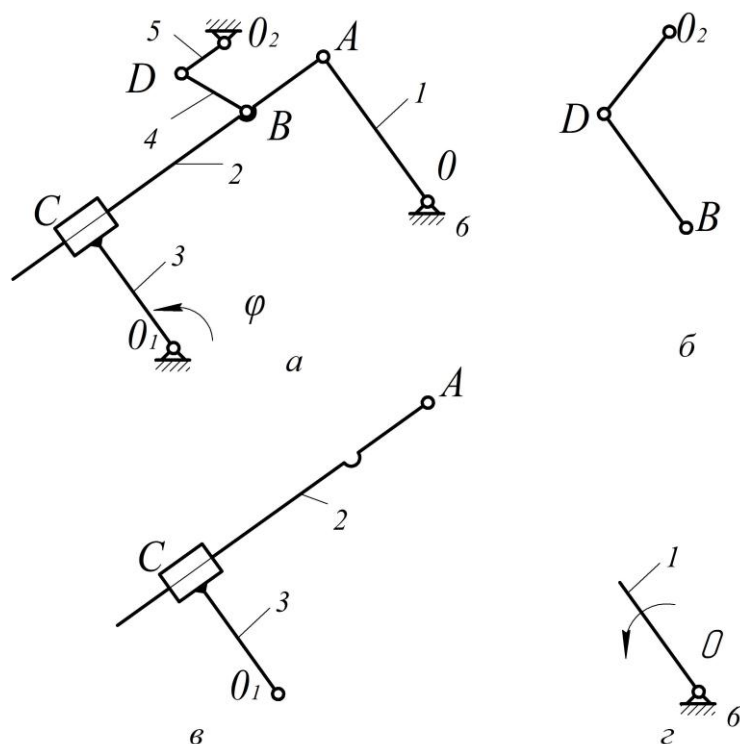


Рисунок 4.9 – Поділ механізму на групи Ассура

Механізм має п'ять рухомих ланок ( $n = 5$ ) та сім кінематичних пар 5-го класу ( $p_5 = 7$ ), а кінематичні пари 4-го класу відсутні ( $p_4 = 0$ ). За формулою (4.1) визначимо ступінь рухомості механізму

$$W = 3n - 2p_5 - p_4 = 3 \cdot 5 - 2 \cdot 7 - 0 = 1.$$

Поділ механізму на групи треба починати з від'єднання групи ланок 4 і 5 (рис. 4.9, б). Ця група є групою Ассура ( $n = 2$ ;  $p_5 = 3$ ;  $W = 0$ ) другого класу, другого порядку, першого виду. З частини механізму, що залишається, виділимо групу ланок 2 і 3. Ця група є також групою Ассура ( $n = 2$ ;  $p_5 = 3$ ;  $W = 0$ ) другого класу, другого порядку, другого виду. Після від'єднання груп Ассура залишається група початкових ланок, що складається з ведучої ланки 1 і стояка, або початковий механізм.

Таким чином, механізм має в своєму складі тільки групи Ассура другого класу, то його можна віднести до механізмів другого класу.

Принцип побудови механізмів за Ассуром-Артоболовським зручно використовувати як під час структурного аналізу, так і структурного синтезу механізмів.



Вже на етапі проектування машин їх передбачувана роботоздатність та надійність значною мірою залежить від того, наскільки правильно та раціонально вибрані схеми побудови механізму та його структури.

## 4.2 Особливості будови поширених видів механізмів

В сучасній техніці використовуються найрізноманітніші види механізмів. За кінематичними, конструктивними і функціональними властивостями, механізми поділяють на важільні, кулачкові, фрикційні, зубчасті та інші.

**Важільні** – це механізми в яких геометричне замикання ланок зі складним рухом здійснюється в обертальних і поступальних кінематичних парах.

**Обертальні** – в коливній зворотно-поступальній, кривошипно-повзунній, кулісній парах.

**Кулачкові** – це механізми, що складаються з кулачка і штовхача або коромисла, які мають силове замикання.

**Важільні механізми.** Важільними називають такі механізми, в яких геометричне замикання ланок зі складним рухом здійснюється в обертальних і поступальних кінематичних парах. Такі механізми застосовують переважно для перетворення обертального руху початкової ланки в коливний чи зворотно-поступальний рух веденої ланки.

Серед важільних механізмів найбільше поширення мають кривошипно-повзунні (рис. 4.10, а, б) та кулісні (рис. 4.10, в) механізми. На рис. 4.10 зображені схеми аксіального (рис. 4.10, а) і дезаксіального (рис. 4.10, б) кривошипно-повзунного механізму, який використовують для перетворення обертального руху кривошипа 1 в зворотно-поступальний рух повзуна 3. Повзун і кривошип з'єднуються за допомогою ланки 2, що здійснює складний плоский рух. Ланка 2 утворює з ланками 1 і 3 нижчі обертальні кінематичні пари. Дезаксіал (зміщення)  $e$  вводиться переважно для зменшення тиску повзуна на нерухому ланку (стояк) 4.

На рис. 4.10, в зображений кривошипно-кулісний механізм. Він складається з кривошипа 1, куліси 3, що являє собою рухому напрямну ланку для кулісного каменя 2. Якщо  $l > r$ , то обертальний рух кривошипа 1 перетворюється у зворотно-обертальний рух куліси 3. Коли  $l < r$ , то при рівномірному обертанні кривошипа 1 куліса 3 обертається зі змінною кутовою швидкістю.

На рис. 4.10, г показано просторовий сферичний механізм з нижчими кінематичними парами, який служить для передавання руху між валами, геометричні осі яких перетинаються між собою під кутом  $\alpha$ . Такий механізм відомий під назвою карданної передачі.

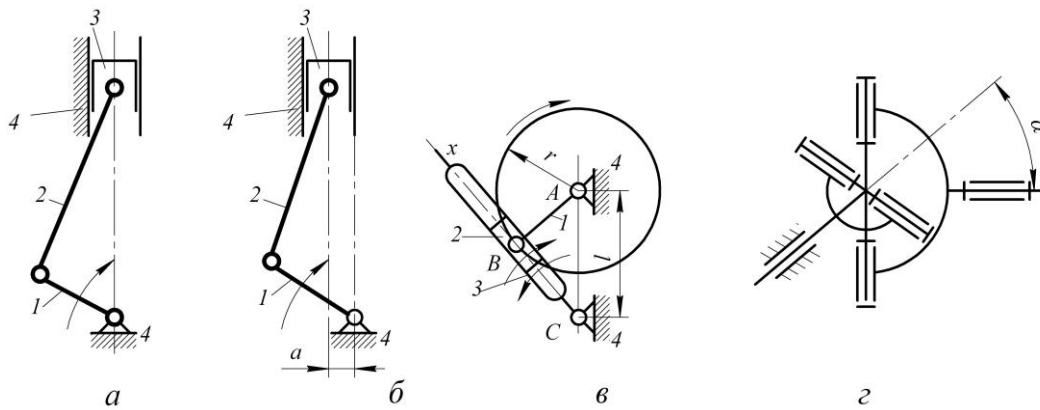


Рисунок 4.10 – Важільні механізми

*Кулачкові механізми.* У сучасних машинах-автоматах, широко використовуються механізми, які дають змогу в межах робочого циклу мати відстій (зупинку) вихідної ланки заданої тривалості при неперервному русі вхідної ланки. Такі механізми дістали назву *механізмів переривчастого руху*, або *механізмів з відстоєм* (зупинкою). Серед цих механізмів найбільше поширення отримали кулачкові механізми.

*Кулачковими* називаються механізми, до складу яких входить вища кінематична пара, одним з елементів якої є поверхня змінної кривизни. Ланку, якій належить елемент вищої кінематичної пари, що виконана у вигляді поверхні змінної кривизни, називають кулачком.

Кулачкові механізми утворюються із кулачка 1, штовхача 2 і стояка (рис. 4.11, а, б). Для усунення тертя ковзання у вищій кінематичній парі вводять проміжну ланку – ролик 3, який не впливає на кінематику передачі руху від кулачка до вихідної ланки.

Якщо вихідна ланка здійснює коливальний рух, то її називають коромислом (рис. 4.11, в, г).

Кулачкові механізми, так само як і важільні або зубчасті, можуть бути плоскими і просторовими (рис. 4.11).

Для забезпечення постійного дотику вихідної ланки і кулачка використовується *силове* або *геометричне* замикання. При силовому замиканні постійний контакт ланок забезпечується, як правило, дією пружини (рис. 4.11 а, в), рідше для цієї мети застосовуються сили тяжіння (рис. 4.11, б), тиск рідини тощо. Силове замикання конструктивно виконується досить просто. Проте воно має ряд недоліків, зокрема сили пружності пружини створюють додаткові навантаження на ланки механізму. Крім того, швидкість обертання кулачка повинна бути не більшою від розрахункової, оскільки сила пружності пружини в будь-який період руху повинна бути більша від сили інерції, що діє на штовхач, а сила інерції залежить від швидкості руху кулачка і не залежить від пружності пружини.

Для усунення недоліків силового замикання в кулачкових механізмах використовується геометричне замикання ланок. На рис. 4.11, д показано кулачковий механізм, в якому ролик 3 рухається в пазу кулачка 1, що забезпечує постійний контакт кулачка і ролика. Але і такий вид замикання має суттєвий недолік, оскільки в результаті зміни сил інерції, що діють на штовхач, ролик почергово стикається з внутрішньою та із зовнішньою поверхнею паза, що призводить до зносу паза і появи ударів у кулачковому механізмі. Усунення цього недоліку пов'язано із значним ускладненням конструкції.

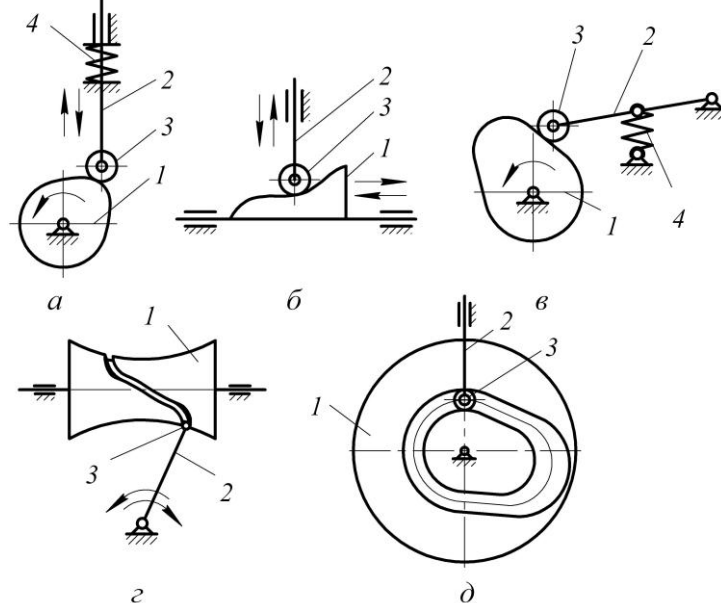


Рисунок 4.11 – Кулачкові механізми

*Фрикційні* – механізми в яких рух від ведучої ланки до веденої передається за рахунок сили тертя, що виникає в контактні взаємно притиснутих ланок.

Найпростіша фрикційна передача (механізм) зображена на рис. 4.12, а. Вона складається з двох циліндричних котків 1 і 2, що утворюють зі стояком 3 обертальні кінематичні пари. Взаємне притискання котків забезпечується силою пружності пружини.

До фрикційних механізмів належать і варіатори (рис. 4.12, б), які забезпечують плавну зміну кутової швидкості веденого диска 2 при рівномірному обертанні ведучого котка 1 завдяки переміщенню і зміні відстані  $R$ .

Фрикційний механізм може бути виконаним і з гнучкими ланками. Його застосовують для передавання обертового руху між валами, що знаходяться на значній відстані. Гнучкими ланками можуть бути приводні паси, канати, ланцюги. На рис. 4.12, в подана найпростіша передача з

гнучкою ланкою, що називається пасовою передачею, в якій ведучий шків 1 зв'язаний з веденим шківом 2 пасом 3.

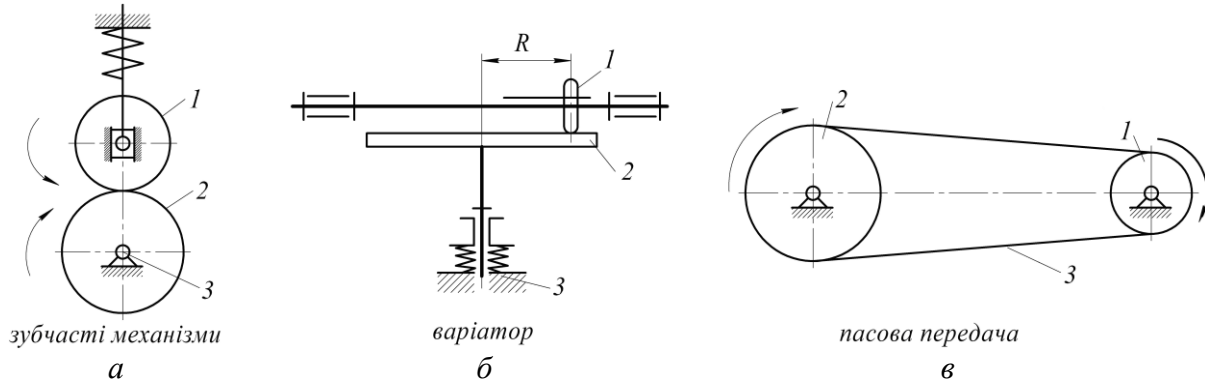


Рисунок 4.12 – Фрикційні механізми

*Зубчастими* називаються механізми, які складаються із зубчастих коліс 1 і 2 (циліндричних чи конічних), що взаємно зачеплені за допомогою зубців на ободах цих коліс (рис. 4.13, а). Обертальний рух між колесами передається за рахунок взаємодії зубців. На відміну від фрикційної передачі тут усунуте взаємне проковзування ланок.

Зубчасті механізми часто застосовуються у машинах для передавання обертального руху між валами, що мають нерухомі і рухомі осі. В останньому випадку механізми називають **планетарними** (planetary). На рис. 4.13, б зображено найпростіший планетарний механізм. В цьому механізмі вісь обертання колеса 3, яка з'єднана з валом колеса 1 за допомогою водила 2, здійснює обертальний рух. Колесо 1 у такому разі називається *центральною*, а колесо 3 – **сателітом** (satellite).

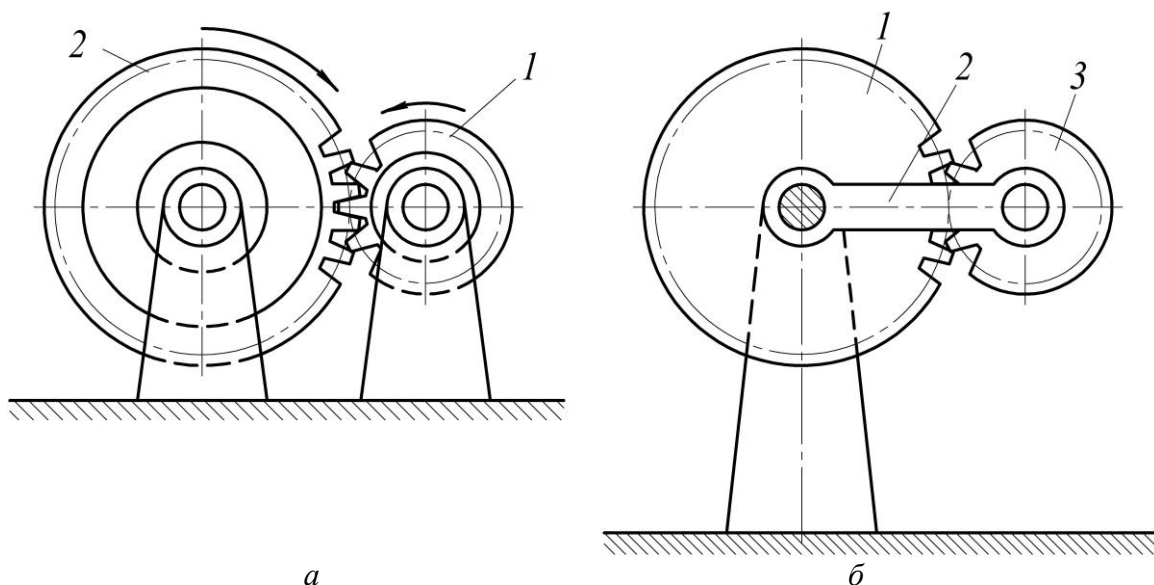


Рисунок 4.13 – Зубчасті механізми

*Хвильові передачі* (рис. 4.13) створені на принципі перетворення параметрів руху хвильовим деформуванням однієї з ланок передачі. Цей принцип вперше був запропонований російським вченим А. І. Москвітіним у 1944 р. для варіанта фрикційної передачі та американським вченим В. Масером у 1959 р. для зубчастої передачі.

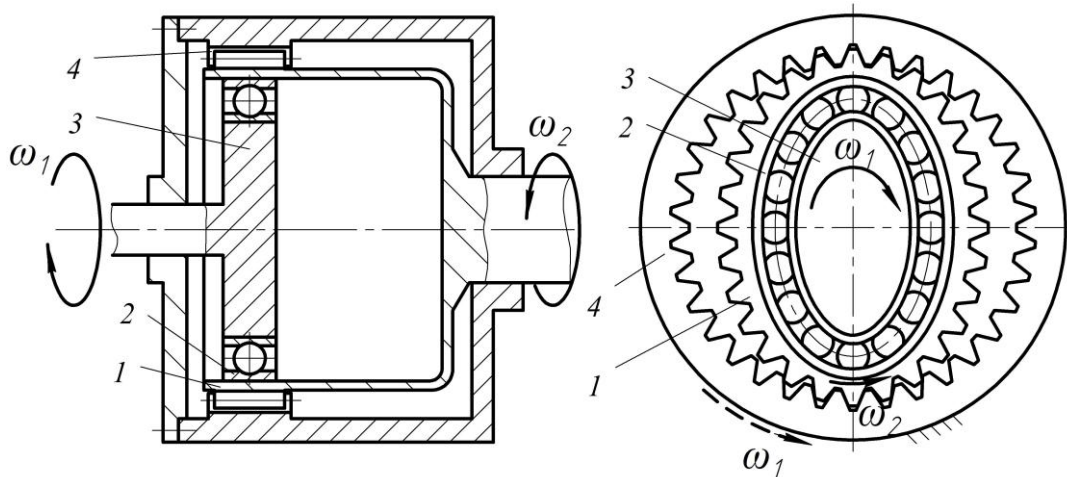


Рисунок 4.14 – Хвильова зубчаста передача

Хвильова передача (рис. 4.14) складається з гнучкого зубчастого вінця 1, з'єднаного з веденим валом і zdeформованим генератором хвиль 3, на якому розміщений гнучкий підшипник 2. Гнучкий зубчастий вінець у zdeформованому стані входить у зачеплення з двох діаметрально протилежних боків із нерухомим жорстким зубчастим вінцем 4, який розміщений у корпусі передачі і має внутрішні зубці. При обертанні генератора хвиль, виконаного у вигляді кулачка, з кутовою швидкістю  $\omega_1$  гнучке колесо і ведений вал, зв'язаний із ним, будуть обертатись із кутовою швидкістю  $\omega_2$ . Передавання обертового руху із зміною кутової швидкості забезпечується різницею чисел зубців жорсткого та гнучкого зубчастих коліс. Гнучкий підшипник призначений для зменшення тертя між генератором хвиль та гнучким колесом. Хвильова передача за схемою на рис. 4.14 називається *двоххвильовою*, оскільки за один оберт генератора гнучке колесо сприймає дві хвилі деформації. Відомі також одно- і трихвильові та рідко застосовані чотиреххвильові передачі. Число хвиль деформації гнучкого колеса залежить від форми та конструкції генератора хвиль.

*Хрестоподібний мальтійський механізм* (рис. 4.15) складається з трьох ланок. Ведуча ланка 1 має цівку, центр  $A$  якої відділений від осі обертання  $O$  на відстань  $r$ , а замок  $B$  має форму сектора з радіусом  $r_0$ . Ланки 1 і 2 зі стояком 3 утворюють обертальні кінематичні пари  $O$  і  $C$ .

Під час роботи механізму ланка 1 обертається рівномірно, а ланка 2 у формі мальтійського хреста (через що отримав назву механізм) то обертається, то зупиняється. Коли замки  $B$  і  $D$  дотикаються по колу, то ланка 2 нерухома. Подальше обертання ланки 1 забезпечує входження цівки в паз хреста 2, що надає хрестові обертального руху. Якщо цівка не знаходиться в пазі хреста, то він не обертається. Такий механізм, наприклад, застосовують в кіноапаратурі для перервного переміщення кінострічки.

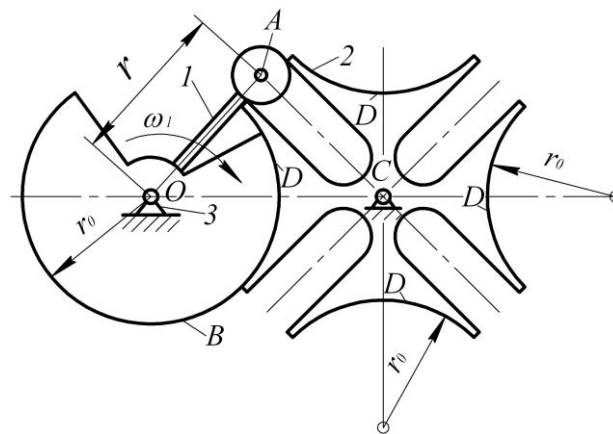


Рисунок 4.15 – Мальтійський механізм

**Гвинтові** (helical) **механізми**. Основною складовою гвинтових механізмів є передача гвинт-гайка.

Передачі гвинт-гайка за призначенням поділяють на силові і кінематичні, а за видом тертя – на передачі з тертям ковзанням і тертям коченням.

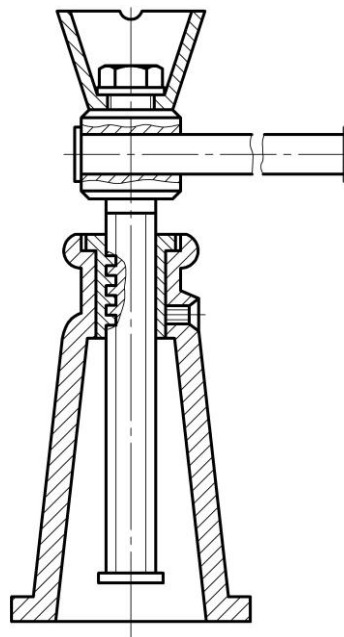


Рисунок 4.16 – Гвинтовий домкрат

Передачі гвинт-гайка застосовують для перетворення обертового руху у поступальний (в деяких випадках з поступального в обертовий). Вони використовуються у різних галузях техніки – від точного приладобудування до важконавантажених приводів натискних пристроїв прокатних станів, гвинтових пресів та підймальних механізмів кранів. Широке використання гвинтових механізмів пояснюється рядом їх переваг, до яких в першу чергу слід віднести: високу надійність; компактність за великої навантажувальної здатності; плавність і безшумність; можливість досягання високої точності переміщень та значних зусиль.

*Передачі гвинт-гайка з тертям ковзання* широко застосовуються в механізмах завдяки простоті виготовлення та експлуатації, а також можливості здійснення самогальмування.

Конструктивно гвинтові пари ковзання утворюються за допомогою різьб різного профілю, які застосовуються в залежності від призначення гвинтових механізмів.

У механізмах кріплення застосовують метричну різьбу, як найбільш міцну і з підвищеним зведеним коефіцієнтом тертя. У механізмах, що призначені для передачі різних навантажень, наприклад домкратах (рис. 4.16), зазвичай застосовують трапецеїдальну різьбу, якій властива достатня міцність, жорсткість і простота виготовлення. За умови передачі великого одностороннього навантаження використовують упорну різьбу. У передавальних механізмах застосовують різні види різьб в залежності від безпосереднього призначення механізму. Наприклад, в механізмах подачі використовують гвинти з багатозахідною різьбою, яка зменшує тертя; в мікрометрах – метричну різьбу і т. д.

До основних недоліків цієї передачі слід віднести підвищене зношування різьби внаслідок великого тертя і низький ККД (менше 50 %).

На відміну від гвинтових пар з тертям ковзання, робочі поверхні в парах з тертям кочення не дотикаються. Різьба гвинта 1 і гайки 2 виконана у вигляді канавок, по яких перекочуються кульки 4, що є проміжними тілами, які з'єднують гвинт і гайку (рис. 4.17). Кільце кульок замикається за допомогою спеціального перепускного каналу 3. В процесі роботи відбувається неперервна циркуляція кульок, аналогічна циркуляції кульок у підшипниках кочення.

Перевагами *передачі гвинт-гайка кочення* в порівнянні з передачею гвинт-гайка ковзання є:

- високий ККД, що досягається навіть при відносно малому куті підйому різьби 90%;
- висока кінематична чутливість;
- мінімальне зношування;

- висока точність і рівномірність поступального руху із збереженням постійності цих параметрів в процесі експлуатації;
- можливість повного усунення осьового зазору;
- можливість надійної роботи в діапазоні температур від  $-60^{\circ}$  до  $+500^{\circ}\text{C}$  та в агресивному середовищі і вакуумі;
- можливість перетворення поступального руху одного із елементів механізму в обертальний рух іншого і навпаки при малих кутах підйому різьби.

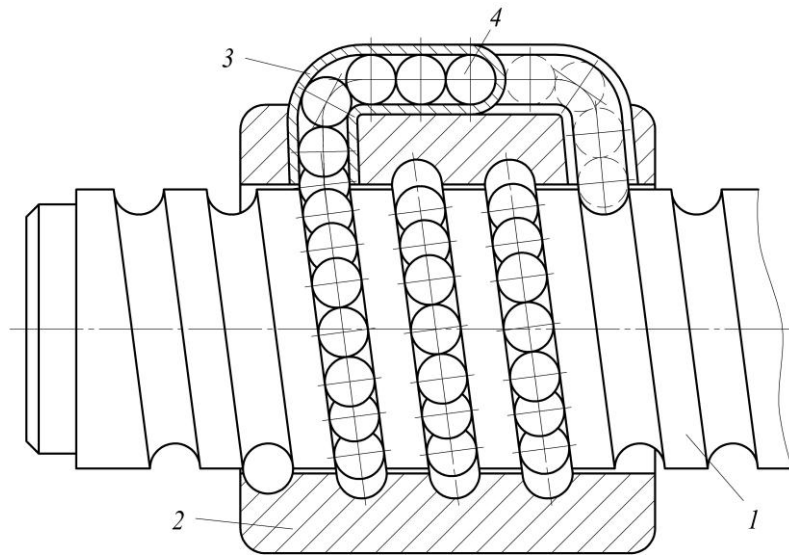


Рисунок 4.17 – Передача гвинт-гайка

До недоліків передачі гвинт-гайка кочення можна віднести складність і трудомісткість їх виготовлення. Особливо трудомісткою операцією є шліфування спеціального профілю різьби гайки і ходового гвинта.

#### 4.3 Задачі синтезу і аналізу механізмів і машин

Процес створення і проектування механізмів і машин загалом складається з різних етапів, в тому числі і синтезу та аналізу об'єкта розробки.

*Синтезом* механізму називається створення схеми механізму і визначення розмірів його ланок за наперед заданими функціональними характеристиками механізму. Створюють чи вибирають схему механізму на підставі багатовікового досвіду людства у виготовленні і експлуатації різноманітних механізмів та машин, які підтвердили свою надійну і безвідмовну роботу. Цей досвід відображено у відповідній технічній і довідковій літературі. Розмір ланок на схемі механізму позначають для забезпечення відповідних функціональних і кінематичних характеристик



механізму, зокрема положення ведених ланок залежно від руху початкової ланки, траєкторії руху окремих точок і характеру зміни переміщень і швидкостей цих точок та ін.

*Аналіз* механізму полягає в дослідженні кінематичних і динамічних властивостей механізму за його заданою схемою та розмірами. Основними складовими частинами аналізу механізмів та машин є такі:

- кінематичний аналіз, основним завданням якого є знаходження положень ланок і траєкторій, що описуються точками ланок, а також визначення характеру зміни швидкостей і прискорень точок ланок залежно від закону руху ведучих ланок механізму;

- динамічний аналіз або розв'язання задачі визначення сил, що діють на ланки механізму, якщо відомий закон руху механізму або встановлення закону руху механізму за відомими силами, що діють на ланки механізму.

Поряд з цим в задачах динаміки механізмів і машин розглядаються і такі питання: визначення сил тертя в кінематичних парах (див. розділ 5). визначення коефіцієнта корисної дії машини, регулювання ходу машини, зрівноважування сил інерції ланок та балансування обертових деталей та ін.

Кінематичний і динамічний аналізи механізмів і машин здійснюються графічними, графоаналітичними і аналітичними методами. Графічні методи дають прості і наочні (але менш точні) розв'язки, тоді як аналітичні методи аналізу часто приводять до дуже громіздких формул, а отримання остаточних результатів неможливе без використання електронної обчислювальної техніки. Оскільки номенклатура різних типів і видів механізмів сучасних машин досить широка, то конкретна інформація про методи розв'язування задач кінематичного і динамічного аналізу механізмів і машин дається у повному курсі теорії механізмів і машин. Окремі питання кінематики найбільш простих і розповсюджених механізмів викладені в цьому розділі цього посібника.

Поділ теорії механізмів і машин на аналіз і синтез має умовний характер, оскільки вибір схеми механізму і машини в цілому, визначення їхніх параметрів часто виконують за допомогою порівняльного аналізу різних механізмів для виконання машиною певних функцій. Цей порівняльний аналіз можливих варіантів становить тепер основу методів синтезу з використанням сучасної обчислювальної техніки. Крім того, в процесі синтезу механізму потрібно виконувати перевірні розрахунки, використовуючи методи аналізу. Однак з методичної точки зору зручніше розрізняти задачі аналізу і синтезу механізмів, оскільки цей поділ дозволяє об'єднати задачі теорії механізмів в однорідні групи за ознакою спільності методів.

#### 4.4 Приклад структурного аналізу механізму

**Задача 4.1** Виконати структурний аналіз механізму двигуна (рис. 4.12, *a*), якщо початковою ланкою є кривошип  $OA$ .

**Розв'язання.** Механізм складається із семи рухомих ланок ( $n = 7$ ) і десяти пар 5 класу ( $p_5 = 10$ ):  $O(0, 1)$ ,  $A(1, 2)$ ,  $B(2, 3)$ ,  $B_0(3, 0)$ ,  $C(2, 4)$ ,  $D(4, 5)$ ,  $E(5, 0)$ ,  $F(5, 6)$ ,  $G(6, 7)$ ,  $G_0(7, 0)$ , а пари 4 класу відсутні. Знаходимо ступінь вільності механізму за формулою Чебишева

$$W = 3n - 2p_5 - p_4 = 3 \cdot 7 - 2 \cdot 10 - 0 = 1.$$

У цьому механізмі є одна початкова ланка; зайвих зв'язків і ступенів вільності немає.

Розкладаємо механізми на групи Асура. Якщо початковою ланкою є кривошип 1, який із стояком 0 утворює механізм 1 класу (рис. 4.18, *д*), то решта ланок утворюють три структурні групи 2 класу 2 порядку (рис. 4.18, *б-в*). Такий механізм належить механізму 2 класу.

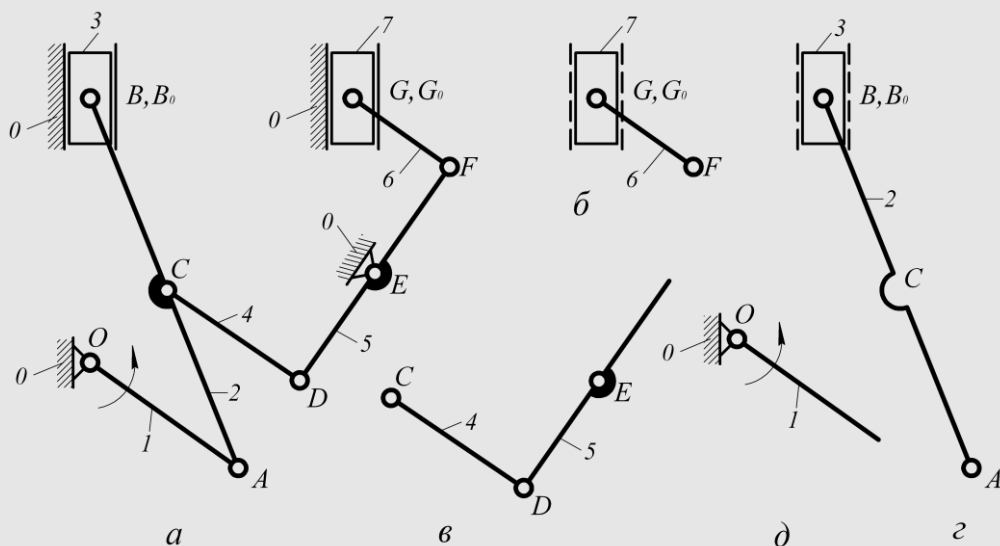


Рисунок 4.18 – До задачі 4.1

Якщо вибрати початковою ланкою, наприклад, ланку 7, то механізм треба віднести до 3 класу, тому що у цьому випадку ланки і пари, до складу яких вони входять, утворюють дві групи, одна з них група 3 класу (рис. 4.18, *a*), друга – 2 класу (рис. 4.18, *б*). Повзун 7 (рис. 4.18, *в*) разом із стояком 0 утворює механізм 1 класу.

При початковій ланці 5 механізм також буде 3 класу.



## Триботехніка спряжених елементів машин

### 5.1 Види тертя та його основні закономірності

Тертя є одним із найпоширеніших явищ природи і відіграє важливу роль в техніці. На використанні сил тертя ґрунтується робота багатьох машин і механізмів (поясові і фрикційні передачі, транспортні машини, прокатні стани, фрикційні муфти, гальма тощо).

Сили тертя в них відіграють корисну роль. Коли мова йде про зношування деталей машин та приладів та про втрати енергії, то в таких випадках проявляється шкідлива роль сил тертя.

Цілий ряд задач механіки, деталей машин, спеціальних технічних дисциплін неможливо розв'язати без знання законів тертя. Наука, що охоплює комплекс питань, пов'язаних з тертям і спрацюванням деталей машин, називається **триботехнікою** (tribotechnology).

**Тертям** називається опір, який виникає між поверхнями двох тіл, що дотикаються при їх взаємному переміщенні. Сили опору називають силами тертя.

Залежно від характеру відносного переміщення тіл, що дотикаються, розрізняють два види тертя: **ковзання** і **кочення**. При терті ковзання одні й ті ж самі поверхні одного тіла стикаються з різними поверхнями іншого тіла. При терті кочення різні поверхні одного тіла послідовно стикаються з різними поверхнями іншого тіла.

Залежно від наявності мастила між поверхнями дотику тіл та станом їх поверхні, розрізняють два основних види тертя:

- **сухе тертя**, яке виникає за відсутності на поверхнях тертя будь-якого мастильного матеріалу;
- **рідинне тертя**, яке виникає за наявності на поверхнях тертя шару мастила, що повністю їх розділяє, і тертя твердих частин тіла, замінене на тертя окремих шарів мастила. Мастило може бути тверде, рідке та газоподібне.

Розрізняють ще проміжні види тертя: *граничне*, *напівсухе* і *напіврідинне*. При граничному терті на поверхнях тертя існує абсорбована масляна плівка. Напівсухе і напіврідинне тертя не мають між собою чіткої границі: якщо перевершує сухе тертя (більша частина поверхні контакту не покрита мастилом), то вважають, що тертя напівсухе, і навпаки, якщо перевершує рідинне тертя, то маємо напіврідинне тертя.

На основі численних дослідів, які започатковані Г. Амонтоном і Ш. Кулоном, наближено встановлено основні закономірності про сили сухого тертя:

- коефіцієнт тертя можна вважати сталим, а сили тертя – прямо пропорційними нормальному тиску тільки в певному діапазоні швидкостей і навантажень;
- сили тертя завжди направлені в бік, протилежний відносним швидкостям;
- тертя спокою в початковий момент руху в більшості випадків більше за тертя руху;
- із збільшенням швидкості руху сила тертя здебільшого зменшується, наближаючись до деякого сталого значення;
- із зростанням питомого тиску сила тертя переважно збільшується;
- із збільшенням часу попереднього контакту тіл сила тертя спокою збільшується.

Силу тертя ковзання між тілом вагою  $G$  і контактуючою поверхнею (рис. 5.1) визначають за формулою

$$F_f = fN, \quad (5.1)$$

де  $f$  – безрозмірний коефіцієнт тертя ковзання, що визначається експериментально;

$N$  – нормальний тиск, що рівний за абсолютною величиною вазі  $G$ , але протилежно направлений.

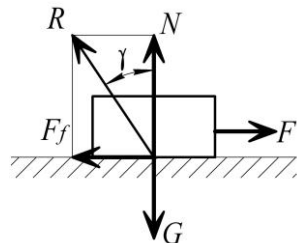


Рисунок 5.1 – Схема до визначення тертя ковзання

Тіло перебуватиме в стані спокою або рівномірного руху, коли рушійна сила  $F$  рівна силі тертя  $F_f$ .

На тіло з боку опорної поверхні діють дві реакції: нормальна  $N$  і дотична  $F_f$ . Теоретична сума цих сил визначить реакцію  $R$ , яка є нормальною реакцією  $N$  і утворює деякий кут  $\gamma$ .

Найбільший кут  $\gamma$ , на який через тертя відхиляється від нормалі певна реакція  $R$  опорної поверхні, називається **кутом тертя**.

З рис. 5.1 отримаємо співвідношення:

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{F_f}{N}, \quad (5.2)$$

яке з врахуванням (5.1) перетворюється у вираз

$$\operatorname{tg} \gamma = f. \quad (5.3)$$

З виразу (5.3) маємо

$$\gamma = \operatorname{arctg} f. \quad (5.4)$$

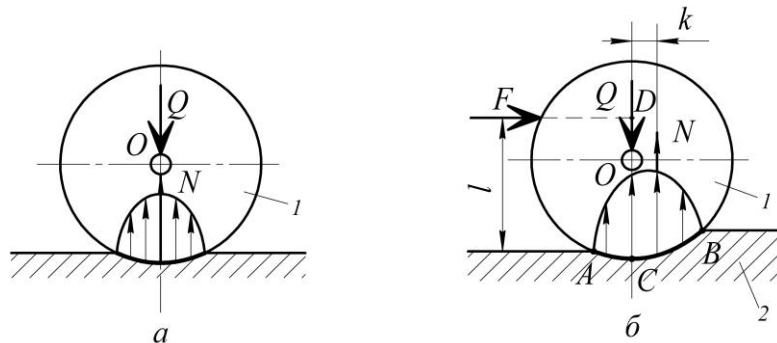


Рисунок 5.2 – Схема до визначення сил тертя кочення

Опір перекочуванню одного тіла по іншому виникає, в основному, через те, що тіла не абсолютно тверді і в місці контакту дещо деформуються. Результати досліджень показують, що опір перекочуванню тіл залежить від їх пружних властивостей, кривини та сили притискання.

Якщо на коток 1 (рис. 5.2, а) діє тільки сила  $Q$ , то контакт цих тіл з точкового переходить до площинного і деформація котка і опорної поверхні – тіла 2, має симетричну епюру. Рівнодійна  $N$  збігається з напрямком сили  $Q$ , протилежно їй направлена і рівна за модулем.

Якщо на коток діє на відстані  $l$  (рис. 5.2, б) ще і горизонтальна сила  $F$ , то деформація котка і опорної поверхні вже несиметрична відносно лінії дії сили  $Q$ . Ділянка  $CB$  відповідає зоні збільшення деформацій, а ділянка  $AC$  – спадання. Тому рівнодійна  $N$  зміщена відносно лінії дії сили  $Q$  на величину  $k$ , яка називається **коефіцієнтом тертя кочення**.

З рівності моментів сил, що діють на коток 1, маємо

$$Fl = Nk. \quad (5.5)$$

Величина  $M_k = Nk$  називається моментом тертя кочення, а  $Fl$  – обертальним рушійним моментом. З врахуванням рівності  $N = Q$ , момент кочення матиме вигляд

$$M_k = Qk. \quad (5.6)$$

Коефіцієнт тертя кочення  $k$  вимірюється одиницею довжини (мм або см), на відміну від безрозмірного коефіцієнта  $f$  тертя ковзання.

Коефіцієнт тертя кочення знаходять експериментально: для сталюого колеса і рейки  $K \approx (0,005 \dots 0,01)$  мм, чавун по чавуну – 0,05 мм, дерево по сталі – (0,3...0,4)мм, дерево по дереву – (0,5...0,8) мм.

Через те, що втрати на тертя кочення значно менші за тертя ковзання, то в рухомих вузлах машин та механізмів намагаються використовувати переважно конструкції з'єднань з тертям кочення.

## 5.2 Тертя різних кінематичних пар

За своєю конструкцією кінематичні пари бувають плоскі (рис. 5.3, а), клинові (рис. 5.3, б) та циліндричні (рис. 5.3, в), в яких циліндричні напрямні 2 забезпечують прямолінійне переміщення повзуна 1.

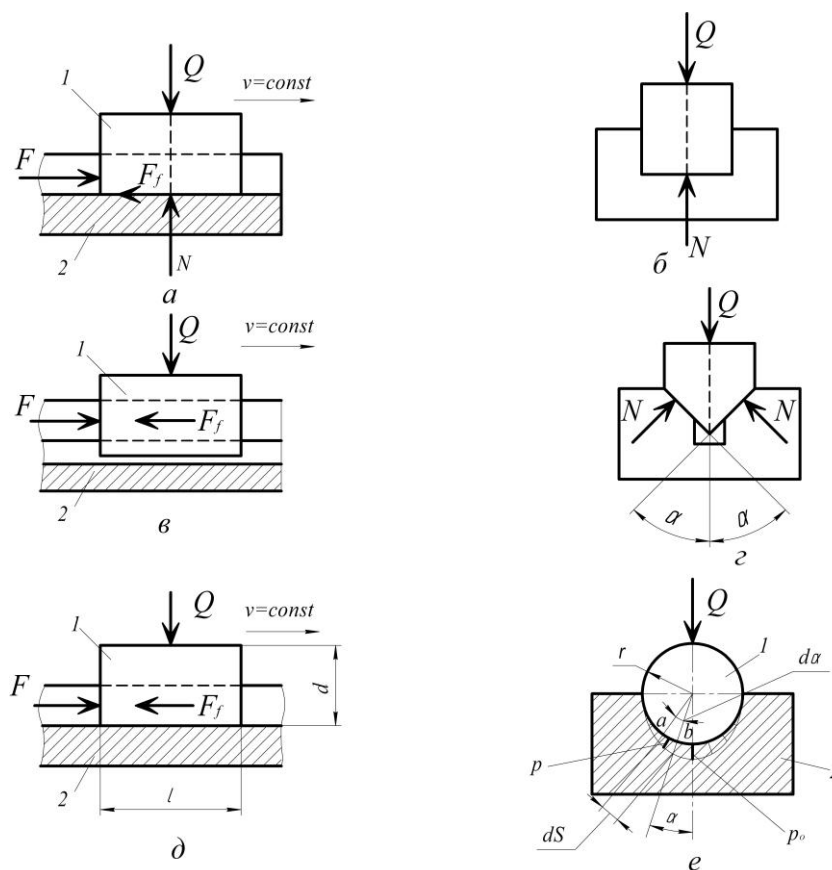


Рисунок 5.3 – Схеми поступальних кінематичних пар

Якщо на тіло 1 (рис. 5.3, а) діє вертикальна сила  $Q$ , то для забезпечення йому рівномірного переміщення відносно напрямної 2 необхідно прикласти силу  $F$ , яка рівна силі тертя  $F_f$ , що виникає між тілами.

Для плоскої поступальної кінематичної пари (рис. 5.3, а, б) сила тертя згідно із законом Кулона визначиться як

$$F_f = fN, \quad (5.7)$$

а з врахуванням рівності  $N = Q$ , набуде вигляду

$$F_f = fQ. \quad (5.8)$$

Для клинової поступальної пари (рис. 5.3, в, з) при постійному тиску умовою рівномірного руху тіла 1 напрямною 2 є забезпечення співвідношення  $F = 2F_f$ , де  $F_f = F_{f1} = F_{f2}$  – величина сили тертя на кожній грані спряжених поверхонь. Тоді

$$F = 2F_f = 2fN, \quad (5.9)$$

З векторного рівняння  $\vec{Q} + \vec{N} + \vec{N} = 0$  отримуємо алгебраїчне співвідношення

$$N = \frac{Q}{2 \sin \alpha}, \quad (5.10)$$

яке перетворює вираз (5.10) до вигляду:

$$F = \frac{f}{\sin \alpha} \cdot Q = f'Q, \quad (5.11)$$

в якому  $f' = \frac{f}{\sin \alpha}$  – зведений коефіцієнт тертя клинової пари.

Оскільки завжди кут  $\alpha$  менший  $90^\circ$ , то  $f' > f$ . Цю властивість клинової пари широко використовують в механізмах і машинах для збільшення сили тертя при передачі руху (наприклад у пасових, фрикційних передачах тощо).

Для визначення сили тертя  $F_f$  в циліндричній парі (рис. 5.3, д) за відсутності зазору між спряженими деталями при постійному тиску  $p$  розглянемо елементарну ділянку  $ab = ds = r d\alpha$  циліндричної поверхні циліндра 1 (рис. 5.3, е). Тоді елементарну силу тертя для цієї частини знаходимо із виразу

$$dF_f = f p l ds = f p l r d\alpha, \quad (5.12)$$

де  $p$  – питомий тиск на елементарній площині,

$l$  – довжина циліндра,

$r$  – радіус циліндричної напрямної.

Повна сила тертя у спряженні циліндричної напрямної

$$F_f = f r l \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} p d\alpha. \quad (5.13)$$

Для припрацьованої (притертої) циліндричної пари, як показують досліди, зміна тиску  $p$  підраховується косинусоїдальному закону, тобто,  $p = p_0 \cos \alpha$ , де  $p_0$  – тиск на лінії дії сили  $Q$ . Тоді

$$F_f = f r l \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} p_0 \cos \alpha d\alpha = 2 f d r l p_0 = f d l p_0. \quad (5.14)$$

Визначимо питомий тиск через величину зовнішнього навантаження  $Q$ , записавши рівняння проекцій на вертикальну вісь:

$$Q = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} p l d\alpha \cos \alpha = r l p_0 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \alpha d\alpha = \frac{\pi}{2} r l p_0, \quad (5.15)$$

звідки

$$p_0 = \frac{2Q}{\pi r l}. \quad (5.16)$$

Підставимо (5.16) у (5.14) і отримаємо

$$F_f = \frac{4}{\pi} f Q. \quad (5.17)$$

Якщо у виразі (5.17) виділити зведений коефіцієнт тертя  $f'$ , тобто

$$f' = \frac{4}{\pi} f, \quad (5.18)$$

то остаточно формула для визначення сили тертя у циліндричній поступальній парі запишеться у вигляді

$$F_f = f' Q = 1.27 f Q. \quad (5.19)$$

Формула (5.19) показує, що сила тертя повзуна в циліндричній напрямній на 27% більша від сили тертя в плоскій поступальній парі, але через технологічну простоту виготовлення такі пари досить широко використовуються в техніці.

### 5.3 Види зношування елементів кінематичних пар та стійкість деталей зношування

**Зношування** (wear) – це процес руйнування та відокремлення матеріалу від поверхні твердого тіла, який спричинює поступову зміну розмірів, форми та стану поверхні деталі.

Зношування є причиною виходу з ладу більшості механізмів та їх деталей (85%...90%). Щорічні затрати на технічне обслуговування та відновлення зношених деяких деталей машин перевищує вартість річного випуску цих машин.

#### *Види і характеристики зношування*

У процесі тертя і зношування в деталях і механізмах протікають складні взаємопов'язані фізичні, хімічні та механічні явища. Вивченням природи, механізму зношування, кінетики розвитку процесу поверхневого руйнування в різних аспектах займаються фахівці в галузі фізики, хімії, механіки, математики, матеріалознавства, інженери і техніки. Особливість



методичного підходу до аналізу зношування полягає в тісній взаємодії експериментальних і теоретичних методів.

**Абразивне зношування** (abrasive). Абразивне зношування відноситься до механічного руйнування поверхонь тертя, що виникає в результаті різальної дії твердих (абразивних) тіл і частинок. Характерною умовою абразивного зношування є підвищена твердість зношувального тіла – частки мінерального походження, шорсткості більш твердої поверхні, наклепані металеві частинки зношення, тверді структурні складові матеріалу, оксидні плівки. На зношувальній поверхні залишаються сліди (риски, канавки, подряпини) як результат мікрорізання, зняття стружки, пластичного деформування. Абразивний вплив мають тверді частинки в потоці рідини, газу, повітря при попаданні на тверде тіло. Виникнення тертя і удару в місці контакту призводить до ударно-абразивного, ударно-гідроабразивного, ударно-втомного, ударно-теплого руйнування. Абразивна зносостійкість залежить від міцності міжатомних зв'язків у решітках. Експериментально встановлено вплив модуля нормальної пружності, параметра  $\Theta^2 A$  (де  $\Theta$  – характеристична температура за Дебаєм;  $A$  – атомна вага), теплоємності розплавленого металу, відношення абсолютної температури плавлення до атомного об'єму  $T_{пл}/VA$ , енергії активації  $W$ , самодифузії  $Q$ . На рис. 5.4 показана залежність відносної зносостійкості  $\varepsilon$  випробуваного матеріалу і матеріалу, прийнятого за еталон, від параметра  $\Theta^2 A$ .

Об'єм зношування  $V$  в залежності від нормального навантаження  $N$ , шляху тертя  $S$ , початкової твердості металу  $H$  і розміру абразивного зерна,  $a$  оцінюється формулою:

$$V = c \cdot \frac{N \cdot Sa}{H}, \quad (5.20)$$

де  $c$  – коефіцієнт, що залежить від абразивних властивостей зношувальної поверхні, умов взаємодії контактуючих тіл, кінематики руху та закріплення абразиву, гостроти ребер абразиву (формула Хрущова).

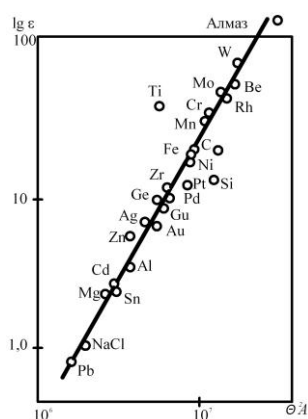


Рисунок 5.4 – Залежність відносної зносостійкості  $\varepsilon$  від параметра  $\Theta^2 A$

Обернена пропорційність величини зношування числу твердості відноситься до технічно чистих металів і сталей у відпаленому стані. Зношування лінійно зростає з ростом розміру зерна до деякої його критичної величини, потім при збільшенні розміру воно не змінюється. Особливо велике значення має розмір зерна при зношуванні полімерів у зв'язку з їх низькою когезійною міцністю. У механічно наклепаних металах і сталях, якщо в процесі наклепу не відбувається фазових перетворень, відносна зносостійкість не залежить від твердості сталі після наклепу, оскільки у процесі самого зношування має місце значний наклеп. Якщо швидкість ковзання не призводить до помітного нагрівання у місці контакту, то вона майже не впливає на величину зношування. Відносна зносостійкість залежить від співвідношення твердості абразиву  $H_a$  і металу  $H_m$ .

На рис. 5.5 наведена залежність відносної зносостійкості  $\varepsilon$  і відносного зношування  $1/\varepsilon$  від відношення твердості абразиву  $H_a$  до твердості металу  $H_m$ . При  $H_a < kH_m$  в діапазоні  $k = 0,7...1$  (зона I) знос незначний, при  $H_a > kH_m$  в діапазоні  $k = 1,3...1,7$  (зона III) відносна зносостійкість сталей, крім марганцевистої пружинної сталі, не залежить від твердості абразиву. У перехідній області (зона II) зношування металу зростає з підвищенням твердості абразиву  $H_a$ .

Абразивне зношування має місце в сільськогосподарському, гірському, дорожньому, будівельному, транспортному, металургійному, нафтогазопромисловому обладнанні та ін. Подрібнення та транспортування руди, каменю, вугілля, видобуток корисних копалин, робота з ґрунтом під час механічної поверхневої обробки деталей, попадання твердих частинок піщаного пилу в мастильний шар між взаємодіючими деталями механізму призводить до видалення матеріалу у вигляді дрібної стружки, фрагментів матеріалу, дисперсних шматочків. До абразивного зношування схильні також лопаті газових турбін, робочі колеса, напрямні гідравлічних турбін, труби і насоси земснарядів тощо.

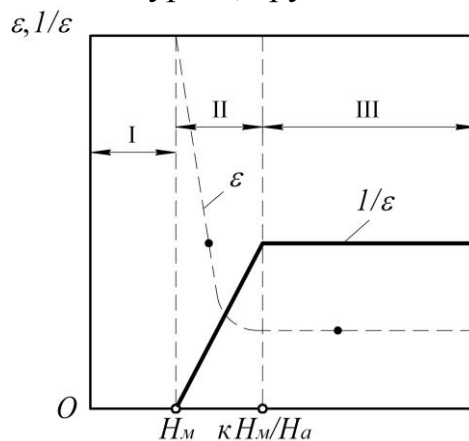


Рисунок 5.5 – Залежність відносного зношування і зносостійкості

**Корозійно-механічне** (corrosion-mechanical) **зношування**. Корозійно-механічне зношування виникає під час тертя матеріалів, що вступають у хімічну взаємодію з навколишнім середовищем. Побічно мають місце також електричні процеси. Зношування в цьому випадку відбувається під впливом процесів поверхневого руйнування, які тривають одночасно від механічного та корозійного факторів. Інтенсивність корозійно-механічного зношування залежить від природи контактуючих матеріалів, їх корозійної стійкості, складу навколишнього середовища, від взаємодії матеріалів з середовищем, мастильними матеріалами, активними компонентами (присадками).

На процес зношування суттєво впливає водень. Великі градієнти напружень і температур в приповерхневих шарах металу при терті сприяють підвищеній концентрації водню в зоні тертя, утворенню і розвитку мікротріщин, крихких шарів та інтенсивному зношуванню.

Робота вузлів тертя в агресивних середовищах і в електролітах супроводжується корозійними процесами, анодним розчиненням, переходом іонів атомів металу з решітки в розчин. Електрохімічні процеси, що розвиваються на фактичних площах контакту, залежать від руйнування і відновлення пасивувальних плівок. Корозійно-механічні процеси можуть мати домінуюче значення при кавітаційному і ерозійному руйнуваннях, які викликані мікроударним впливом рідин.

Необхідно враховувати адсорбційні і корозійні ефекти при оцінці впливу присадок на зношування. Утворення міцних адсорбційних шарів, протекторна дія мастила перешкоджають безпосередньому контакту мікронерівностей поверхонь, що труться, і знижує адгезійну взаємодію. Однак зниження механічних властивостей поверхневих і приповерхневих шарів в результаті хімічного модифікування викликає посилення корозійно-механічного зношування.

Корозійно-механічне зношування типове для різних вузлів машин, апаратів, обладнання нафтохімічної, харчової, гірничо-металургійної, деревообробної, мікробіологічної промисловості.

**Адгезійні** (adhesive) **зношування**. Адгезійне зношування виникає внаслідок дії міжповерхневих сил, молекулярного зчеплення на поверхні поділу, утворення адгезійних зв'язків між контактуючими поверхнями. Під **адгезією** розуміють злипання дотичних поверхонь різнорідних твердих або рідких тіл. Адгезійні взаємодії викликають підповерхневе руйнування матеріалів поверхонь, які труться, появу заїдання, виникнення «холодного зварювання», підвищення значень інтенсивності зношування і сил тертя. Сила адгезійної взаємодії залежить від ступеня очищення поверхонь від адсорбованих шарів, забруднень, наявності мастильних речовин. Проблема адгезійної взаємодії є однією з головних у науці про тертя і зношування

твердих тіл – металів, полімерів, кераміки, композитів, напівпровідників. На площадках фактичного контакту поверхонь тертя під впливом нормальних і тангенціальних зусиль, температур, деформаційних процесів відбувається руйнування всіх протекторних шарів (мастила, забруднень, адсорбованих речовин, оксидів), виникає контакт атомарно-чистих поверхонь. Механізм адгезії пов'язаний з особливостями електронної будови контактуючих тіл, концентрації валентних електронів, густини вільних електронів на поверхні поділу.

Адгезійне зношування часто виникає за недостатньої кількості і за відсутності мастильного матеріалу, у випадках руйнування забруднень, адсорбованих плівок, оксидів. Особливо адгезійне зношування небезпечне для космічної техніки, вакуумного обладнання, механізмів атомних реакторів та інших високонавантажених вузлів, що функціонують в газових і рідких агресивних середовищах.

**Втомне (fatigue) зношування.** Втомне зношування виникає в результаті повторного деформування мікрооб'ємів матеріалу, що викликає виникнення тріщин і відділення частинок матеріалу. Циклічно змінні контактні напруження викликають поверхневе руйнування у вигляді ямок викришування (пітинг), тріщин, відшаровування. Утворені раковини з діаметром від сотих часток міліметра до декількох міліметрів збільшуються в процесі роботи вузла тертя, виникає лущення поверхні. Кількісна оцінка контактної втоми виявляється у числі циклів навантаження або в годинах роботи до виникнення втомних руйнувань поверхонь. Поява втомного зношування – викришування, призводить до посилення вібраційно-акустичної активності механізмів, підвищення рівня шуму, збільшення концентрації навантаження, контактних напружень, зменшення розміру площі несучої поверхні поверхонь тертя, виникнення інтенсивного зношування і заїдання. Умови виникнення і кінетика розвитку втомного зношування залежать від напружено деформованого стану поверхневих і приповерхневих шарів матеріалу, фізико-механічних властивостей матеріалу, фізико-хімічних властивостей мастильних матеріалів та навколишнього середовища, товщини мастильного шару, кінематики контакту, форми і розмірів деталей, що дотикаються.

Виникненню мікротріщин за циклічних контактних взаємодій сприяє вплив концентраторів напружень. До поверхневих концентраторів напружень належать дефекти у вигляді подряпин, вм'ятин, рисок, припалів тощо; до поверхневих концентраторів – неметалеві включення, мікропори, раковини, карбіди тощо. Великий вплив на втомне зношування має величина максимальних дотичних напружень. Збільшення коефіцієнта тертя ковзання сприяє виникненню викришування. З ростом товщини мастильного шару зменшуються кількість взаємодіючих мікронерівностей,

тривалість і величина деформування, запобігається металевий контакт. Стійкість до викришування збільшується з підвищенням значень меж пружності, текучості, в'язкості, твердості матеріалу. У початковий період роботи спряжень може виникнути обмежене викришування, що залежить від концентрації навантаження на окремих ділянках або нерівностях. В результаті подальшого припрацювання поверхонь розподіл навантаження стає більш рівномірним і викришування припиняється. Створено розрахунки деталей машин на втомне контактне руйнування. Допустимі нормальні контактні напруження за Герцем  $\sigma_H$  і кількість циклів навантаження до настання викришування  $N$  пов'язані коефіцієнтом довговічності  $z_N$ .

Фрикційно-втомна модель зношування була розвинена Крагельським, в ній враховуються процеси на рівні впливу мікрогеометрії (шорсткостей) поверхонь. Під час відносного ковзання тіл тертя руйнування відбувається в результаті багаторазового деформування матеріалу, що стирається, жорсткими мікронерівностями контртіла.

Рівняння для фрикційної втоми

$$I_h = \frac{p_a \cdot k_1 \cdot \alpha^*}{p_r \cdot n} \cdot \sqrt{\frac{h}{R}}, \quad (5.21)$$

де  $h/R$  – відносна глибина проникнення;

$h$  – глибина проникнення одиничної нерівності;

$R$  – радіус нерівності;

$p_a$  і  $p_r$  – відповідно номінальний і фактичний тиск;

$k_1$  – коефіцієнт, що залежить від розташування нерівностей за висотою;

$\alpha^*$  – відношення номінальної площі до фактичної площі тертя;

$n$  – число циклів, яке витримує деформований об'єм до руйнування.

Втомне руйнування поверхневих шарів матеріалів у вигляді викришування виникає в добре змащувальних механізмах, спряження поверхонь деталей яких працюють в режимах кінематичного кочення та ковзання, кочення з ковзанням. Найбільш схильні до контактного руйнування у вигляді викришування зубчасті передачі, підшипники кочення і ковзання, катки, кулачкові механізми, фрикційні передачі тощо. Слід зазначити, що втомні процеси руйнування зазвичай супроводжують різні види зношування, оскільки змінні в часі напруження мають місце за різних видів тертя і призводять до втомних пошкоджень.

**Зношування під час фретинг-корозії** (fretting corrosion). Зношування під час фретинг-корозії виникає за малих коливальних, циклічних, зворотно-поступальних переміщень з малими амплітудами. Необхідною умовою виникнення фретинг-корозії є наявність проковзування між

спряженими поверхнями. Вона виникає в заклепкових, болтових, шліцьових, шпонкових, штифтових з'єднаннях, пресових посадках деталей, сталевих канатах, шарнірах, з'єднаннях муфт, ресорах, клапанах, регуляторах електричних контактів, кулачкових механізмах, елементах ядерних реакторів, несучих системах вертольотів і літаків, деталях газотурбінних двигунів. Активізує цей процес наявність вібрацій, змінних в часі крутильних і згинальних моментів. Пошкодження концентруються на невеликих ділянках і нагадують точкову корозію. Підвищується величина шорсткості, утворюються налипання, каверни, мікротріщини, при цьому зазвичай знижується втомна міцність деталей.

Зношування під час фретинг-корозії залежить від процесів, які тривають одночасно, мікросхоплювання, втомного, корозійно-механічного, абразивного впливу.

Розрахункові залежності для визначення зношування в умовах фретинг-корозії мають вельми наближений, оцінний характер. Механізм виникнення і кінетика розвитку зношування поверхонь в умовах фретинг-корозії є найбільш складними за своєю природою процесами.

**Ерозійне (erosive) зношування.** Ерозійне зношування відбувається в результаті впливу на поверхню потоку рідини, газу, твердих частинок. З видаленням поверхневих локальних мікрооб'ємів під час повторних дій частинок виникають яскраво виражені нерівності та огрубіння поверхні.

Інтенсивність ерозійного руйнування залежить від міцності когезійних зв'язків у матеріалі; енергія, що виділяється в момент зіткнення частинок з поверхнею, може викликати часткове розплавлення місця контакту. Ерозія під час дії води відбувається внаслідок тертя її потоку по поверхні і від ударної дії частинок потоку. При цьому може мати місце процес електрохімічної корозії, тому в багатьох випадках ерозійне зношування супроводжується корозійно-механічними руйнуваннями. Інтенсивність ерозійного зношування залежить від швидкості потоку, кута атаки зношувальної поверхні, механічних властивостей і концентрації діючих частинок, агресивності середовища – носія, фізико-механічних і хімічних властивостей поверхневих і приповерхневих шарів матеріалу. Ерозійне зношування відбувається в гідроподібній і газоподібній діях середовища, яке спостерігається, наприклад, в різних деталях гідромашин, патрубків, землесосів, турбобурів тощо. Діючими факторами є абразивні частинки і потік рідини, що несе тверді частинки. Механічний вплив твердих частинок може поєднуватися з корозійним і кавітаційним руйнуваннями. На зношування впливають також співвідношення значень твердості матеріалу і абразиву, величина кута атаки. Ерозійне зношування може виникати також у результаті дії розрядів під час проходження електричного струму.

**Кавітаційне (cavitation) зношування.** Кавітаційне зношування виникає за відносного руху твердого тіла і рідини в умовах кавітації. Кавітаційне зношування типове для деталей машин, що працюють в рідких середовищах. Процес утворення гідродинамічної кавітації пов'язаний з виникненням каверн – кавітаційних бульбашок. Основні діючі фактори під час кавітації мають різну природу – значні локальні механічні сили, хімічні, теплові, електричні та інші процеси. Механізм і кінетика кавітаційного зношування містять процес зародження і зростання кавітаційних каверн, їх розрив – руйнівний вплив на поверхню. Для утворення каверн у рідині необхідно падіння тиску в ній до тиску насичених парів. Ядра кавітації в області розрідження рідини перетворюються на кавітаційні бульбашки і каверни. У момент досягнення граничного розміру кавітаційні бульбашки (каверни) починають розриватись (лопатись), внаслідок чого поверхня твердого тіла в зоні кавітації отримує механічне пошкодження. Виникають ударні хвилі на поверхнях деталей.

Кавітаційне зношування (кавітаційна ерозія) металевих тіл має вигляд видавлених кратерів, що періодично утворюються в процесі роботи деталей.

До кавітаційного зношування схильні різні деталі гідромашин, робочі колеса насосів, гребних гвинтів, лопаті гідротурбін. Для опису механізму процесу кавітаційного зношування дуже перспективними є кумулятивно-релаксаційні моделі руйнування твердих тіл.

**Зношування під час заїдання (sticking).** Зношування під час заїдання – найбільш небезпечне руйнування поверхонь тертя, що виникає в результаті схоплювання, глибинного викидання матеріалу, перенесення матеріалу з однієї поверхні тертя на іншу, руйнуючої дії утворених нерівностей. Заїдання проявляється у вигляді глибоких борозен, наростів, рисок, оплавлення. Зношування під час заїдання може мати лавинний, катастрофічний характер і призводити до повного виходу вузла тертя з ладу. Воно зустрічається в важконавантажених зубчастих передачах, кулачкових механізмах, шарнірних з'єднаннях, підшипникових опорах, в циліндро-поршневих парах, золотникових пристроях, в напрямних верстатів, в стаціонарних контактних поверхнях за наявності вібрацій. Обов'язковою умовою виникнення заїдання є руйнування проміжних мастильних шарів і взаємодія фізично чистих (ювенільних) контактуючих поверхонь. Руйнування захисних мастильних шарів може наступити внаслідок пластичної деформації, зношування шорсткостей поверхонь, що знаходяться навіть в «холодному» стані, або внаслідок втрати змащувальних властивостей (деградації) мастильного матеріалу за підвищених температур в зонах фактичного контакту тіл. Заїдання

можливе в результаті спрацювання мастильного матеріалу і за недостатнього його додаткового надходження до місця тертя.

Всі розглянуті вище види зношування деталей машин не мають одночасно вирішального значення. Переважний вид зношування залежить від зовнішніх умов експлуатації машини, способу змащування (неперервний чи періодичний), ступеня навантаження контакту деталей, питомого тиску, швидкості ковзання та інших факторів.

Зношування деталей машин характеризується параметром  $H_h$ , який називається **інтенсивністю зношування** – відношенням товщини шару матеріалу, втраченого через зношування, до шляху тертя (шляху переміщення точки, в якій фіксується зношування, щодо спряженої поверхні).

Величина, обернена до інтенсивності зношування, називається **стійкістю проти зношування**.

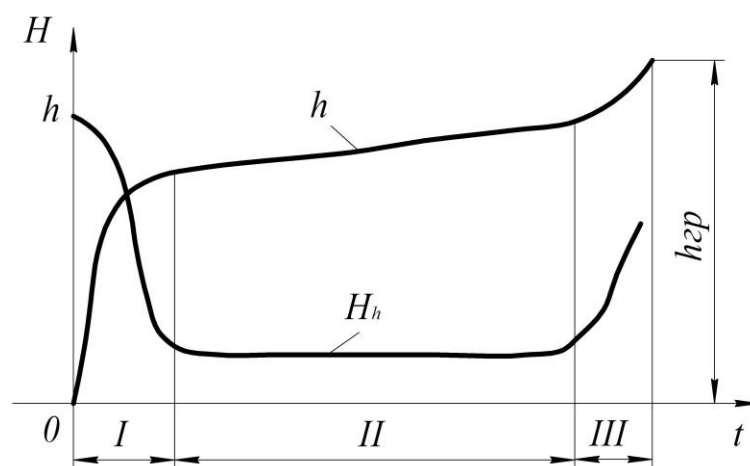


Рисунок 5.6 – Зміна інтенсивності зношування та зношування в часі

Під час експлуатації машини інтенсивність зношування деталей істотно змінюється. У початковий період експлуатації через неминучі огріхи спряжених поверхонь деталей під час виготовлення має місце підвищена інтенсивність зношування. Із припрацюванням (взаємним притиранням) деталей інтенсивність зношування зменшується, потім стабілізується, а надалі протягом тривалого часу залишається постійною. Наступна зміна форми деталей, що спричинена зношуванням, і зміна умов змащування збільшують інтенсивність зношування на кінцевому етапі експлуатації машини.

Графік, що характеризує зміну інтенсивності зношування  $H_h$  і зношування  $h$  протягом строку служби машини, показаний на рис. 5.6 (I – період припрацювання деталей машин; II – період усталеного зношування і



III – період інтенсивного зношування на кінцевому етапі експлуатації машини).

Щоб запобігти небезпечним формам пошкодження поверхонь деталей під час припрацьовування, слід передбачити полегшений режим роботи машини, тобто роботу на стендах або в експлуатації з низькими навантаженнями та швидкостями. З метою зменшення періоду припрацьовування в мастильні матеріали деколи вводять спеціальні домішки, що прискорюють припрацьовування за рахунок корозійно-механічного або абразивного зношування. Подібні заходи знижують або навіть запобігають нагромадженню втомних пошкоджень поверхонь деталей під час припрацьовування їх.

Після досягнення граничного зношування  $h_{zp}$ , коли подальша робота машини неможлива або є небезпечною, закінчується строк служби машини або окремих її деталей.

Щоб забезпечувати стійкість проти зношування, треба використовувати такі розрахунки деталей машин:

- розрахунок за умовою обмеження тиску в контакті деталей

$$p \leq [p], \quad (5.22)$$

- розрахунок за умовою обмеження максимального контактного напруження

$$\sigma_H \leq [\sigma]_{Hmax}, \quad (5.23)$$

- розрахунок за критерієм  $pv_s$  ( $v_s$  – швидкість ковзання в контакті деталей)

$$pv_s \leq [pv]. \quad (5.24)$$

Допустимий тиск  $[p]$  вибирають за умови невитискання мастила з контакту деталей,  $[\sigma]_{Hmax}$  – за умови запобігання схоплюванню або заїданню, а критерій  $[pv_s]$  – за умови обмеження теплової напруженості пари тертя. Для розрахунків на довговічність при зношуванні деталей використовують емпіричні залежності;

$$F^m S = C, \quad \sigma_H^m N_\delta = \tilde{N}. \quad (5.25)$$

де  $F$  – навантаження в контакті деталей;

$S$  – шлях тертя; показник степеня  $m$  вибирають у межах 1-3; для поверхонь без мастила  $m \approx 1$ ; за наявності мастила  $m \approx 3$ .

Величина  $C$  – постійна для конкретного виду зношування. Вона залежить від матеріалів спряжених деталей, конструкції спряження, якості і способу подачі мастила та інших факторів.

Наведені вище розрахунки умовні і не дають повного уявлення про ступінь надійності роботи деталей в умовах тертя.

## 5.4 Шляхи зменшення зношування деталей машин

Зношування деталей машин можна зменшити використанням ефективних мастильних матеріалів, раціональним вибором матеріалів пари тертя і забезпеченням найдодільніших конструкцій вузлів тертя та технології їх виготовлення.

*Використання ефективних мастильних матеріалів.* У машинобудуванні застосовують рідкі, пластичні та тверді мастильні матеріали. Використання тих чи інших мастильних матеріалів для зменшення зношування деталей залежить від конкретних умов роботи цих деталей.

Рідкі мастила застосовують найчастіше для неперервного змащування вузлів тертя з підвищеним виділенням тепла. Вони можуть забезпечити рідинне тертя в спряженні деталей за певних умов, виносять продукти зношування із зони контакту деталей та охолоджують вузли тертя.

У парах тертя з порівняно невеликим виділенням тепла і при відсутності потреби відведення тепла за допомогою мастила більш розповсюджені пластичні мастила. Здатність цих мастил утримуватись на вертикальних площинах має важливе значення для надійного змащування тихохідних машин та для герметизації вузлів тертя.

Широко використовують тверді мастила, особливо в ядерній та космічній техніці. В умовах високих або низьких температур, в агресивних середовищах чи в глибокому вакуумі рідкі та пластичні мастила нероботоздатні. В таких специфічних умовах або у звичайних умовах тверді мастила дуже ефективні. Найбільше використання мають такі тверді мастила як колоїдний графіт та дисульфід молібдену. Разом з відповідними в'язучими добавками дисульфід молібдену утворює міцні плівки на металевих поверхнях, які захищають їх від захоплювання та фретинг-корозії.

*Вибір матеріалів.* Досвід експлуатації вузлів тертя дає змогу дійти деяких висновків, що мають значення під час добору матеріалів для пари тертя ковзання, а саме:

- твердий матеріал у парі з м'яким достатньою мірою запобігає заїданню;
- твердий матеріал у парі з іншим твердим матеріалом при низьких швидкостях ковзання має високу стійкість проти зношування внаслідок малого взаємного проникнення їхніх поверхонь;
- м'який матеріал у сукупності з іншим м'яким матеріалом має низьку стійкість проти зношування і ненадійний в роботі;

- пористі (спечені) матеріали та антифрикційні сплави доцільно використовувати у вузлах тертя, які періодично змащуються.

*Конструктивні шляхи зменшення спрацьовування деталей машин.*  
До цих шляхів зменшення зношування слід віднести такі заходи:

- треба уникати відкритих пар тертя. У відкритих парах тертя важко забезпечити достатнє змащування та захистити їх від впливу навколишнього середовища;

- доцільно замінити тертя ковзання на тертя кочення;

- потрібно забезпечувати найрівномірніший розподіл тиску на поверхнях тертя;

- якщо в спряженнях деталей із малими взаємними переміщеннями є фретинг-корозія, то доцільно зовнішнє тертя замінювати внутрішнім, використовуючи гумометалеві шарніри;

- поверхні тертя у фрикційних парах вигідно робити переривчастими – на одній із поверхонь передбачати поперечні рівці. Це поліпшує охолодження, забезпечує винесення продуктів спрацьовування, локалізує задирки;

- довговічність деяких деталей можна значно збільшити, якщо передбачити можливість перевертання їх після деякого періоду роботи, наприклад зубчасті колеса, що працюють одним профілем зубця, ходові гвинти токарних верстатів та інші деталі.

*Технологічні шляхи зменшення зношування.* Якість поверхонь деталей, що працюють в умовах тертя, можна поліпшити технологічно:

- поверхні тертя повинні мати шорсткість згідно з видом тертя. Із підвищенням класу чистоти поверхонь істотно зростають несуча здатність і надійність пар тертя, якщо тертя рідинне. Поверхні оптимальної шорсткості (при низьких швидкостях ковзання) утримують більшу кількість мастила та зменшують шкідливу дію продуктів зношування;

- підвищення твердості поверхонь забезпечує зростання їхньої стійкості проти зношування. Твердість можна збільшити поверхневим гартуванням, азотуванням або боруванням. Підвищення твердості дуже ефективне під час роботи деталей в абразивних середовищах;

- біметалізація дозволяє наносити на поверхні тертя деталей тонкі шари високоякісних антифрикційних сплавів, що забезпечує їхню підвищену несучу здатність;

- поверхневе наклепування через обкочування роликками дає змогу збільшити стійкість проти зношування поверхонь деталей.



## Конструкційні матеріали та їх властивості

### 6.1 Фізичні, хімічні, механічні властивості конструкційних матеріалів

**Конструкційним** називаємо матеріал, що йде на виготовлення деталей конструкцій, які сприймають силове навантаження. Кожна галузь машинобудування у своєму розвитку ставить специфічні вимоги до властивостей конструкційних матеріалів. Ці властивості поділяються на фізичні, хімічні, механічні, технологічні та експлуатаційні.

До **фізичних властивостей** конструкційних матеріалів відносяться температура плавлення, густина, коефіцієнти лінійного та об'ємного розширення, електропровідність, теплопровідність, магнітна проникність тощо. Фізичні властивості сплавів зумовлюються їхніми складом та структурою. Зазвичай фізичні властивості матеріалів під час виготовлення деталей не враховуються, за винятком тих випадків, коли це необхідно для нормального функціонування. Наприклад, для літакобудування потрібні матеріали з невеликою густиною, а суднобудування, зокрема мінних тральщиків, матеріали з високою магнітною проникністю.

До **хімічних властивостей** належить хімічна активність, здатність до хімічної взаємодії з агресивними середовищами, антикорозійні властивості.

Механічні властивості матеріалу визначають його придатність для виготовлення деталей, з врахуванням їх силових навантажень.

До **механічних властивостей** відносять опір матеріалу деформації (міцність) та опір руйнуванню (пластичність, в'язкість, здатність металу не руйнуватися за наявності тріщин).

Опір деформації узагальнює поняття міцність, а опір руйнуванню – надійність.

Якщо руйнування не одноразове, а виникає внаслідок сукупності мікроруйнувань під дією багатьох циклів навантаження, то це характеризує **довговічність** (durability) матеріалу.

Якісний матеріал одночасно повинен бути міцним, надійним, довговічним. Кількісні показники цих характеристик отримуються шляхом застосування відповідних методик випробування зразків матеріалу.

Наприклад, під час розтягу зразка встановлюється міцність та пластичність матеріалу.

**Міцність** – це показник, що характеризує здатність матеріалу чинити опір руйнуванню за дії навантажень.

Основний показник – тимчасовий опір або *границя міцності*  $\sigma_b$  (тимчасове напруження), визначається із залежності (див. РОЗДІЛ 3).

**Пластичність** (plasticity) – це здатність матеріалу до пластичного деформування під дією навантажень. Оцінюється відносно видовження, зразка під дією навантаження (див. РОЗДІЛ 3).

**Твердість** (hardness) – це властивість поверхневого шару матеріалу чинити опір пружній та пластичній деформаціям або руйнуванню за місцевої пластичної взаємодії з боку іншого, більш твердого тіла (індентора) відповідної форми та розмірів.

Способи визначення твердості поділяються на **статичні** і **динамічні**. Найбільше поширення отримали статичні методи Брінелля, Роквелла та Вікерса.

За методом Брінелля кульку діаметром 2,5; 5 або 10 мм заглиблюють в поверхню матеріалу під навантаженням. За розмірами відбитку (лунки) кульки в матеріалі, що утворилась під певним навантаженням, встановлюється його твердість, що позначається HB (H – від англійського hardness – твердість, B – Brinell):

$$HB = \frac{P}{A}, \quad \text{і} \quad \ddot{A}, \quad (6.1)$$

де  $P$  – діюча сила;

$A$  – площа відбитка.

За методом Роквелла в зразок заглиблюється індентор у вигляді алмазного конуса з кутом у вершині  $120^\circ$  або загартованої сталевій кульки діаметром  $1/16''$ . У першому випадку твердість позначається  $HR_c$  або  $HR_a$ , у другому  $HR_b$ .

За методом Вікерса твердість вимірюється шляхом вдавнення індентора у вигляді чотиригранної піраміди з кутом при вершині  $136^\circ$ . Позначається, наприклад, HV200.

Використання відповідного методу при визначенні твердості матеріалу пов'язано з точністю вимірювання певних величин.

Метод Брінелля спотворює результат внаслідок деформації самого індентора при значеннях понад HB350...HB400. Застосування алмазних інденторів не обмежують використання методу Вікерса і Роквелла.

**Ударна в'язкість** (impact elasticity) – це здатність матеріалу поглинати механічну енергію в процесі деформування і руйнування під дією ударного навантаження.

Як правило, оцінюється роботою, що виконана до руйнування надрізаного зразка при ударному згинанні, віднесеного до площі перерізу в місці надрізу. Вимірюється в Дж/м<sup>2</sup>. Ударна в'язкість є умовною

характеристикою, що сильно залежить від розмірів зразка, форми і стану поверхні та не дозволяє проводити розрахунки на міцність. Проте її практичне значення досить значне. За температурною залежністю ударної в'язкості оцінюють схильність матеріалу до крихкого руйнування (холодноламкість). За низьких температур у більшості чорних металів крихкість зростає із зниженням ударної в'язкості. Для таких металів ударними випробуваннями з поступовим зниженням температури вдається встановити так звану **критичну температуру крихкості** – температуру, за якої відбувається різке зменшення ударної в'язкості металу. Нижче критичної температури метал стає непридатним до роботи при динамічних навантаженнях.

## **6.2 Технологічні і експлуатаційні властивості конструкційних матеріалів**

**Технологічні властивості** конструкційних матеріалів – це комплекс фізико-хімічних властивостей цих матеріалів, зумовлених взаємодією речовини з технологічним середовищем під час їхньої обробки. Основним критерієм технологічності є оброблюваність матеріалу. Вона обумовлює вибір оптимального технологічного методу обробки, наприклад, литтям, обробкою тиском, зварюванням з подальшою обробкою і наданням остаточних форм, розмірів, шорсткості, потрібних механічних характеристик.

Основними технологічними властивостями матеріалу є ливарні властивості, оброблюваність тиском, зварюваність, оброблюваність різанням, термічна оброблюваність.

**Ливарні** властивості оцінюються здатністю матеріалу до переробки у рідкому стані з метою отримання виливків певних розмірів, форми та якості металу.

**Оброблюваність тиском** – здатність матеріалу сприймати пластичну деформацію без руйнування цілісності в процесі формозміни тиском в холодному або гарячому стані.

**Зварюваність** – це здатність матеріалу утворювати нероз'ємне зварне з'єднання потрібної якості.

**Оброблюваність різанням** визначається опором матеріалу стружкоутворенню за заданих шорсткості, точності та механічних властивостях оброблених поверхонь.

**Термічна оброблюваність** – це здатність матеріалу до поліпшення механічних властивостей шляхом теплової дії на матеріал, яка може поєднуватись з хімічною, деформаційною, магнітною тощо.

Технологічні властивості на рівні з механічними є основними чинниками, що визначають вибір матеріалу для деталей, які сприймають великі та середні за значенням навантаження. Для деталей, що незначно навантажені, чи зовсім не навантажені, вирішальним чинником під час вибору матеріалу є лише вибір технологічних властивостей щодо економічної доцільності.

Властивості, які проявляє матеріал в конкретних умовах його експлуатації, прийнято називати *експлуатаційними*. До таких відносяться, наприклад, *корозійна стійкість* – здатність не реагувати з агресивним середовищем; *жароміцність* і *жаростійкість* – відповідно міцність та корозійна стійкість при високих температурах; *зносостійкість* – опір матеріалу зношуванню; *холодоламкість* – втрата матеріалом механічних характеристик за низьких температур тощо.

### 6.3 Класифікація конструкційних матеріалів

Конструкційні матеріали поділяються: *за природою матеріалів* – на металеві, неметалеві, композиційні та порошкові; *за технологію виробництва* – на деформовані, литі, спечені, зварні; *за умовами роботи* – низькотемпературні жароміцні, корозійно-, окалино-, зносо-, паливо-, мастилостійкі; *за критеріями міцності* – матеріали малої, середньої міцності з великим запасом пластичності, високоміцні з малим запасом пластичності.

Понад 95% усіх деталей у машинобудуванні виготовляються з металу. Металеві конструкційні матеріали виготовляють із сплавів, створених сплавленням кількох металів, а також неметалів. *Сплави* мають якісніші фізико-механічні, технологічні та експлуатаційні характеристики, ніж чисті їх складові компоненти.

У сплавах можна суттєво покращити весь комплекс властивостей шляхом термічної, хімікотермічної, механічної та термомеханічної обробки.

*За типом металу*, що є основою сплаву, конструкційні матеріали у машинобудуванні класифікуються на основі заліза, міді, алюмінію, магнію, титану тощо.

#### 6.3.1 Конструкційні матеріали на основі заліза

Найбільш поширеними є сплави на основі заліза, на частку яких припадає 95% усієї металевої конструкції. *Властивості заліза*: температура плавлення 1539 °С, густина 7874 кг/м<sup>3</sup>, міцність  $\sigma_B = 170...210$  МН/м<sup>2</sup>, відносне видовження  $\delta = 4,5...5,5\%$ , твердість HB 350...450 МПа, ударна в'язкість  $a_H = 300$  МДж/м<sup>2</sup> (30 кГс·м/см<sup>2</sup>).

**Залізо** – найважливіший метал сучасної техніки. В чистому вигляді залізо через його низьку міцність практично не використовується, хоча в побуті “залізними” часто називають його сплави – *сталь* та *чавун*. Значення заліза в сучасному житті визначається як його широким розповсюдженням у природі (4,65% за масою, друге місце серед металів після алюмінію), так і здатністю утворювати різноманітні сплави, в яких поєднуються досить цінні властивості. На частку залізних сплавів припадає приблизно 95% усієї металевої продукції.

За допомогою різних видів термічних, механічних та термомеханічних способів обробки в залізо-вуглецевих сплавах можна змінювати їх структуру тобто розміри, форму і взаємне розташування кристалів різних фаз та їхнє співвідношення, що дозволяє отримувати сплав з різноманітними властивостями.

У залізовуглецевих сплавах є *домішки*, які є *звичайними* (фосфор, сірка, марганець, кремній, кисень, азот, водень), що з'явилися в сплавах під час технологічних процесів при їх виготовленні, а інші (хром, молібден, титан, ванадій, вольфрам, кобальт, мідь та ін.) називаються *легуючими* і вводяться в сплави для покращення властивостей.

Технічні залізовуглецеві сплави називаються *сталями* і *чавунами*.

**Сталь** – це сплав заліза з вуглецем, вміст якого не перевищує 2,14%. За вмістом вуглецю сталь поділяють на вуглецеву і леговану.

*Вуглецева сталь* є найбільш розповсюдженою (до 80% загального виробництва) і поділяється на 3 основні групи: *звичайної якості*, *якісна загального призначення*, *спеціалізована* (інструментальна, котельна, дамаська та ін.).

Вміст вуглецю значною мірою змінює властивості цієї сталі. Так, із збільшенням вмісту вуглецю підвищується твердість та міцність, покращуються ливарні властивості та здатність до загартовування, знижується пластичність, ударна в'язкість, погіршуються зварюваність, оброблюваність тиском та різанням.

З недорогої сталі вуглецевої звичайної якості випускається до 70% всього прокату. Маркується така сталь Ст1кп, Ст3сп, Ст5нп. Цифрою від 0 до 6 позначається порядковий номер, а індексом кп, сп, нп – наявність чи відсутність в ній кисню. Розкислення сталі – це видалення зі сталі кисню. Розкислена сталь позначається сп (спокійна), не розкислена – кп (кипляча), розкислена не повністю – нп (напівспокійна).

Сталь звичайної якості окрім вуглецю (0,06...0,49%) містить марганець, кремній, фосфор та сірку.

*Вуглецева якісна конструкційна сталь* за хімічним складом поділяється на марки від сталі 05 до сталі 85, де число показує вміст вуглецю в сотих частках проценту (відповідно 0,05%, 0,85%). Числа в



марках цієї сталі кратні 5, поділяються на киплячу (КП), напівспокійну (НП), спокійну (без індекса).

Якщо у якісну сталь вводять марганець, то при маркуванні в кінці ставлять літеру Г, що означає його вміст до 1% (наприклад, сталь 65Г). Умовно якісна сталь поділяється на низьковуглецеву (до 0,2% вуглецю), середньовуглецеву (0,25...0,4% вуглецю) та високовуглецеву (0,45...0,85% вуглецю).

У якісних сталях обмежують вміст сірки та фосфору ( $<0,04\%$ ).

*Низьковуглецеві* сталі використовуються для малонавантажених деталей (шайби, прокладки, кузови легкових автомобілів), *середньовуглецеві* та деякі *високовуглецеві* (сталь 45, сталь 50) після термообробки – для різних деталей багатьох галузей машинобудування (розподільні вали, шестерні, шатуни, шпинделі, вали та ін.), *високовуглецеві після термообробки* – для деталей що працюють в умовах тертя під дією вібраційних навантажень (пружини, ресори, прокатні стани).

*Леговані сталі* окрім вуглецю містять домішки, які надають сталям певні фізико-хімічні, технологічні, механічні або експлуатаційні властивості. Про наявність легованих елементів у сталі в її маркуванні свідчить наявність літер: Н – нікель (Ni), Х – хром (Cr), Г – марганець (Mn), С – кремній (Si), В – вольфрам (W), Ф – ванадій (V), М – молібден (Mo), Д – мідь (Cu), К – кобальт (Co), Б – ніобій (Nb), Т – титан (Ti), Ю – алюміній (Al), Р – бор (B), А – азот (N). Але, якщо літера А стоїть в кінці марки, то це свідчить про те, що сталь має більш низький вміст сірки й фосфору (до 0,03% кожного), тобто є *високоякісною* (сірка і фосфор є безумовно шкідливими елементами у залізовуглецевих сплавах).. Якщо вміст легуючого елемента не перевищує 1...1,5%, то цифра після його позначення в марці сталі не проставляється.

Приклад маркування легової сталі: Сталь 08Х2ІН6М2ТА містить (у середньому) 0,08% С, 21% Cr, 6% Ni, 2% Mo, 1% Ti, високоякісна.

В деяких випадках при маркуванні літера вказує на призначення сталі. Так, інструментальну швидкорізальну сталь позначають літерою Р (Р18 де 18% W), електротехнічну Е (Е3А, де 3% Si) підшипникову – Ш (ШХ15 де 1,5% Cr).

Легування здійснюється, як правило, шляхом сплавлення основного металу з легуючими елементами, які вводять у рідкий метал у вигляді феросплавів або ж у вигляді чистих металів.

В табл. 6.1 наведені марки, механічні характеристики і область використання деяких марок вуглецевих та легованих сталей.

**Чавун** – це сплав заліза з вуглецем за вмістом останнього більше 2,14%. До складу чавуну входять також постійні домішки – марганець (до 1%), кремній (до 3,3%), сірка та фосфор (до 0,1% кожного).

Таблиця 6.1 – Характеристики і область використання вуглецевих та легованих сталей

1	2	3	4	5	6	7
45, 45А	Нормалізація	590	315	255	180	Стакани підшипників кочення, штифти, болти, гвинти, шпильки, гайки, вали, півмуфти тощо
	Поліпшення	690	490	325	220	
	Гартування, середній відпуск	880	635	390	270	
	Гартування СВЧ	880	635	390	(52)	
65	Гартування, середній відпуск	980	635	490	290	Пружини, ресори, диски тощо
65Г		1470	1270	580	440	Пружинні шайби, стопорні кільця
10, 10А	Нормалізація	335	205	157	130	Загнуті стопорні шайби, шплінти, регулювальні прокладки, заклепки
20, 20А	Нормалізація	410	245	195	145	Гнуті, зварні і штамповані деталі, кріпильні деталі
45Л	Нормалізація	540	295	235	153	Станини, корпуси, муфти, водила, важелі тощо
38ХА	Гартування, високий відпуск	930	785	420	300	Зубчасті колеса, черв'яки, зірочки, вали і осі, водила
15ХА	Гартування, низький відпуск	685	490	315	220	Ходові гвинти, кулачки, пальці, вилки, болти, гвинти, гайки тощо
38Х2Ю	Гартування, відпуск	900	750	430	210	Азотовані і силові деталі, які працюють на зношування і витривалість
	Азотування					
15, 15А		370	225	175	137	Труби високого тиску, листи тощо

Продовження таблиці 6.1

1	2	3	4	5	6	7
30ХГСА	Цементация, гартування, низький відпуск	685	490	390	(56)	Вали, диски, зубчасті колеса, кріпильні елементи тощо
30ХГСА 20ХНЗА	Нормалізація	685	490	360	230	Клепані і тонкостінні вузли із листів труб, качалки, важелі, осі, вали, стакани підшипників, тощо
	Термополіп- щення	910	765	440	290	Високовідпові- дальні і високона- пружені деталі, які піддаються вібраційним і динамічним навантаженням, які мають підвищену термостійкість
20ХНЗА	Поверхнєве гартування, СВЧ, високий відпуск	1080	830	470	320	Високовідпові- дальні і високона- пружені деталі, які піддаються вібраційним і динамічним навантаженням, і мають підви- щену термостій- кість і прогарто- вуваність
	Гартування, низький відпуск	1660	1560	570	(50)	
	Гартування, високий відпуск	930	735	410	280	
18Х2Н4 МА	Гартування, високий відпуск	1030	785	510	290	Вали, ротори турбін,

Продовження таблиці 6.1

1	2	3	4	5	6	7
	Гартування, низький відпуск	1130	835	550	320	важконаван- тажені деталі редукторів, вінці великих зубчастих коліс тощо
	Цементация, гартування, низький відпуск	1175	980	610	560	
	Азотування після гартування і високого відпуску	1030	785	570	(58)	
38Х2МЮА	Гартування, відпуск	1000	850	500	260	Шнеки та циліндри (шнекова пара), труби високого тиску, втулки тощо
	Азотування				(50)	
12ХН3А	Цементация, поверхнева гартування, низький відпуск	930	735	520	(56)	Високонанаван- тажені деталі з високою поверхневою твердістю, зносостій- кістю, в'язкою серцевиною, а також ті, які працюють при високих швидкостях і ударних навантажен- нях, зубчасті колеса, вали, осі тощо
	Поліпшення	880	685	350	260	
	Гартування, низький відпуск	930	735	370	280	
	Цементация, гартування, низький відпуск	930	735	490	(56)	

Розрізняють чавуни *доменні* (первинної плавки) та *конструкційні* (вторинної плавки). Доменні чавуни використовуються для подальшої переробки в сталь і частково (ливарні чавуни) як компонент шихти для виготовлення конструкційних чавунів. *Шихта* – це суміш матеріалів у певній пропорції, що підлягає переробці в металургійних печах для отримання кінцевого продукту із заданими властивостями.

*Конструкційний* чавун використовується тільки, як ливарний матеріал (75% всіх виливків). Деякі чавуни за міцністю мало чим поступаються вуглецевим сталям, але є дешевшими за них.

В залежності від того, в якому стані знаходиться вуглець чавуни поділяються на *білі* та *графітізовані*. На процес кристалізації чавуну в білому чи графітізованому стані впливають охолодження виливків після заливання рідким металом та хімічний склад речовини.

В залежності від форми графітних включень у графітізованих чавунах останні поділяються на *сірий, ковкий, високоміцний*, та чавун із *вермикулярним графітом*. Чим більше в чавуні вуглецю, тим нижчі його механічні властивості. Графітні включення в чавуні можна розглядати як порожнечи. При їх однаковому об'ємі найкращі механічні властивості будуть у чавуні з округлою, кулястою формою графітних включень.

В багатьох випадках, завдяки графіту, чавун має переваги перед сталлю:

- наявність графіту полегшує оброблюваність різанням, робить стружку ламкою;
- чавун має добрі антифрикційні властивості завдяки змащувальній дії графіту;
- наявність графітних включень швидко гасить вібрації та резонансні коливання;
- чавун майже нечутливий до дефектів поверхні, надрізів тощо;
- чавун має добрі ливарні властивості, особливо рідкотекучість, тобто заповнюваність ливарної форми.

*Сірий чавун* – це чавун у якому графіт має форму дещо вигнутих пластин різної довжини та товщини.

Сірий чавун поділяється на марки: СЧ 10; СЧ 15; СЧ 20; СЧ 25; СЧ 30; СЧ 35; СЧ 40; СЧ 45 (С – сірий, Ч – чавун), цифри вказують на міцність чавуну в кілограмах, віднесених до площі перерізу в мм,  $\text{кг/мм}^2$ . Його твердість коливається в межах від НВ 129 до НВ 269 в залежності від марки. Окрім вуглецю (3,2...3,8%) він містить кремній, марганець, фосфор та сірку. Пластичність сірого чавуну надто мала ( $\varepsilon < 0,5\%$ ), тому його застосовують для виготовлення деталей, які не зазнають навантажень на розтяг і удар.

*Ковкий чавун* – це чавун, в якому графіт має пластівчасту (кляксоподібну форму). Отримують відпалом білого чавуну. Назва „ковкий” не означає, що цей чавун можна кувати. Це суто ливарні матеріали з більшою пластичністю в порівнянні із сірим чавуном. Місткість вуглецю в матеріалі 2,4...2,8%.

Приклад позначення КЧ 30-6 (К – ковкий, Ч – чавун, 30 – міцність в  $\text{кГ/мм}^2$ , 6 – відносне видовження у %).

З ковкого чавуну виготовляють деталі високої міцності, зносостійкості, які здатні сприймати ударні і змінні за напрямом навантаження.

*Високоміцний чавун* – це чавун, в якому графітні включення мають кулясту форму. Отримують додаванням до рідкого чавуну невеликої кількості магнію, цезію, кальцію, ітрію. Ці елементи називають *модифікаторами*. Наприклад, магнію необхідно 0,04...0,06% для отримання кулястого графіту. Вміст сірки у високоміцному чавуні нижчий ніж у сірому і становить 0,01... 0,03%. Це зменшення досягається за рахунок утворення нерозчинних у чавуні сульфідів магнію  $\text{Mg}_2\text{S}$

Позначається високоміцний чавун таким чином: ВЧ350-22 (В – високоміцний, Ч – чавун, 350 межа міцності на розтягування в МПа, 22 – відносне видовження у %).

Високоміцний чавун використовується для виготовлення середньота важконавантажених деталей відповідного призначення.

*Чавун з вермикулярним графітом* поєднує в собі позитивні якості високоміцного чавуну з високими ливарними властивостями, теплопровідністю, низькою собівартістю. Графіт в такому чавуні має вигляд коротких потовщених округлених пластин. Технологія його виробництва була освоєна в 1966 році. Позначається цей чавун, наприклад, ЧВГ300-4 (це Ч – чавун, В – вермикулярний, Г – графіт, 300 межа міцності на розтягування в МПа, 4 відносне видовження у %). Ефективним є використання чавуну з вермикулярним графітом у деталях, що зазнають досить високих статичних, ударних, циклічних навантажень, працюють в умовах змінних температур.

### 6.3.2 Конструкційні матеріали на основі міді

*Властивості міді:* температура плавлення  $1083^\circ\text{C}$ , густина  $8960 \text{ кг/м}^3$ , міцність  $220 \text{ МН/м}^2$ , відносне видовження 60%, твердість НВ35. Мідь характеризують високі тепло- та електропровідність, пластичність і корозійна стійкість. За тепло- та електропровідністю мідь займає друге місце після срібла, але внаслідок її більшого практичного значення ці

властивості прийнято вважати еталоном (100%), відносно якого оцінюються інші метали.

Незважаючи на порівняно невелике розповсюдження міді в природі (0,0047 %), вона відноситься до металів, відомих людині з далекої давнини. Цьому сприяло те, що мідь зустрічається в природі у вигляді самородків, а також її легка відновлюваність з оксидів і карбонатів. Застосування людиною міді (мідний вік – 7...4 тис. до н.е.), а потім її сплавів (бронзовий вік – 4...1 тис. до н.е.) відіграло значну роль у розвитку матеріальної культури людської цивілізації.

Найбільше поширення в промисловості серед конструкційних матеріалів на основі міді отримали латуні, бронзи, мідно-нікелеві сплави. Для легування використовують цинк, олово, алюміній, кремній, марганець, нікель, свинець, залізо, фосфор.

**Латунь** – це сплав, в якому основним легуючим матеріалом є цинк. Вони поділяються на подвійні (прості) та багатокомпонентні (леговані). Перші маркуються літерою і числом, наприклад Л96 (Л – латунь, 96 – вміст міді в сплаві, решта – цинк). Багатокомпонентні маркуються, наприклад ЛЦ38Мц2С2 (Л – латунь, 38 – відсоток цинку, 2 – відсоток марганцю, 2 – відсоток свинцю, решта – мідь).

**Бронза** – це сплав міді зі всіма елементами крім цинку, який може входити до складу бронз, але не як основний легуючий елемент. Бронзи поділяються на *олов'яні* та *безолов'яні*. Олов'яні бронзи – найбільш високоякісні, але дорогі і дефіцитні, основним легуючим елементом є олово. Позначається, наприклад БрО10 (Бр – бронза, О – олово, 10 – вміст олова у %). Дешевими і менш дефіцитними є безолов'яні бронзи, які за основним легуючим елементом називаються алюмінієві, свинцеві, берилієві, кремнієві, марганцеві.

Бронзи поділяються на *деформовні* та *ливарні*. Деформовні бронзи маркуються, наприклад, БрОЦС4-4-4 (Бр – бронза, О – олово, Ц – цинк, С – свинець, 4 їх відсоток в сплаві, решта мідь). В ливарних бронзах вміст всіх компонентів у відсотках пишеться відразу після літер, що позначають ці компоненти. Наприклад, БрОЗЦ7С5Н1 означає, що до складу бронзи входить 3 % олова, 7 % цинку, 5% свинцю, 1% нікелю, решта мідь. Деякі марки бронз та латуней і їх механічні властивості наведені в табл. 6.2.

До *мідно-нікелевих сплавів* відноситься мельхіор, незільбер та куніаль.

**Мельхіор** – це сплав міді з нікелем, залізом та марганцем. **Незільбер** є сплавом нікелю і цинку. **Куніаль** – це сплав міді з нікелем та алюмінієм. Використовується у ювелірній промисловості для оздоблення панелей приладів, виготовлення деталей в машинобудуванні та електротехніці. Ці сплави мають гарні механічні властивості, високу корозійну стійкість, добре

обробляються тиском в гарячому і холодному станах. Мельхіори МНЖМц 30-1-1, МН 19 використовуються у ювелірній промисловості, з них виготовляють столові прилади – ножі, виделки тощо.

Таблиця 6.2 – Механічні властивості марок бронзи та латуні

Марка сплаву	$\sigma_{\text{в}}$ , МПа	$\sigma_{\text{т}}$ , МПа	$\delta$ , %
1	2	3	4
<b>Бронзи</b>			
БрОФ6.5-0.15	420	300	—
БрОЦ4-3	440	310	—
БрЛЖ9-4	440	340	—
БрАМц9 2	500	—	15
БрЛЖН10-44	650	—	5
БрА9Мц2Л	392	—	20
БрАЭЖЗЛ	490	—	12
<b>Латуні</b>			
1	2	3	4
Л63	300	—	30
ЛЖС581-1	300	—	20
ЛМц58-2	400	—	20
ЛАЖ60МЛ	420	—	18
ЛА59-1Л	200	—	6

Незільбери містять до 35% Ni і до 45% Zn (наприклад МНЦ 15-20), вони характеризуються високою міцністю, мають красивий сріблястий колір. Використовують цей сплав для виготовлення деталей в електротехніці, ЕОМ, телевізійній техніці, медицині, побутового посуду тощо.

Куніалі містять міді з нікелем (4-20%) та алюмінієм (1-4%). Випускається двох марок – МНА 13-3, МНА 6-1,5. Вони мають високі механічні властивості (за міцністю не поступаються деяким конструкційним сталям), гарну корозійну стійкість у воді. Використовують їх у машинобудуванні для виготовлення пружин та спеціальних деталей в електротехніці.

### 6.3.3 Конструкційні матеріали на основі алюмінію

*Властивості алюмінію:* температура плавлення 660 °С, густина 2700 кг/м<sup>3</sup>, міцність 50...60 МН/м<sup>2</sup>, твердість НВ170 МН/м<sup>2</sup>, відносне видовження до 50%.



За розповсюдженням у природі (8,8% за масою) алюміній займає третє місце після кисню та кремнію і перше – серед металів.

Маючи високу електропровідність, алюміній широко застосовується в електротехнічній промисловості. Як конструкційний матеріал використовуються сплави алюмінію з такими елементами як кремній, мідь, марганець, магній, цинк, літій, берилій. Основні позитивні якості алюмінієвих сплавів – це невелика густина, високі електро- та теплопровідність, корозійна стійкість, висока питома міцність.

За способом виробництва виробів з алюмінієвих сплавів останні можна поділити на дві групи: *ливарні* для фасонних виливків та *деформовні* (у т.ч. спечені) для виготовлення напівфабрикатів (листів, плит, труб, профілів, дроту, поковок) шляхом деформації (прокатування, кування, штампування тощо).

Таблиця 6.3 – Алюмінієві сплави

Марка сплаву	$\sigma_B$ , МПа	$\sigma_{0,2}$ , МПа	$\delta$ , %	Твердість, НВ
1	2	3	4	5
Ливарні сплави				
АЛ2	170	80	6	50
АЛ4	260	200	4	70
АЛ9	200	110	4	50
АЛ3	330	280	3	90
АЛ5	250	180	1	75
АЛ8	320	170	11	70
АЛ19	320	220	12	90
Деформовні сплави				
Д1	410	250	10	—
1	2	3	4	5
Д16	450	320	19	—
Д18	160	60	25	—
АМг3	230	120	25	—
АМг5П	270	150	23	—
АМц	150	120	22	—
АК8	450	400	8	—
АД33	230	120	19	—
В95	500	400	5	—
АК4	320	—	8	—

*Ливарні алюмінієві сплави* призначені для застосування в ливарному виробництві при виготовленні фасонних виливків, в приладо-, автомобіле-,

суднобудуванні, авіації тощо. Серед алюмінієвих ливарних сплавів найбільше застосування отримали **силуміни** – сплави алюмінію з кремнієм.

*Силуміни* охоплюють подвійні сплави системи Al-Si з вмістом до 11-13% Si і сплави більш складних систем: Al-Si-Mg, Al-Si-Cu, Al-Si-Mg-Cu.

Сплави цієї групи характеризуються гарними ливарними властивостями, порівняно високою корозійною стійкістю, високою щільністю (герметичністю виливків), середньою міцністю (180...260 МПа).

Крім силумінів застосовуються також і сплави систем Al-Mg, Al-Mg-Si, що мають високу корозійну стійкість і міцність, систем Al-Cu, Al-Cu-Mn, Al-Cu-Mg-Mn з високою міцністю і жаростійкістю але з гіршими технологічними властивостями (ливарними), ніж силуміни.

До конструктивних матеріалів на основі алюмінію належать ливарні сплави (наприклад, силумін – сплав алюмінію з кремнієм), деформовні сплави (наприклад дюралюміній – сплав алюмінію з міддю і марганцем). До останніх належать і спечені сплави, які отримують послідовним брикетуванням, спіканням й пресуванням порошків. До сплавів можуть входити, крім зазначених матеріалів, марганець, цинк, літій, берилій. Механічні характеристики деяких марок алюмінієвих сплавів наведені в табл. 6.3.

#### 6.3.4 Конструкційні матеріали на основі магнію і титану

*Властивості магнію:* температура плавлення 651 °С, густина 1740 кг/м<sup>3</sup>, міцність  $\sigma_b=15\ldots200$  МПа, твердість HB300...HB360 МПа, відносне видовження  $\delta=8\ldots11,5\%$  (перші значення відносяться до ливарного магнію, другі – до деформовного). Розповсюдження в земній корі 1,87% за масою (третє місце серед конструкційних металів після заліза та алюмінію).

*Магнієві сплави* поділяються на *ливарні* і *деформовні*. Як легуючі елементи в магнієвих сплавах використовують алюміній (до 10%), цинк (до 6%), марганець (2,5%), цирконій (до 1,5%).

*Ливарні* магнієві сплави маркуються літерами МЛ і цифрою (порядковий номер), наприклад, МЛ2, МЛ5, МЛ10 тощо. Магнієві ливарні сплави придатні для усіх відомих способів лиття - в піщані, оболонкові форми, в кокілі, під тиском, за моделями, що виплавляються.

*Деформовні* магнієві сплави маркуються літерами МА і цифрою (порядковий номер), наприклад, МА1, МА5, МА11 та ін.

Магнієві сплави придатні для роботи при низьких, нормальних та підвищених температурах. Завдяки малій густині ( $\gamma=1,4\ldots2$  г/см<sup>3</sup>), високій питомій міцності ( $\sigma_b/\gamma=24$  проти 21 для алюмінієвих, 22 для титанових

сплавів, 23 для сталі), здатності поглинати енергію удару і вібраційні коливання, відмінній оброблюваності різанням магнієві сплави широко використовуються в промисловості, передусім для зниження маси виробів, підвищення їх жорсткості. Вони застосовуються в автомобільній, тракторній промисловості (картери двигунів, коробки передач, барабани коліс та інші деталі), в електро- та радіотехніці (корпуси приладів, деталі електродвигунів), в оптичній промисловості (корпуси біноклів, фотоапаратів) та в багатьох інших галузях техніки. Основне обмеження в застосуванні магнієвих сплавів – понижена корозійна стійкість у деяких середовищах.

*Властивості титану:* температура плавлення 1672 °С, густина 4500 кг/м<sup>3</sup>, міцність  $\sigma_b=256$  МПа, відносне видовження  $\delta=72$  %, твердість НВ до 1000 МПа.

Розповсюдженість у земній корі 0,57% за масою, четверте місце серед конструкційних матеріалів (після заліза, алюмінію й магнію).

Таблиця 6.4 – Титанові сплави і їх характеристики

Марка сплаву	$\sigma_b$ , МПа	$\sigma_t$ , МПа	$\delta$ , %
1	2	3	4
Деформовні сплави			
BT5	700—950	600—850	—
BT6	1100—1150	1000 1050	—
BT9	1140—1300	1000—1150	—
BT16	1250—1450	1100—1200	—
Ливарні сплави			
BT1	400—600	—	15—23
BT5Л	700—900	—	6—12
1	2	3	4
BT3—1Л	1000—1100	—	4—6
BTЛ1	900—1000	—	5—10
BT21Л	1000—1100	—	4—7

Легкість, висока міцність в інтервалі температур від – 250 °С до помірно високих (300...600 °С), відмінна корозійна стійкість забезпечують титановим сплавам широке застосування в багатьох галузях промисловості. Для виготовлення сплавів титан легують алюмінієм (до 8%), молібденом (до 8%), марганцем (до 2%), хромом (до 11%), оловом (до 5%), ванадієм (до 6%), залізом (до 2%), цирконієм (до 12%), ніобієм (до 2%). Титан легують для покращання механічних властивостей, інколи – для підвищення корозійної стійкості (паладієм до 0,2%). Більшість титанових сплавів піддаються термічній і хіміко-термічній обробці.

Маркуються титанові сплави літерами ВТ і цифрою (порядковий номер), наприклад, ВТ5, ВТ20 та ін.

Деякі титанові сплави мають добрі ливарні властивості і застосовуються для виготовлення фасонних виливків (ВТ5Л, ВТ9Л, ВТ20Л та ін.).

Титанові сплави використовуються в авіації (обшивка літаків, диски й лопаті компресорів тощо), в ракетній техніці (корпуси двигунів, балони для стиснутих і скраплених газів, сопла тощо), в хімічній промисловості (обладнання для таких середовищ як хлор і його розчини, теплообмінників, які працюють в азотній кислоті), суднобудуванні (гребні гвинтів, обшивки морських суден, підводних човнів, торпед), в енергомашинобудуванні (диски й лопаті стаціонарних турбін), в холодильній (криогенній) техніці та інших галузях промисловості.

В табл. 6.4 наведені деякі марки і характеристики титанових сплавів.

### 6.3.5 Композиційні конструкційні матеріали

*Композиційними* називаються матеріали, до складу яких входять різні за властивостями нерозчинні один в одному або малорозчинні компоненти. Це металеві або неметалеві матриці (основи) з певним розподілом у них зміцнювачів (волокон, дисперсних частинок та ін.); при цьому ефективно використовуються індивідуальні властивості складових композицій.

За характером структури композиційні матеріали поділяються на *волокнисті*, зміцнені безперервними волокнами або ниткоподібними кристалами; *дисперснозміцнені* матеріали, одержані шляхом введення в металеву матрицю дисперсних частинок зміцнювачів; шаруваті матеріали, створені шляхом пресування або прокатуванням різнорідних матеріалів.

До композиційних матеріалів відносяться *армовані* різними *наповнювачами* сплави металів і полімери. За формою наповнювача розрізняють композиційні матеріали, армовані частинками 1, волокнами 2 і шарами 3 (рис. 6.1). Матеріали, зміцнені частинками розміром 10 мм, з об'ємною часткою зміцнювальної фази до десятків відсотків, отримують методом *порошкової металургії*. Прикладом вітчизняних дисперсно-зміцнених композиційних матеріалів є матеріали ВДУ-1, ВДУ-2, в яких матрицею є сплав нікелю, а дисперсними зміцнювачами – частинки оксидів торію та гафнію (із вмістом до 5%), які застосовують при температурах 1100-1200 °С.

Для елементів конструкцій літальних апаратів використовуються композиційні матеріали на основі алюмінію, зміцненого частинками А1203 (типу САП). Ці матеріали з'єднуються склепуванням і зварюванням.

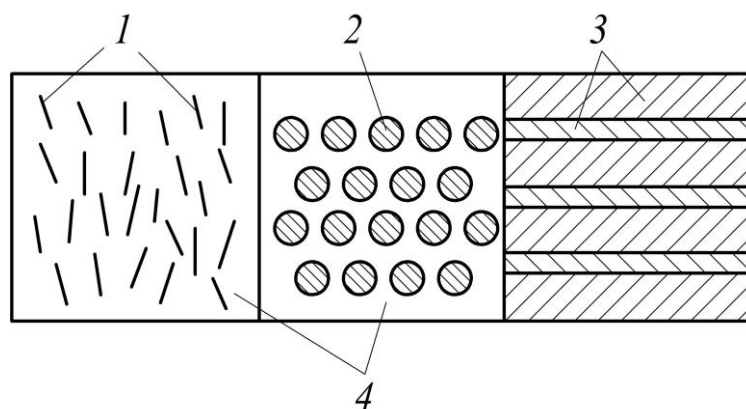


Рисунок 6.1 – Види армування композитних матеріалів

У композиційних матеріалах, армованих волокнами, використовують дріт із сталі, вольфраму, молібдену, титану та інших металів, а також скловолокно, волокна вуглецю, бору, оксиду алюмінію. Металеві композиційні матеріали отримують прокатом або волочінням. Найбільш поширені композиційні матеріали на основі алюмінієвих сплавів, армованих сталевим дротом ( $\sigma_b \leq 1000$  МПа).

Міцність таких композиційних матеріалів підвищується в 3 – 4 рази і в інтервалі температур 20 – 500 °С перевершує за характеристиками міцності і жорсткості алюмінієві сплави.

Сплави на основі магнію армують волокнами бору до 30% ( $\sigma_b=970$  МПа) і ниткоподібними кристалами карбіду кремнію до 10% ( $\sigma_b=400$  МПа). Армування сплавів магнію пов'язане з технологічними труднощами через погану зварюваність і деформованість.

Багатошарові композиційні матеріали складаються з шарів або пластин різних матеріалів, з'єднаних міцнішим зв'язком. Такі матеріали мають підвищену зносостійкість і корозійну стійкість, опір значним ударним навантаженням, хороші теплові та електричні характеристики. Їх використовують, наприклад, в атомній енергетиці для виготовлення ємностей високого тиску, термостатів, а також в інших галузях машинобудування.

Композиційні матеріали на неметалевій основі складаються з армуючої частини (наповнювача) і з'єднувальної частини, як таку використовують термореактивні смоли – епоксидні, кремнійорганічні, формальдегідні, поліамідні і деякі термореактивні. Ці матеріали за питомою міцністю і жорсткістю в кілька разів перевершують традиційні матеріали. Наприклад, довговічність лопатей вертольота з композиційних матеріалів на полімерній основі в кілька разів вища, ніж з металевих матеріалів. Наповнювачем використовуються тонкі волокна скла (склопластик), бору (боропластик), вуглецю (вуглепластик) і волокна органічних матеріалів.

Прообразом композиційних матеріалів є широкоживаний залізобетон, в якому поєднуються властивості бетону, що працює на стискання, і властивості сталльної арматури, яка працює на розтяг.

В сучасних *волокнистих конструкційних матеріалах* використовуються композиції, наведені в таблиці 6.5.

Таблиця 6.5 – Композиції матеріалів

Матриця	Зміцнювач (волокно)
Нікель	Вольфрам, молібден
Титан	Карбід кремнію, борне волокно
Алюміній	Борне волокно, сталний дріт
Магній	Борне волокно
Полімерний скріплювач	Вуглецеве волокно, борне волокно

Сфери застосування композиційних матеріалів численні: крім авіаційно-ракетної, космічної та інших спеціальних галузей техніки вони успішно застосовуються в енергетичному турбобудуванні; в автомобільній промисловості для деталей двигунів і кузовів; в гірничорудній промисловості для бурового інструменту; в хімічній промисловості для автоклавів, цистерн, ємностей для нафтопродуктів; в текстильній промисловості для деталей прядильних машин, ткацьких верстатів; в сільськогосподарському машинобудуванні для різальних частин плугів, дискових жаток, деталей тракторів; в побутовій техніці для деталей пральних машин, велосипедів, деталей радіоапаратури тощо.

### 6.3.6 Порошкові конструкційні матеріали

*Склад технологічного процесу виготовлення порошкових заготовок.*

Група конструкційних матеріалів, які ще називаються *спеченими*, виготовляється методом порошкової металургії, яка є галуззю техніки, що охоплює сукупність способів виготовлення порошків металів, їхніх сплавів і неметалів, виготовлення напівфабрикатів і виробів із цих порошків без розплавлення основного компонента. Технологія порошкової металургії складається з таких операцій:

- виготовлення вихідних металевих порошків;
- змішування окремих порошків для приготування з них шихти (суміші) із заданими хімічним складом і технологічними характеристиками;
- формування суміші (або окремих порошків) у заготовки з певними формою й розмірами. Ця операція здійснюється, головним чином, шляхом

пресування шихти в спеціальних пресформах із загартованої сталі під тиском 200...1000 МН/м (20...100 кГ/см<sup>2</sup>) на швидкохідних автоматичних пресах (до 20 пресувань за одну хвилину) або на вібраційних та віброударних пресах;

- спікання, тобто термічна обробка пресованих заготовок при температурі, нижчі точки плавлення всього металу або його основної частини. Після спікання вироби мають деяку пористість (від кількох до 30...40%, а в окремих випадках і до 60%);

- додаткова обробка спечених виробів із метою зменшення пористості (або навіть повного її усунення), підвищення механічних властивостей і доведення до точних розмірів. Ця операція полягає в холодній або гарячій обробці тиском у точних штампах; інколи застосовують також додаткову термічну, хіміко-термічну або термомеханічну обробку.

В деяких варіантах технології відпадає операція формування суміші в точні заготовки деталей: формують компактні порошкові заготовки в еластичній оболонці з тонкого металевго листа під всебічним тиском рідини в спеціальних установках – гідростатах. Після спікання таких заготовок обробкою тиском у штампах або обробкою різанням виготовляють потрібні деталі.

#### *Характеристика спечених матеріалів*

Розвиток виробництва спечених порошкових матеріалів відбувається у зв'язку з їхніми перевагами порівняно з металевими матеріалами, які виготовляють ливарним методом, а саме:

- можливістю одержання таких матеріалів, які важко або ж узагалі неможливо одержати іншими методами;

- можливістю одержання деяких матеріалів і виробів із вищими техніко-економічними показниками; можливістю економити метал і значно знижувати собівартість продукції;

- при використанні чистих вихідних порошків можна одержувати спечені матеріали з меншим вмістом домішок і з точнішою відповідністю заданому складу, ніж у звичайних литих сплавах;

- спечені матеріали мають однорідніші властивості, ніж литі внаслідок відсутності в них таких недоліків як ліквация (неоднорідність хімічного складу в різних частинах виробу);

- при виготовленні деталей з металевих порошків значно спрощується виробничий цикл і знижується трудомісткість внаслідок зменшення числа операцій і скорочення їх тривалості.

#### *Класифікація спечених матеріалів*

В сучасній техніці спечені матеріали використовуються переважно як:

- *підшипникові (антифрикційні)*, які мають невеликий коефіцієнт тертя й зношування, що збільшує ККД машин;
- *фрикційні (гальмові)* матеріали з високим коефіцієнтом тертя та мінімальним зношуванням, які застосовуються в гальмах і фрикційних передачах;
- *матеріали з високою пористістю* (до 50%) для фільтрів, призначених для тонкої очистки рідин і газів, мінеральних масел, води, рідкого палива тощо. Виготовляють такі пористі матеріали з порошків нікелю, титану, вуглецевої та корозійностійкої сталі;
- *інструментальні матеріали*. Це передусім *тверді сплави* виготовлені на основі карбідів вольфраму, титану, танталу з додаванням кобальту (для зв'язування порошків карбідів) і призначені для виготовлення металорізальних інструментів (різців, фрез, свердел, розверток тощо), інструменту для бурових робіт, штампів та ін;
- *стрічка електродна наплавна*. Виготовляється на основі залізного порошку з домішками порошків легуючих металів, феросплавів, графіту тощо;
- *спечені матеріали* для електро- та радіоелектронної промисловості: контакти на основі пористих заготовок вольфрам-нікелевих сплавів із сріблом і міддю;
- *спечені конструкційні матеріали* для виготовлення деталей машин загального призначення – автомобілів, тракторів, комбайнів, металорізальних верстатів, літаків, побутової техніки тощо. Це матеріали, головним чином, на основі заліза, міді, алюмінію, магнію, титану.

### 6.3.7 Неметалеві конструкційні матеріали

До *неметалевих матеріалів*, які призначені для виготовлення деталей машин, належать пластмаси, спечені матеріали тощо.

**Пластмаси** – високомолекулярні органічні матеріали (полімери), які одержують на основі синтетичних смол. Для надання пластмасам відповідних властивостей до них додають різні наповнювачі, пластифікатори, затверджувачі, барвники.

*Фізико-механічні властивості* пластмас дуже різноманітні. Вони мають гарні тепло- і електроізоляційні властивості, стійкі проти впливу агресивних середовищ, а задовільні характеристики міцності дозволяють використовувати пластмаси для виготовлення деяких деталей машин та приладів. Одні пластмаси використовують як фрикційні матеріали, інші – як антифрикційні. Із пластмас можна виготовляти деталі литтям, холодним або гарячим пресуванням, різного роду формуванням, зварюванням і різанням. Майже не обмежені сировинні ресурси для отримання пластмас.



Через порівняно низьку вартість вони за короткий час знайшли широке застосування як конструкційні матеріали. Однак пластмаси мають істотні *недоліки*: порівняно низьку теплостійкість (100-150 °С), здатність до старіння та вологопоглинання, що погіршує їхні властивості.

Залежно від природи полімерів пластмаси поділяють на *термореактивні* (не допускають повторного формування) і *термопластичні* (під час нагрівання розм'якшуються і допускають повторне формування).

*Термореактивні шаруваті пластмаси* – це текстоліт, азбестотекстоліт, склопласт, скловолокніт, дерев'яно-шаруваті пластики (ДШП). Текстоліт має підвищену міцність, стійкість проти зношування та високі антифрикційні і діелектричні властивості. З нього виготовляють зубчасті колеса, вкладиші до підшипників ковзання, електротехнічних деталей тощо. Так само використовують і ДШП. Азбестотекстоліт має високі фрикційні властивості, достатню теплостійкість і механічну міцність. Цей матеріал використовують для деталей муфт і гальм.

*Термопластичні матеріали* – це амідопласти (поліаміди), фторопласт-4 (тефлон), вініпласт, поліакрилат (органічне скло) та багато інших. *Амідопласти* (різновиди – капрон, нейлон) мають достатню міцність і стійкість проти зношування, низький коефіцієнт тертя, здатність надійно скріплюватись із металом. Із *поліамідів* виготовляють зубчасті колеса, шків, паси. *Фторопласт-4* за хімічною стійкістю переважає всі відомі матеріали, зокрема золото і платину. Оскільки фторопласт-4 має низький коефіцієнт тертя, його застосовують для виготовлення вкладишів підшипників ковзання, які працюють в агресивних середовищах. З *вініпласта* виготовляють труби для подачі агресивних газів та рідин, захисні покриття для металевих резервуарів.



## Механічні передачі

### 7.1 Загальні відомості про механічні передачі. Призначення, класифікація, основні характеристики передач

Більшість сучасних машин, як було зазначено в розділі 4, проектують за такою схемою: двигун – передавальна ланка (механічна передача) – виконавчий механізм. Введення механічної передачі проміжною ланкою між двигуном і виконавчим механізмом машини викликано необхідністю розв’язання ряду задач. Такими є вибір оптимальної швидкості руху, регулювання швидкості руху з його зниженням чи підвищенням, перетворення виду руху обертового в поступальний і навпаки, змінення напрямку руху, змінення обертових моментів і сил руху, передача потужності на значні відстані.

Отже, **механічною передачею** називають механізм, що передає енергію від двигуна до робочого органу машини з перетворенням параметрів руху.

Основне призначення механічних передач – це узгодження параметрів руху робочих органів машини з параметрами руху вала двигуна.

За *принципом дії* механічні передачі поділяються на дві групи: *передачі, що основані на використанні сили тертя* (пасові, фрикційні) і *передачі зачепленням* (зубчасті, черв’ячні, ланцюгові, гвинтові). Ці передачі виконують як з безпосереднім контактом ведучої та веденої ланки, так і за допомогою гнучкої в’язі – паса, ланцюга.

Механічні передачі за *характером змінення швидкості* поділяють на *знижувальні* та *підвищувальні*. Залежно від *розташування валів* у просторі розрізняють передачі з *паралельними, співвісними, перетинними* та *перехресними валами*, а за *характером руху валів* – *прості*, в яких вали обертаються лише навколо своїх осей, а осі їх нерухомі; та *планетарні*, в яких осі та з’єднані з ними деталі (сателіти) рухаються у просторі. За *конструктивним виконанням* передачі можуть бути *відкритими* та *закритими*, тобто розташованими в корпусі, і які постійно змашуються. За *числом ступенів* розрізняють *одно- та багатоступеневі* передачі. Якщо енергія з вхідної на вихідну ланку передається за допомогою кількох паралельно розташованих механізмів, то таку передачу називають *багатопотоочною*.

Механічні передачі також бувають:

- з постійним передаточним числом (**редуктори** (reducer) – передавальні механізми, що понижують частоту обертання ланок від ведучої до веденої із збільшенням обертового моменту; **мультиплікатори** – механізми, що підвищують частоту обертання).

- із змінним передаточним числом: **ступінчасті** – коробки передач та **безступінчасті** – варіатори. *Коробки передач* дозволяють отримати ряд частот обертання вихідного вала, а **варіатори** (variator) – плавно змінюють передаточне відношення.

Останнім часом набуло розвитку нове напрямлення – **мехатроніка**. В ньому силові механічні вузли поєднуються з електричними та електронними пристроями, які забезпечують керування і зв'язок між елементами всієї системи. Електроніка перетворює вхідний сигнал від системи керування, а силова електроніка подає команди на виконавчу ланку: електричну, гідравлічну та ін. Останні перетворюють отримані сигнали в механічний рух. Застосування мехатроніки дозволяє отримати приводи малої маси з високою точністю руху вихідної ланки та великим ККД.

Розглянемо загальні співвідношення між деякими параметрами всіх механічних передач на прикладі зубчастої передачі, що містить ведучу ланку 1 (шестерню) та ведену ланку 2 (зубчасте колесо).

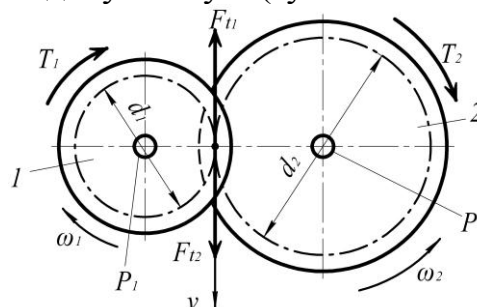


Рисунок 7.1 – Розрахункові параметри механічної передачі

Параметри, що належать до ведучої ланки позначаються індексом 1, а до веденої – індексом 2.

Основний кінематичний параметр механічної передачі – **передаточне відношення**

$$u = \frac{\omega_1}{\omega_2}, \quad (7.1)$$

яке є відношенням кутової швидкості  $\omega_1$  ведучої ланки до кутової швидкості  $\omega_2$  веденої ланки в напрямку поширення потужності. Для багатоступінчастих передач загальне передаточне відношення визначається за формулою:

$$u_{\text{заг}} = \frac{\omega_1}{\omega_n} = u_1 \cdot u_2 \cdot u_3 \cdot \dots \cdot u_n. \quad (7.2)$$

Параметри  $\omega_1$  та  $\omega_2$ , є мінімально необхідними для розрахунку будь-якої механічної передачі.

Енергетичними параметрами механічної передачі є передавані *потужності* на ведучій ланці  $P_1$  і на веденій ланці  $P_2$ , а також *коефіцієнт корисної дії* (ККД)  $\eta$ , що визначається за співвідношенням

$$\eta = \frac{P_2}{P_1}. \quad (7.3)$$

Для багатоступінчастої передачі, що складається з кількох окремих послідовно з'єднаних передач (рис. 7.2) загальний ККД визначається за залежністю

$$\eta = \eta_1 \cdot \eta_2 \cdot \eta_3 \cdot \dots \cdot \eta_n, \quad (7.4)$$

де  $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \dots, \eta_n$  – ККД кожної кінематичної пари, а також інших ланок привода, де мають місце втрати потужностей.

**Обертові моменти**  $T$ , Н·м, на валах передачі через передавані потужності, Вт, та кутові швидкості, рад/с, визначають на ведучому валу

$$T_1 = \frac{P_1}{\omega_1}, \quad (7.5)$$

на веденому валу

$$\dot{\phi}_2 = \frac{P_2}{\omega_2}.$$

Співвідношення між обертовими моментами на валах механічної передачі можна записати у такому вигляді:

$$\frac{T_2}{T_1} = u\eta \quad \text{або} \quad \dot{\phi}_2 = \dot{\phi}_1 u \eta. \quad (7.6)$$

Зв'язок між кутовою швидкістю  $\omega$ , рад/с, та частотою обертання  $n$ , хв<sup>-1</sup>, виражає співвідношення

$$\omega = \frac{\pi n}{30}. \quad (7.7)$$

**Колова швидкість**  $v$  – це лінійна швидкість точок обертової ланки передач, пов'язана з кутовою швидкістю  $\omega$  через діаметр  $d$  співвідношенням

$$v = v_1 = v_2 = \omega_1 \frac{d_1}{2} = \omega_2 \frac{d_2}{2}. \quad (7.8)$$

Колова сила передачі  $F_t$ , Н визначається за залежністю

$$F_t = F_{t1} = F_{t2} = \frac{2T_1}{d_1} = \frac{2T_2}{d_2}. \quad (7.9)$$

Потужність, що витрачається на рух ланки передачі зі швидкістю  $v$  у напрямі, протилежному дії на ланку зовнішньої сили  $F_t$  (див. рис. 7.2) знаходять за формулою

$$P = F_t v. \quad (7.10)$$

Навантаження, які передають механічні передачі, можуть бути постійними або змінними, що необхідно враховувати при їх проектувальних розрахунках.

Для приведення в дію машини чи механізму використовується їх **привод**. На рис. 7.2. подана кінематична схема привода стрічкового конвеєра. Він містить двигун 1, вал якого через пружну муфту 2 з'єднано з швидкохідним валом двоступінчастого конічно-циліндричного редуктора 3. На вихідному кінці тихохідного вала редуктора закріплено ведучий шків клинопасової передачі 4. Ведений шків цієї передачі консольно встановлено на робочому валу привода. Між опорами робочого вала розміщено приводний барабан 5, за допомогою якого здійснюється переміщення стрічки і вантажу.

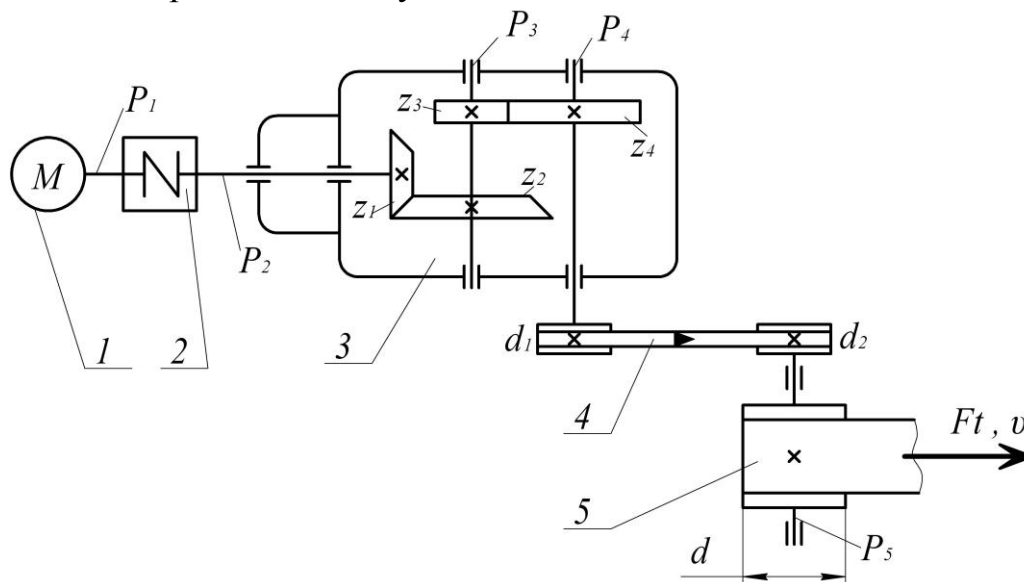


Рисунок 7.2 – Кінематична схема привода:

1 – двигун; 2 – муфта; 3 – конічно-циліндричний редуктор; 4 – клинопасова передача; 5 – приводний барабан

## 7.2 Фрикційні передачі

**Фрикційними** передачами називаємо механізми, в яких рух між ланками передається за рахунок сил тертя.

В найпростішому вигляді фрикційна передача складається з двох котків (роликів), які притиснуті один до одного деякою силою  $Q$  (рис. 7.3, а).

Обертання від одного котка до іншого передається за рахунок сил тертя  $F_s$  між котками, яка досягається їх примусовим притисненням силою  $Q$ . Якщо сила притискання  $Q$  недостатня, то між котками може виникнути проковзування (буксування), що порушує нормальну роботу передачі.

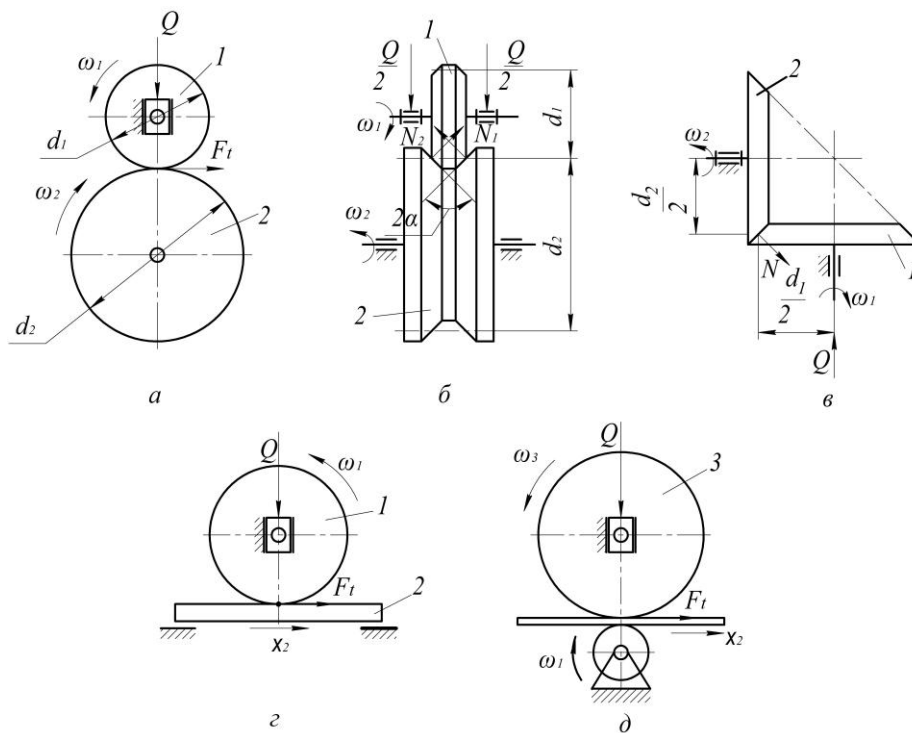


Рисунок 7.3 – Основні види фрикційних передач

За характером руху вхідної та вихідної ланок фрикційні передачі поділяють на передачі для перетворення: обертового руху на обертовий (рис. 7.3, а, в); обертового в поступальний і навпаки (рис. 7.3, г, д).

Фрикційні передачі у порівнянні з іншими механічними передачами мають такі переваги:

- простота та дешевизна виготовлення деталей передачі;
- плавність та безшумність роботи при високих швидкостях;
- можливість створення передач із плавною (безступінчастою) зміною передаточного відношення;
- можливість запобігання поломкам деталей приводного механізму за рахунок проковзування фрикційних котків при перевантаженнях.

До недоліків фрикційних передач належать:

- несталість передаточного відношення через можливе проковзування котків;
- потреба застосування спеціальних натяжних пристроїв;
- високі навантаження на вали та опори валів передач;
- небезпека пошкодження котків при їхньому буксуванні;
- обмежена потужність, яка передається (для циліндричної фрикційної передачі – до 10 кВт);
- порівняно низькі ККД ( для передач звичайного типу  $\eta = 0,8 \dots 0,9$ ).

У фрикційній передачі завжди має місце проковзування, яке впливає на деяке зменшення швидкості вихідного котка до величини  $\omega_2'$  відносно значення  $\omega_2$ . Величина ковзання залежить від конструкції передачі, навантаження, інших факторів і враховується коефіцієнтом ковзання  $\varepsilon$ :

$$\varepsilon = \frac{\omega_2 - \omega_2'}{\omega_2} = \frac{n_2 - n_2'}{n_2}, \quad (7.11)$$

де  $\omega_2$ ,  $\omega_2'$ ,  $n_2$ ,  $n_2'$  – відповідно теоретичні та практичні кутові швидкості та частоти обертання.

З урахуванням ковзання передаточне відношення визначається як

$$u = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{d_2}{d_1(1 - \varepsilon)}. \quad (7.12)$$

Оскільки коефіцієнт ковзання малий ( $\varepsilon \leq 0,03$ ), то у розрахунках силових фрикційних передач можна брати

$$u = \frac{d_2}{d_1}. \quad (7.13)$$

Щоб запобігти буксуванню котків при передаванні зовнішнього навантаження, у фрикційній передачі слід забезпечити умову

$$F_s > F_t, \quad (7.14)$$

де  $F_s$  – сила тертя у контакті котків;

$F_t$  – колова сила на котках.

Враховуючи те, що  $F_s = Qf$  і  $F_t = 2T_1/d_1$ , а також беручи до уваги коефіцієнт запасу зчеплення котків  $k$ , умову (7.14) запишемо у вигляді:

$$Qf = \frac{2T_1 k}{d_1}, \quad (7.15)$$

де  $T_1$  – обертовий момент на ведучому котку передачі;

$d_1$  – діаметр ведучого котка;

$f$  – коефіцієнт тертя ковзання;

$k = 1,3 \dots 1,5$  – коефіцієнт запасу для силових фрикційних передач і  $k = 2,5 \dots 3,0$  – для кінематичних.

Сила натиску  $Q$  передається на опори котків і спричинює їх спрацювання. Тому намагаються отримати необхідну силу  $F$  за меншого натиску. Для цього застосовують клинові фрикційні колеса (рис. 7.3, б). У цих передачах для визначення колового зусилля можна наближено скористатись коефіцієнтом тертя для клинових повзунів  $f' = f/\sin \alpha$ , де  $\alpha$  – кут нахилу бічних поверхонь котка. Тоді колове зусилля

$$F_t \leq F_s, \quad \text{або} \quad F_t \leq \frac{Q \cdot f}{\sin \alpha}. \quad (7.16)$$

При непаралельних валах (але таких, що перетинаються) застосовують конічні фрикційні колеса (рис. 7.3, в). У цих передачах колесо 1 притискається до колеса 2 силою  $Q$ . Розкладаючи силу  $Q$  на два напрямки, дістаємо

$$F_1 = Q / \operatorname{tg} \delta_1; \quad F_2 = Q / \sin \delta_1. \quad (7.17)$$

Тоді колове зусилля:

$$F_t \leq F_s = N \cdot f = \frac{Qf}{\sin \alpha}; \quad \text{або} \quad F_t \leq Q \cdot f, \quad (7.18)$$

де  $N = -F_2$ ;

$f' = f / \sin \alpha$ .

Таким чином, аналіз виразу (7.18), дозволяє зробити висновок, що колове зусилля у конічних фрикційних передачах визначають за формулою для клинових фрикційних коліс.

Для забезпечення плавної (безступінчастої) зміни кутової швидкості вихідної ланки при сталій швидкості вхідної, застосовують передачі, що носять назву *варіатори швидкості*, або просто *варіатори*. Широке розповсюдження отримали варіатори у металорізальних верстатах, ковальсько-пресовому обладнанні, машинах текстильної, паперової, хімічної, харчової, сільськогосподарської промисловості, на транспорті, у механізмах приладів тощо. На рис. 7.4 показано деякі схеми фрикційних варіаторів: лобові (а); конусні (б); дискові (в); клинопасові з розсувними конусами (г).

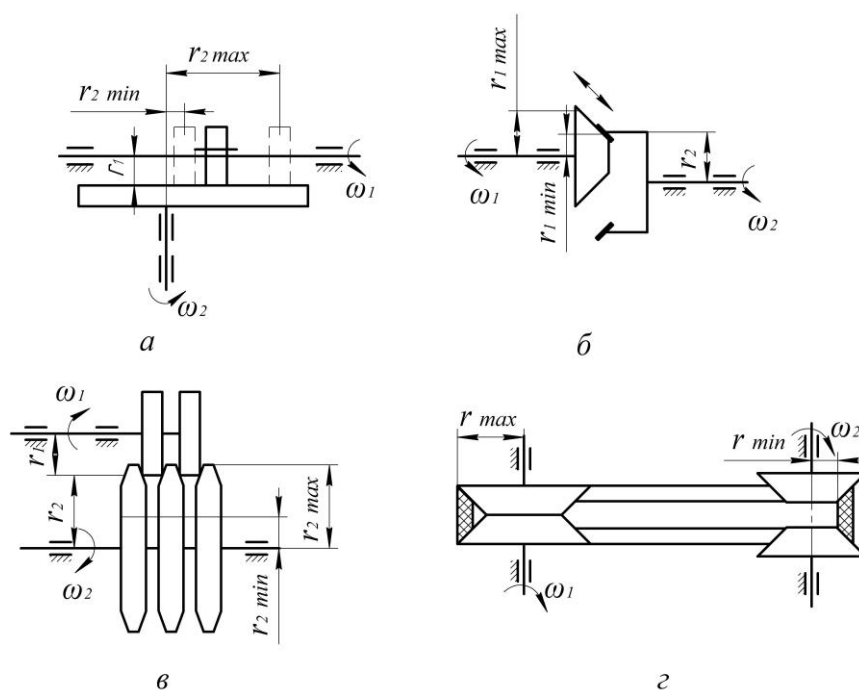


Рисунок 7.4 – Схеми варіаторів



У перших трьох варіаторах відсутня проміжна ланка, а в останньому такою є клиновий пас.

Основною регульованою характеристикою варіатора є його діапазон регулювання  $D$  – це відношення максимальної кутової швидкості  $\omega_{2max}$  веденого вала до його мінімальної швидкості  $\omega_{2min}$  при постійній швидкості обертання  $\omega_1$  ведучого вала:

$$D = \frac{\omega_{2min}}{\omega_{2max}}. \quad (7.19)$$

Враховуючи те, що  $\omega_{2max} = \omega_1 / u_{min}$  та  $\omega_{2min} = \omega_1 / u_{max}$ , діапазони регулювання варіатора можна подати і через максимальне і мінімальне його передаточне відношення:

$$D = \frac{u_{max}}{u_{min}} \quad (7.20)$$

Максимальне і мінімальне передаточні відношення через геометричні характеристики визначаються співвідношеннями:

$$\omega_{2max} = \frac{r_{2max}}{r_1}; \quad u_{min} = \frac{r_{2min}}{r_1}, \quad (7.21)$$

а тому вираз (7.20) можна подати в такому вигляді:

$$D = \frac{u_{max}}{u_{min}} = \frac{r_{2max}}{r_{2min}}.$$

Лобові варіатори забезпечують діапазон регулювання  $D = 2 \dots 4$ , конусні  $D = \frac{r_{1max}}{r_{1min}} < 3$ , дискові  $D = \frac{r_{2max}}{r_{2min}} \leq 2$ , клинопасові  $D = \left( \frac{r_{1max}}{r_{1min}} \right)^2 \leq 10$ .

### 7.3 Пасові передачі

Звичайна пасова передача складається з ведучого 1 і веденого 2 шківів, які об'єднані пасом 3, що надітий на шківів з попереднім натягом (рис. 7.5).

Гнучкою ланкою може бути нескінченний (замкнутий) пас, стрічка, канат або нитка.

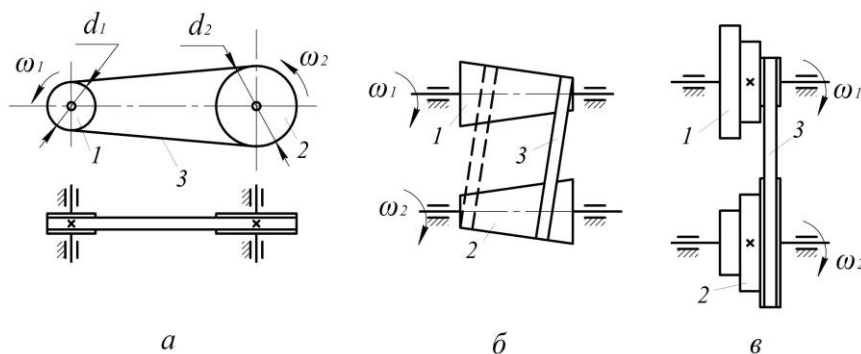


Рисунок 7.5 – Схеми пасових передач

Найбільше поширення в машинах та приладах отримали пасові передачі зі сталим передаточним відношенням (рис. 7.5, а), менше – з регульованим безступінчасто (рис. 7.5, б), або ступінчасто (рис. 7.5, в) передаточними відношеннями.

Обертання ведучого шківів передається до веденого завдяки тертю, що виникає між приводним пасом і шківом або зачепленням (зубчастопасова передача).

*Перевагами пасових передач є:* можливість здійснення передачі між валами, розташованими на значній відстані; плавність і безшумність роботи, захист від перевантажень, пов'язаний зі здатністю паса передати лише певне навантаження, перевищивши яке відбувається буксування (проковзування) паса по шківі; невелика вартість і легкість догляду за передачею.

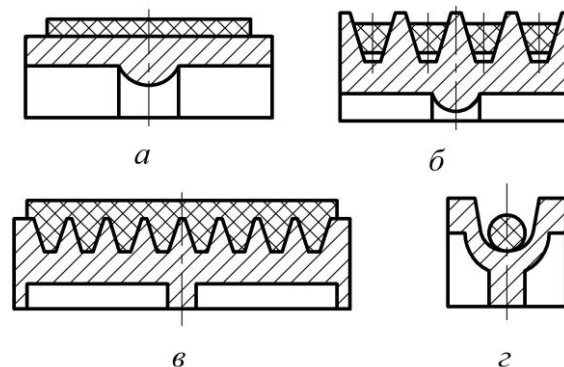


Рисунок 7.6 – Види пасових передач

*До недоліків слід віднести:* великі габаритні розміри; непостійність передаточного відношення передачі через проковзування паса; підвищені сили тиску на валах та підшипниках, оскільки сумарний натяг віток паса значно більший колової сили передачі; мала довговічність пасів і необхідність запобігання попаданню мастила на паси; необхідність пристроїв для натягу пасів.

У більшості випадків пасові передачі застосовують для передачі потужностей 0,3...50 кВт: для плоскопасової передачі ККД = 0,96, а для клинопасової – ККД = 0,95.

За формою поперечного перерізу приводні паси передач тертям поділяються на плоскі (рис. 7,6, а), клинові (рис. 7,6, б), поліклинові (рис. 7,6, в), круглі (рис. 7,6, г) тощо.

Відповідно за формою поперечного перерізу паса розрізняють *плоскопасові, клинопасові, поліклинові і круглорасові* передачі.

*Матеріали і конструкція пасів.* Приводний пас повинен мати певну тягову здатність (здатність передавати задане навантаження без буксування) і необхідну довговічність. Тягова здатність паса забезпечується надійним зчепленням його зі шківом, що визначається

високим коефіцієнтом тертя між ними. Довговічність паса залежить від напружень згину, які виникають у ньому, і частоти циклів навантаження. За матеріалом і конструкцією розрізняють кілька типів пасів.

*Плоскі паси.* До стандартних плоских пасів відносяться: гумотканинні, шкіряні, бавовняні суцільноткані та із синтетичних матеріалів. Кінці плоских пасів можна з'єднувати (зшиванням, склеюванням, металевими скріпками), а в швидкохідних передачах використовуються безшовні (нескінченні).

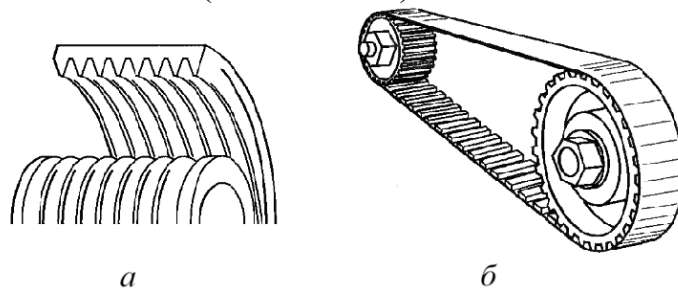


Рисунок 7.7 – Конструкції поліклинових та зубчастих пасів

*Клинові паси.* Їх виготовляють двох типів: кордтканинні та кордшнурові. Вони бувають: нормального перерізу, вузькі і широкі для варіаторів. Паси нормального перерізу використовуються, в основному, у загальному машинобудуванні. Відповідно до державних стандартів ці паси виготовляють семи різних за розмірами перерізів: О, А, Б, В, Г, Д і Е. Допускається максимальна швидкість для профілів О, А, Б, В до 25 м/с, для Г, Д і Е до 30 м/с. Перерізи пасів збільшуються від О до Е. Клинові паси отримали найбільш широке застосування у промисловості.

*Поліклинові паси.* За конструкцією вони подібні клиновим і мають клинові виступи на внутрішній стороні паса. У тонкій плоскій їх частині (рис. 7,6 і рис. 7,7, а) розміщуються високоміцний кордшнур з віскози, скловолокна або лавсану і кілька діагонально розташованих шарів гуми чи гумотканини, що надає пасу велику поперечну жорсткість. Поліклинові передачі – найбільш компактні з усіх пасових передач і можуть працювати зі швидкістю  $v < 40$  м/с.

*Зубчасті паси* (рис. 7,7, б). Вони поєднують переваги плоских пасів і зубчастих зачеплень. На робочій поверхні пасів роблять виступи (зубці), які входять у зачеплення з виступами (зубцями) на шківках. Зубчасті паси встановлюють без попереднього натягу. Вони працюють безшумно, без проковзування і мають постійне передаточне відношення. У порівнянні зі звичайною пасовою передачею тертям зубчатопасова значно компактніша і має більш високий ККД.

*Матеріали і конструкція шківів.* Шків пасових передач виготовляють з чавуну, сталі, легких сплавів, пластмас і дерева. Зовнішня частина шківки, на якій встановлюють пас (паси), називається ободом, а

центральна частина, яка насаджується на вал, називається *маточиною*. Обід з маточиною з'єднується диском або спицями.

*Кінематика, геометрія і сили тертя в пасових передачах.* Схема навантаження паса наведена на рис. 7.8, де  $d_1, d_2$  – діаметри ведучого та веденого шківів;  $a = 0,5(d_1 + d_2)$  – міжосьова відстань;  $\alpha_1 = \alpha_{1c} + \alpha_{1k}$  – дуга обхвату пасом меншого шківів;  $\alpha_2 = \alpha_{2c} + \alpha_{2k}$  – дуга обхвату більшого шківів;  $\alpha_{1c}, \alpha_{2c}$  – дуга спокою, відповідно, на ведучому та веденому шківів;  $\alpha_{1k}, \alpha_{2k}$  – дуга ковзання на ведучому та веденому шківів;  $\gamma$  – кут між вітками передачі.

Передача обертового моменту від ведучого шківів до веденого здійснюється за рахунок сил тертя між шківів та пасом при натягуванні останнього.

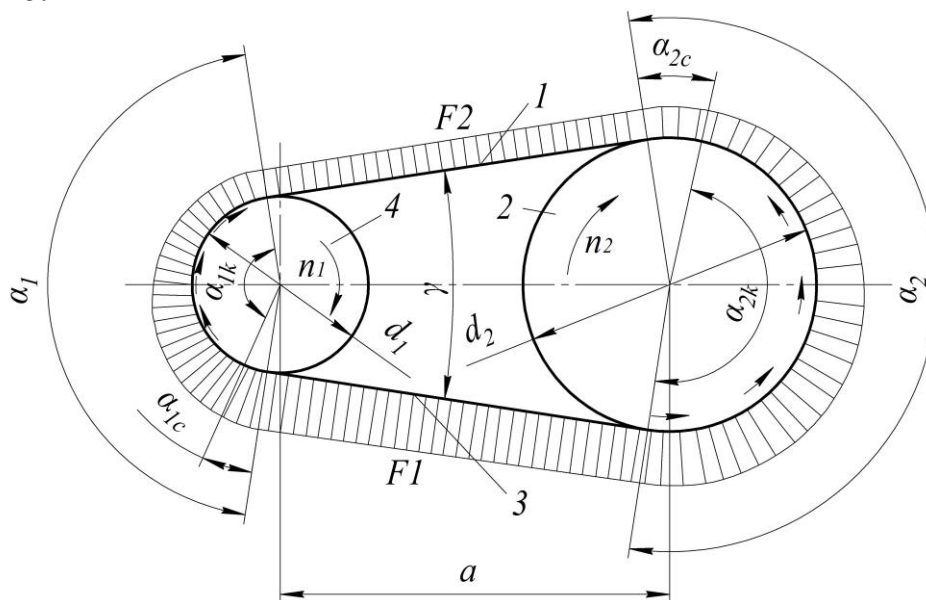


Рисунок 7.8 – Схема навантаження паса

Під час набігання паса на шків він на деякій дузі  $\alpha_{1c}(\alpha_{2c})$  рухається одночасно із шківом, а потім на ведучому шківів за рахунок скорочування довжини починає відставати від нього, а на веденому навпаки, пас розтягується і випереджає ведений шків. Таким чином на дугах  $\alpha_{1k}$  та  $\alpha_{2k}$  (дуги ковзання) пас проковзує поверхнею шківів і передає обертовий момент, за рахунок чого відбувається передача руху з ведучого на ведений шків.

*Колові швидкості* (м/с) ведучого  $v_1$  і веденого  $v_2$  шківів визначають за формулою:

$$v_i = \pi n_i d_i / 60 \cdot 10^3, \quad (7.22)$$

де  $d_i$  – діаметр  $i$ -го шківів, мм;

$n_i$  – частота обертання відповідного шківів, об/хв.

Внаслідок пружного ковзання паса на шківів на ведучому шківі колова швидкість більша колової швидкості на веденому  $v_2$ :

$$v_2 = (1 - \varepsilon)v_1, \quad (7.23)$$

де  $\varepsilon$  – коефіцієнт пружного ковзання, значення якого знаходиться в межах  $\varepsilon = 0,01 \dots 0,02$  і збільшується з ростом навантаження.

Передаточне відношення пасової передачі з урахуванням проковзування визначається таким чином:

$$u = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{d_2}{d_1(1 - \varepsilon)}. \quad (7.24)$$

Зазвичай передаточне відношення пасової передачі вибирають в межах  $2 \dots 4$ , а максимальне  $u < 8$ .

Діаметр меншого шківів плоскопасової передачі

$$d_1 = (1100 \dots 1300) \sqrt[3]{P_1 / n_1}, \quad (7.25)$$

де  $P_1$  – потужність, кВт;

$n_1$  – частота обертання ведучого шківів, об/хв.

Діаметр  $d_2$  більшого шківів як для плоскопасової, так і для клинопасової передачі

$$d_2 = u d_1 (1 - \varepsilon). \quad (7.26)$$

Кут обхвату пасом меншого шківів:

$$\alpha_1 = 180^\circ - 57^\circ (d_2 - d_1) / a, \quad (7.27)$$

де  $a$  – міжосьова відстань передачі, мм.

Рекомендують приймати для плоскопасової передачі  $\alpha_1 \geq 150^\circ$  і для клинопасової  $\alpha_1 \geq 120^\circ$ . Зі зменшенням  $\alpha_1$  зменшується зчеплення шківів з пасом. Міжосьова відстань пасової передачі  $a$  визначається конструкцією машини або її привода. Для плоскопасової передачі рекомендується

$$a_{min} = (1,5 \dots 2)(d_1 + d_2), \quad (7.28)$$

а для клинопасової

$$a_{min} = 0,55(d_1 + d_2) + h, \quad (7.29)$$

де  $h$  – висота паса.

Довжина пасів передачі визначається за виразом

$$L = 2a + 0,5\pi (d_1 + d_2) + (d_2 - d_1)^2 / (4a). \quad (7.30)$$

Обчислене значення  $L$  погоджують зі стандартним для пасів.

Колова сила на шківів визначається переданим навантаженням  $F_t$ , Н:

$$F_t = \frac{2 \cdot 10^3 T_i}{d_i}, \quad (7.31)$$

де  $T_i$  – розрахунковий обертовий момент, Н·м;

$d_i$  – діаметр шківів, мм.

Колова сила дорівнює різниці натягів віток паса:

$$F_t = F_1 - F_2. \quad (7.32)$$

Для нормальної роботи передачі необхідно забезпечити силу попереднього натягу паса

$$F_0 = A \sigma_0,$$

де  $A$  – площа поперечного перерізу паса;

$\sigma_0$  – нормальне напруження від попереднього натягу паса.

Із зростанням  $F_0$  навантажувальна здатність передачі збільшується.

Попереднє напруження у пасі приймають для плоских стандартних пасів  $\sigma_0 = 2$  МПа; для клинових стандартних пасів  $\sigma_0 = 1,2 \dots 1,5$  МПа; для поліамідних пасів  $\sigma_0 = 3 \dots 4$  МПа.

Сума натягів ведучої  $F_1$  і веденої  $F_2$  віток паса дорівнює:

$$F_1 + F_2 = 2F_0. \quad (7.33)$$

Із системи двох рівнянь (7.32) і (7.33) отримуємо вирази:

$$F_1 = F_0 + 0,5F_t; \quad F_2 = F_0 - 0,5F_t \quad (7.34)$$

або

$$F_1 = \frac{q}{q-1} F_t; \quad F_2 = \frac{1}{q-1} F_t, \quad \text{де } \frac{F_1}{F_2} = q.$$

Співвідношення (7.34) встановлюють залежність зміни сил натягу ведучої та веденої віток від  $F_t$ , але не визначають тягової здатності передачі, яка пов'язана із силою тертя між шківом та пасом. Цей зв'язок при максимальному значенні  $F_t$  визначається за формулою Ейлера:

$$F_1 / F_2 = e^{f' \alpha_{ik}} = q, \quad (7.35)$$

де  $f'$  – зведений коефіцієнт тертя ковзання.

Для клинопасової передачі

$$f' = \frac{f}{\sin(\varphi/2)}, \quad (7.36)$$

де  $\varphi = 40^\circ$  – кут клинового профілю паса;

$f$  – коефіцієнт тертя між пасом і шківом.

Із співвідношення (7.36) отримуємо

$$f' = 3f. \quad (7.37)$$

Тобто, тягова здатність клинкової передачі в 3 рази вища плоскостасової.

Найбільші напруження виникають у ведучій вітці паса. Нормальне напруження у пасі від дії сили

$$\sigma_i = F_i / A. \quad (7.38)$$

де  $i = 1, 2$  – відповідні вітки паса.

Напруження у пасі від згину на дузі обхвату шківа:

$$\sigma_{\zeta\bar{a}} = E\delta / d_1, \quad (7.39)$$

де  $E = 200 \dots 600$  МПа;  $\delta$  – товщина паса.

Напруга від відцентрової сили

$$\sigma_{\bar{a}} = \rho v^2. \quad (7.40)$$

Максимальне напруження буде у ведучій вітці паса

$$\sigma_{\max} = \sigma_1 + \sigma_{\zeta\bar{a}} + \sigma_{\bar{a}} \quad (7.41)$$

Сила навантаження  $F_e$  на вали та опори, створювана натягом пасів:

$$F_{\bar{a}} = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1 \cdot F_2 \cos \gamma} \approx 2F_0 \cdot \sin(\alpha/2). \quad (7.42)$$

## 7.4 Зубчасті передачі

Найбільш поширеними механічними передачами в сучасному приладо- та машинобудуванні є зубчасті передачі. Їх застосовують як в найпотужніших машинах з розміром коліс до 10 м, так і механізмах точних приладів, де розміри зубчастих коліс вимірюються кількома міліметрами. Зубчасті передачі здатні працювати при зовсім малих колових швидкостях, а також понад 150 м/с і більше.

**Зубчастою передачею** називають триланковий механізм, у якому дві рухомі ланки утворюють з нерухомою обертові чи обертову і поступальну пару, а між собою – вищу пару. Зубці коліс входять у зачеплення між собою і завдяки їхній взаємодії забезпечують передавання обертового руху від одного колеса до другого, менше з яких називають **шестернею** (gear), а більше – **колесом** (wheel). В передачі, що перетворює обертовий рух у поступальний, обертовою ланкою є зубчасте колесо, а поступальною – **рейка**.

Зубчасті передачі мають високий ККД ( $\eta = 0,94 \dots 0,99$ ), легко компонуються в окремі агрегати, що використовуються в різних типах виробництв, забезпечують достатній діапазон передаточних чисел ( $u \leq 20$ ).

Зубчасті передачі у порівнянні з іншими механічними передачами мають такі *переваги*:

- сталість передаточного числа;
- високу надійність та довговічність роботи;
- великий діапазон навантажень та компактність конструкції;
- незначні навантаження на вали передачі та їх опори.

*Недоліками* зубчастих передач є:

- порівняно високі вимоги до точності виготовлення та монтажу;
- шум при роботі з високими швидкостями;
- потреба у постійному змащуванні;
- неможливість безступеневої зміни передаточного числа.

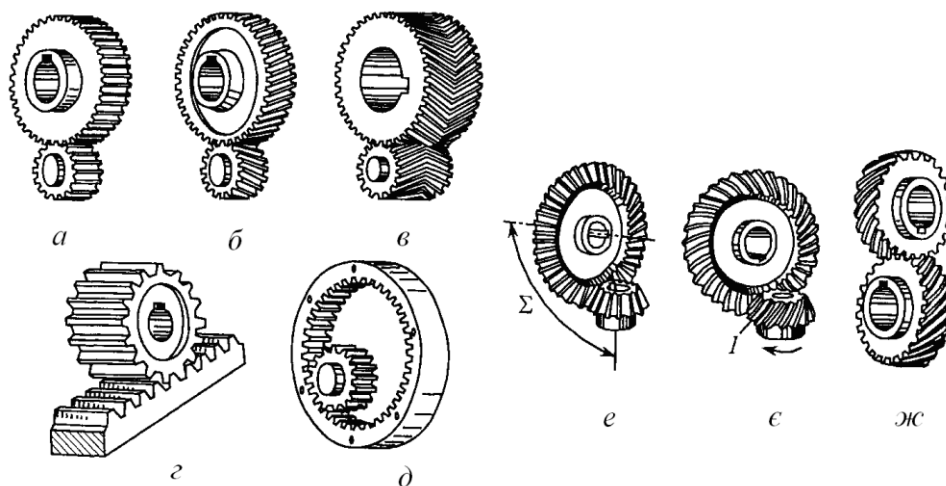


Рисунок 7.9 – Зубчасті передачі

Зубчасті передачі та колеса *класифікують* за цілим рядом ознак.

За *формою профілю зубців* розрізняють евольвентні зубчасті передачі, що мають переважне поширення, та неевольвентні передачі, наприклад, з круговим профілем (зачеплення Новікова), циклоїдальним профілем.

За *взаємним розміщенням осі валів* зубчасті передачі бувають:

- із паралельними осями валів – циліндричні передачі зовнішнього (рис. 7.9, а, б, в) та внутрішнього (рис. 7.9, д) зачеплення, передачі типу зубчасте колесо – рейка (рис. 7.9, г);
- із валами, осі яких перетинаються – конічні зубчасті передачі (рис. 7.9, е, є);
- із мимобіжними у просторі осями валів – гвинтові зубчасті передачі (рис. 7.9, ж).



За розміщенням на ободі та формою зубців розрізняють передачі та колеса прямозубі (див. рис. 7.9, а, з, д), шевронні (див. рис. 7.9, в), та з круговими зубцями (рис. 7.9, є).

За конструктивним рішенням зубчасті колеса бувають закриті (розміщені в спеціальному корпусі з постійним змащенням) і відкриті (працюють без мастила або змащуються періодично).

За коловою швидкістю зубчастих коліс передачі поділяють на тихо – ( $v \leq 3$  м/с), середньо – ( $v = 3 \dots 15$  м/с) та швидкохідні ( $v > 15$  м/с).

Основною кінематичною умовою для профілів зубців зубчастих коліс є умова сталості миттєвого передаточного числа. Багато кривих, за допомогою яких можна окреслити профілі зубців, задовольняють цю умову. Однак найпростішим щодо виготовлення зубців, забезпечення високого ККД передачі, достатньої міцності, є евольвентний профіль.

Евольвентне зачеплення, ідея якого належить Л. Ейлеру, має істотні технологічні та експлуатаційні переваги.

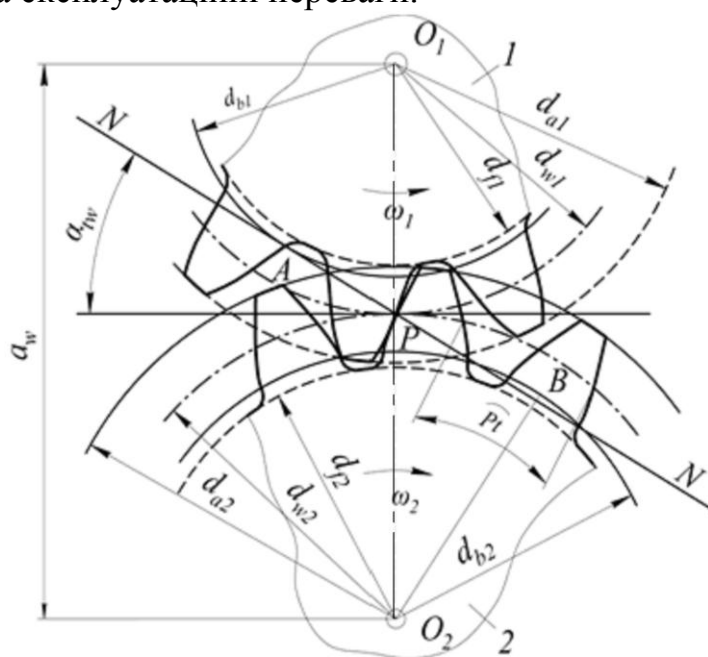


Рисунок 7.10 – Параметри зубчастої передачі

На (рис. 7.10) зображено зачеплення зубців з евольвентним профілем двох зубчастих коліс. При перекочуванні прямої  $NN$  без ковзання по колу діаметром  $d_{b1}$ , точка  $P$ , що належить прямій  $NN$ , описує евольвенту, яка є профілем зубця колеса 1, а при перекочуванні прямої  $NN$  по колу діаметром  $d_{b2}$  точка  $P$  описує евольвенту, яка є профілем зубця колеса 2. Пряма  $NN$  називається *твірною*, а кола діаметрами  $d_{b1}$  та  $d_{b2}$  ще мають назву *основні*. Точка  $P$  перетину спільної твірної прямої  $NN$  із лінією центрів  $O_1O_2$  зубчастих коліс називається *полюсом* зачеплення. Пряма  $NN$  є

спільною нормаллю у точці  $P$  до евольвент профілів зубців коліс 1 і 2, а її відрізки  $AP$  і  $BP$  є радіусами кривини профілів зубців у точці  $P$  їх дотику.

---

Механічні передачі

При обертанні зубчастих коліс 1 і 2 точка дотику профілів зубців знаходиться на лінії  $NN$ , тобто спільна нормаль до профілів зубців займає постійне положення. Згідно *основною теоремою зачеплення* (теоремою Віліса), активні профілі зубців двох коліс повинні бути побудовані так, щоб нормаль у точці їх дотику в будь-який момент зачеплення проходила через полюс зачеплення  $P$ , що ділить лінію центрів у відношенні, обернено пропорційному передаточному відношенню.

Таким чином, евольвентне зачеплення повністю відповідає основній теоремі зачеплення, оскільки точка  $P$  займає постійне положення на лінії центрів  $O_1O_2$ . Згідно з теоремою зачеплення, записуємо співвідношення:

$$\frac{PO_2}{PO_1} = \frac{d_{\omega_2}}{d_{\omega_1}} = u = \frac{\omega_1}{\omega_2}. \quad (7.43)$$

За виразом (7.19) колові швидкості зубчастих коліс рівні, тобто  $\omega_1 d_{w1} = \omega_2 d_{w2}$ , а це свідчить про те, що при обертанні зубчастих коліс кола діаметром  $d_{w1}$  і  $d_{w2}$  перекочуються одне по одному без ковзання. Ці колеса дістали назву *початкові*, а відповідні їм поверхні – *циліндричні* у циліндричній та конічній у конічній передачах, – *початковими циліндрами та початковими конусами*.

Діаметри цих кіл  $d_{w1}$  і  $d_{w2}$  називаються *початковими діаметрами* зубчастих коліс.

Діаметр основного кола  $d_b$  – це єдиний параметр, що визначає форму евольвенти, оскільки кожному окремому діаметру відповідає своя евольвента.

Збільшення діаметра  $d_{b1}$  до нескінченності перетворює зубчасте колесо у зубчасту рейку з прямими зубцями.

З наведеного витікає, що твірна  $NN$  є геометричним місцем точок контакту спряжених зубців при обертанні зубчастих коліс і тому ще називається *лінією зачеплення*.

Відстань між осями обертання двох зубчастих коліс, що перебувають у зачепленні, називають *міжосьовою відстанню*.

Кут  $\alpha_{tw}$ , що утворений лінією зачеплення та прямою, перпендикулярною до міжосьової лінії, називається *кутом зачеплення*.

Розміри зубчастих коліс зручно задавати в частках певної лінійної величини, що пов'язано із зубцем. Такою величиною вибрано *модуль  $m$*  зубчастого колеса, який є відношенням колового кроку  $p_t$  до числа  $\pi$ . Отже:

$$m = \frac{p_t}{\pi}. \quad (7.44)$$

*Коловим кроком зубців* називають відстань між однойменними точками профілю двох сусідніх зубців, виміряних по будь-якому колу. Коловий крок  
Механічні передачі

$$p_t = \frac{\pi d}{z}, \quad (7.45)$$

де  $d$  – діаметр кола, на якому виміряний крок;  
 $z$  – число зубців колеса.

Модуль  $m$  для одного й того самого колеса, так само як і крок  $p_t$ , залежить від діаметра кола, до якого він належить. Коло, для якого знаходять стандартне значення модуля, називають *ділильним*.

Враховуючи співвідношення (7.44), з виразу (7.45) отримаємо:

$$d = mz. \quad (7.46)$$

Тому можна сказати, що *ділильним* називається коло, діаметр якого визначають добутком модуля на число зубців зубчастого колеса. Діаметри ділильних кіл позначають  $d_1$  і  $d_2$  і називають *ділильними діаметрами* зубчастих кіл. На рис. 7.10 ділильні та початкові кола збігаються.

Зубці за висотою обмежені поверхнею вершин зубців та поверхнею впадин. Концентричні кола, що належать поверхням вершин та западин, називаються *колом вершин зубців* і *колом западин*, відповідно. Діаметри кіл вершин зубців  $d_{a1}$  і  $d_{a2}$  називають *діаметрами вершин зубців*. Відповідно діаметри кіл западин, що позначаються  $d_{f1}$  і  $d_{f2}$ , називаються *діаметрами западин*.

Для косих та криволінійних зубців (рис. 7.11), крім колового кроку  $p_t$ , розрізняють *нормальний крок зубців*  $p_n$ , який є найкоротшою відстанню по нормалі до теоретичної лінії зубців, та *осьовий крок*  $p_x$ , виміряний у площині, паралельній площині зубчастого колеса.

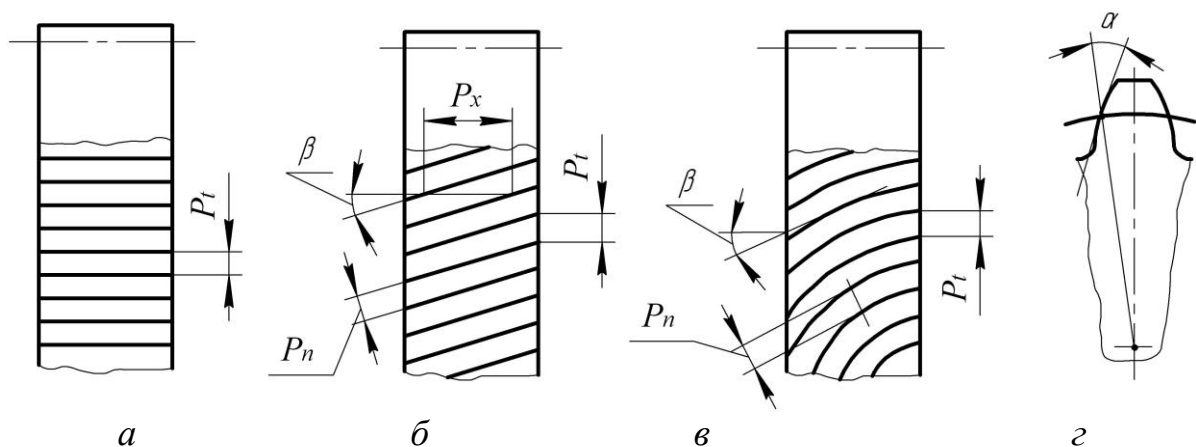


Рисунок 7.11 – Форма та розміщення зубців зубчастих коліс

*Кутовим кроком зубців*  $\tau$  називають центральний кут концентричного кола зубчастого колеса, який дорівнює:

$$\tau = \frac{2\pi}{z}, \quad (7.47)$$

де  $z$  – число зубців зубчастого колеса.

#### Механічні передачі

---

Кут між лінією зубця та лінією перетину співвісної поверхні, якій належить ця лінія зубця, з площиною, що проходить через вісь зубчастого колеса, називається *кутом нахилу лінії зубця* або *кутом нахилу зубця*. Кут нахилу зубця позначається  $\beta$  (рис. 7.11).

Із рис. 7.11 легко одержати значення торцевого і осьового кроків зубців залежно від нормального:

$$p_t = \frac{p_n}{\cos \beta} = \pi \frac{m_n}{\cos \beta} = \pi m_t, \quad (7.48)$$

$$p_x = \frac{p_n}{\sin \beta} = \pi \frac{m_n}{\sin \beta} = \pi m_x, \quad (7.49)$$

де  $m_t$  і  $m_x$  – відповідно *торцеві* і *осьові модулі*, які визначаються формулами:

$$m_t = \frac{m}{\cos \beta}; \quad m_x = \frac{m}{\sin \beta}. \quad (7.50)$$

Плавність роботи зубчастої передачі характеризується *повним коефіцієнтом перекриття*, під яким розуміють відношення кута перекриття  $\varphi_\gamma$  до кутового кроку  $\tau$ , тобто:

$$\varepsilon_\gamma = \frac{\varphi_\gamma}{\tau}. \quad (7.51)$$

*Кутом перекриття*  $\varphi_\gamma$  називають кут повороту зубчастого колеса від положення входу зуба у зачеплення до його виходу із зачеплення.

Коефіцієнт перекриття показує число пар зубців, що перебувають одночасно у зачепленні. Наприклад, якщо  $\varepsilon_\gamma = 1,58$ , то це означає, що зачеплені між собою одночасно одна або дві пари зубців, причому дві пари ( $\varepsilon_\gamma > 1$ ) – 58% часу, одна пара – 42%.

Коефіцієнт перекриття повинен бути більшим від одиниці, інакше порушується плавність роботи передачі (співудари зубців, контакт кромками вершин). Чим вищий коефіцієнт перекриття, тим плавніше працює зубчаста передача, тим більша її несуча здатність. Тому у швидкохідних та високонавантажених передачах замість прямозубих використовують косозубі, шевронні колеса або колеса з криволінійними зубцями, які забезпечують більші коефіцієнти перекриття. Для компенсації можливих неточностей монтажу та спрацювання зубців коефіцієнт перекриття рекомендується вибирати за умови  $\varepsilon_\gamma \geq 1,2$ .

До параметрів евольвентного зачеплення належить також кут профілю зубця. Гострий кут у поперечному перерізі зубця між дотичною до профілю називається *кутом профілю зубця* (рис. 5.8). Необхідно розрізняти ділильний  $\alpha$ , початковий  $\alpha_w$  та інші кути профілю зубця, які

відповідають точкам на ділильній, початковій та інших співвісних циліндричних поверхнях. Кути профілю зубця  $\alpha_w$  і зачеплення  $\alpha_{tw}$  рівні між собою за умови збігання початкового та ділильного кола.

#### Механічні передачі

Довжина ділильного кола зубчастого колеса:

$$\pi d = z p_t = \frac{z p_n}{\cos \beta}. \quad (7.52)$$

Тоді, з врахуванням співвідношення (7.48), з виразу (7.52) визначимо ділильний діаметр косозубого колеса:

$$d = \frac{m_n z}{\cos \beta}. \quad (7.53)$$

Якщо ділильні та початкові кола збігаються, то міжосьова відстань зубчастої передачі визначиться за формулою:

$$a_w = 0,5(d_1 + d_2) = 0,5 m_n (z_1 + z_2) / \cos \beta. \quad (7.54)$$

Коли передача виконується із зміщенням зубчастих коліс, тобто початкове і ділильні кола не збігаються, міжосьова відстань  $a_w$  відрізняється від ділильної міжосьової відстані  $a$ , і діаметри ділильних кіл залишаються такими самими, а діаметри початкових кіл змінюються пропорційно зміні  $a_w$ . Тоді

$$d_{\omega 1} = \frac{2a_w}{(u+1)}; \quad d_{\omega 2} = \frac{2a_w \cdot u}{(u+1)}, \quad (7.55)$$

де  $u$  – передаточне число зубчастої передачі, яке може бути визначене із співвідношення:

$$u = \frac{z_2}{z_1}, \quad (7.56)$$

де  $z_1, z_2$  – кількість зубців шестерні і зубчастого колеса, відповідно.

## 7.5 Приклади розрахунків

**Задача 7.1.** Для клинопасової передачі з потужністю  $P_1 = 8$  кВт, передаточним числом  $u = 2$ , кутовою швидкістю  $\omega = 50 \text{ с}^{-1}$ , діаметром ведучого шківів  $d_1 = 100$  мм, кутом обхвату пасом ведучого шківів  $\alpha_l = 170^\circ$ , коефіцієнтом тертя ковзання між шківом та пасом  $f = 0,3$ , кутом профілю клина паса  $\varphi = 40^\circ$ , коефіцієнтом ковзання  $\varepsilon = 0,02$ , ККД передачі  $\eta_{кл.п.} = 0,96$ , ККД пари підшипників  $\eta_{п.п.} = 0,99$  визначити: сили натягу в вітках паса  $F_1, F_2$ , колову силу на ведучому шківі  $F_{t1}$ , силу, що діє на опори вала  $F_b$ , діаметр веденого шківів  $d_2$ , потужність на веденому валу  $P_2$ .

### Розв'язання

Діаметр веденого шківів

$$d_2 = d_1 \cdot u(1 - \varepsilon) = 100 \cdot 2(1 - 0,02) = 196 \text{ мм.}$$

Визначаємо обертовий момент на ведучому шківі

$$T_1 = \frac{P_1}{\omega_1} = \frac{8 \cdot 10^3}{50} = 160 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

та колову силу

Механічні передачі

$$F_{t1} = \frac{2T_1}{d_1} = \frac{2 \cdot 160}{100 \cdot 10^{-3}} = 3,2 \cdot 10^3 \text{ Н}.$$

За формулою Ейлера отримаємо співвідношення

$$F_1 / F_2 = e^{f' \alpha_1} = e^{0,329 \cdot 2,96} = 2,65,$$

$$\text{де } f' = f / \sin \frac{\phi}{2} = 0,3 / \sin 20^\circ = 0,329;$$

$$\alpha = \frac{\pi \cdot 170^\circ}{180} = 2,96 \text{ рад},$$

звідки

$$F_1 = 2,65 F_2.$$

Підставимо цей вираз у формулу

$$F_t = F_1 - F_2 = 2,65 F_2 - F_2 = 1,65 F_2$$

і визначимо силу

$$F_2 = \frac{F_{t1}}{1,65} = \frac{3,2 \cdot 10^3}{1,65} = 1,94 \cdot 10^3 \text{ Н}.$$

Тоді сила

$$F_1 = 2,65 \cdot 1,94 = 5,14 \cdot 10^3 \text{ Н}.$$

Кут між вітками паса

$$\gamma = \pi - \alpha = 180^\circ - 170^\circ = 10^\circ.$$

Сила, що діє на опори вала

$$F_r = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1 F_2 \cos \gamma} = \sqrt{(5,14 \cdot 10^3)^2 + (1,94 \cdot 10^3)^2 + 2 \cdot 5,14 \cdot 10^3 \cdot 1,94 \cdot 10^3 \cdot \cos 10^\circ} = 3,67 \cdot 10^3 \text{ Н}.$$

Потужність на веденому шківі

$$P_2 = P_1 \cdot \eta_{n.n.} \cdot \eta_{кл.н.} = 8 \cdot 0,99 \cdot 0,96 = 7,6 \text{ кВт}.$$

**Задача 7.2.** Стрічковий конвеєр має колову силу  $F_t = 3,5 \text{ кН}$  і рухається зі швидкістю  $v = 1,2 \text{ м/с}$ . Частота обертання вала електродвигуна  $n_1 = 2850 \text{ хв}^{-1}$ . Діаметр барабана – 500 мм. Коефіцієнти корисної дії: прямозубої передачі –  $\eta_{з.н.} = 0,97$ ; ланцюгової передачі –  $\eta_{л.н.} = 0,95$ ; пари підшипників –  $\eta_{п.н.} = 0,99$ ; пасової передачі –  $\eta_{пас.} = 0,96$ . Передаточне число пасової передачі  $u_{пас} = 3,2$ . Кутова швидкість вихідного вала редуктора  $\omega = 14,8 \text{ с}^{-1}$ .

Визначити: потужність електродвигуна  $P_{\text{дв}}$ ; частоти обертання на валах привода  $n_i$ ,  $i = 1 \dots 4$ ; загальне передаточне число привода  $u_3$ ; передаточні числа прямозубої  $u_{\text{п.з}}$  і ланцюгової  $u_{\text{л.п}}$  передач.

#### Розв'язання

Розрахуємо потужність на валу барабана  $P_4$ :

$$P_4 = F_t \cdot v = 3,5 \cdot 1,2 = 4,2 \text{ кВт}.$$

#### Механічні передачі

Обчислимо загальний коефіцієнт корисної дії привода

$$\eta_{\Sigma} = \eta_{\text{л.п}} \cdot \eta_{\text{п.з}}^3 \cdot \eta_{\text{п.л.п}} = 0,95 \cdot 0,99^3 \cdot 0,97 \cdot 0,96 = 0,86,$$

де  $\eta_{\text{л.п}} = 0,95$  – коефіцієнт корисної дії ланцюгової передачі;

$\eta_{\text{п.з}} = 0,99$  – коефіцієнт корисної дії однієї пари підшипників;

$\eta_{\text{п.л.п}} = 0,97$  – коефіцієнт корисної дії закритої прямозубої передачі;

$\eta_{\text{п.л.п}} = 0,96$  – коефіцієнт корисної дії пасової передачі

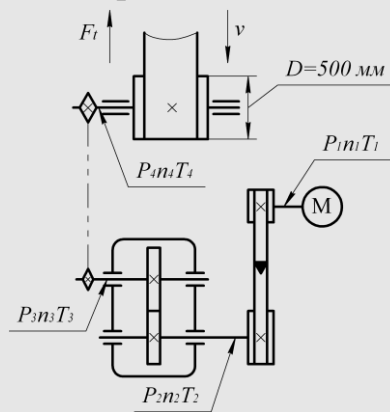


Рисунок 7.12 – До задачі 7.2

Визначаємо потужність електродвигуна  $P_1$ , що подається від нього до привода:

$$P_1 = \frac{P_4}{\eta_{\Sigma}} = \frac{4,2}{0,86} = 4,88 \text{ кВт}.$$

Частота обертання вала барабана:

$$n_4 = \frac{60 \cdot 1000 \cdot v}{\pi \cdot D} = \frac{60 \cdot 1000 \cdot 1,2}{3,14 \cdot 500} = 45,85 \text{ об/хв}.$$

Визначаємо загальне передаточне число привода:

$$u_{\Sigma} = \frac{n_1}{n_4} = \frac{2850}{45,85} = 62,16.$$

Обчислимо кутову швидкість вала барабана:

$$\omega_4 = \frac{\pi \cdot n_4}{30} = \frac{3,14 \cdot 45,85}{30} = 4,9 \text{ с}^{-1}.$$

Розрахуємо передаточне число ланцюгової передачі:

$$u_{\text{л.п}} = \frac{\omega_3}{\omega_4} = \frac{14,8}{4,9} = 3,02.$$

Із співвідношення  $u_c = u_{i \rightarrow n} \cdot u_{i \rightarrow c} \cdot u_{e \rightarrow i}$  визначаємо передаточне число прямозубої передачі редуктора:

$$u_{i \rightarrow c} = \frac{u_c}{u_{i \rightarrow n} \cdot u_{e \rightarrow i}} = \frac{62,16}{3,02 \cdot 3,2} = 6,43.$$

Визначаємо частоти обертання на валах привода:

$$n_2 = \frac{n_1}{u_{i \rightarrow n}} = \frac{2850}{3,2} = 890,6 \text{ об} \cdot \text{с}^{-1}, \quad n_3 = \frac{n_2}{u_{i \rightarrow c}} = \frac{890,6}{6,43} = 138,5 \text{ об} \cdot \text{с}^{-1}.$$



## Лабораторний практикум

### Лабораторна робота № 1

#### Визначення механічних характеристик маловуглецевої сталі

##### 1 Мета роботи

Експериментально установити залежність між навантаженням та деформацією зразка під час розтягу його до руйнування, отримати діаграму розтягу та виконати її аналіз. Визначити основні характеристики міцності та пластичності, встановити марку матеріалу, з якого виготовлений зразок.

##### 2 Теоретичні відомості

###### 2.1 Випробування матеріалів на розтяг

Механічні характеристики матеріалів, тобто величини, які характеризують їх міцність, пластичність, пружність, твердість, визначають за допомогою механічних випробувань стандартних зразків, виготовлених з досліджуваного матеріалу. Механічні випробування матеріалів різноманітні. Але основним та найбільш поширеним є випробування на розтяг.

Результати випробувань дають можливість оцінювати міцність матеріалів за умови дії статичного навантаження і використовувати їх для розрахунків різноманітних деталей машин на міцність.

За механічними властивостями матеріали поділяються на дві основні групи: *пластичні* та *крихкі*. Пластичні матеріали мають порівняно велику пластичну (залишкову) деформацію, крихкі руйнуються за невеликих залишкових деформацій. Для вивчення механічних властивостей матеріалу



незалежно від розмірів зразка застосовують діаграму, яка побудована в координатах напруження  $\sigma$  – відносне видовження  $\Delta l$  (рис. 8.1).

В процесі випробування зразка спеціальний пристрій випробувальної машини автоматично креслить діаграму, яка показує залежність між прикладеною силою  $F$  і абсолютним видовженням  $\Delta l$ .

На ділянці  $OA$  існує пряма пропорційна залежність між видовженням зразка  $\Delta l$  та розтяжною силою  $F$ , тобто деформація зразка відповідає закону Гука.

#### Лабораторний практикум

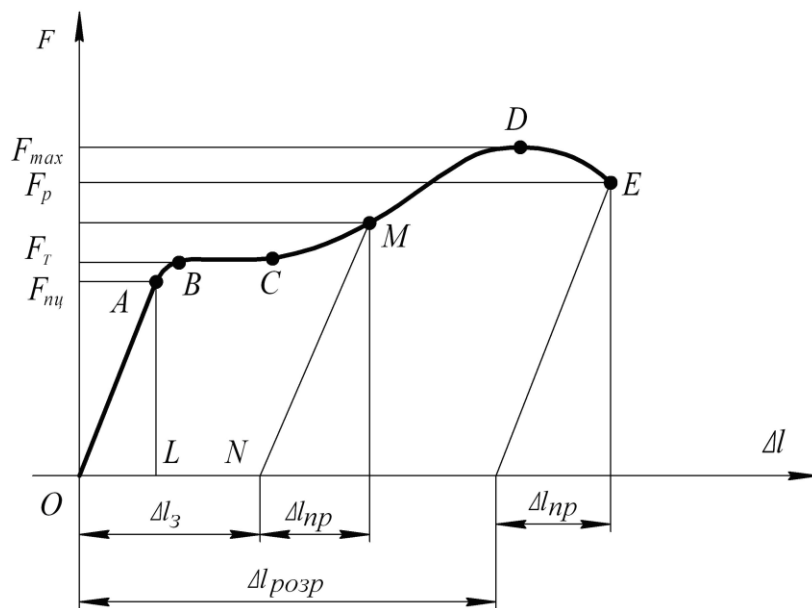


Рисунок 8.1 – Діаграма напруження

Максимальне напруження, за якого зберігається пропорційна залежність між деформаціями та навантаженнями (на діаграмі розтягу точка  $A$ ), називається *границею пропорційності*.

$$\sigma_{nc} = \frac{F_{np}}{A_0} \quad (8.1.1)$$

де  $F_{np}$  – зусилля, яке відповідає точці  $A$  діаграми;

$A_0$  – початкова площа поперечного перерізу зразка.

До границі пропорційності деформації практично залишаються пружними.

Після точки  $A$  справедливості закону Гука порушується: пряма  $OA$  переходить в криву  $AB$ . В точці  $B$  крива переходить в горизонтальну пряму  $BC$ , яку називають *ділянкою текучості*: довжина зразка збільшується без збільшення навантаження чи за незначного його зростання.

Напруження, при якому виникає текучість матеріалу, називається *границею текучості*:

$$\sigma_{\partial} = \frac{F_{\partial}}{\dot{A}_0} \quad (8.1.2)$$

де  $F_T$  – ордината точки  $C$  діаграми.

На ділянці  $CD$ , яку називають *ділянкою зміцнення*, зразок отримує значні залишкові деформації. Якщо розвантажити зразок, то механічні властивості зразка

---

Лабораторний практикум

будуть відрізнятися від його початкових властивостей. Лінія розвантаження  $MN$  і повторного навантаження  $NM$  паралельна відрізку  $OA$ . Після розвантаження зразка пружні деформації  $\Delta l_{пр}$  зникають, а зберігається залишкова деформація  $\Delta l_z$ . Тобто, пружні деформації виникають в зразку і за межами пропорційності та змінюються за законом Гука.

Збільшення границі пропорційності та зменшення пластичності зразка внаслідок попередньої деформації зразка за границю текучості називають *наклепом*, дія якого на сталь подібна гартуванню. Позитивний ефект наклепу використовують під час виготовлення високоміцної проволочи (холодне волочіння), попереднього витягування ланцюгів тощо.

Точка  $D$  відповідає *границі міцності* чи тимчасовому опору. Границею міцності  $\sigma_B$  називають умовне напруження, що відповідає граничній силі  $F_{max}$ , яку може витримувати зразок до його руйнування:

$$\sigma_B = \frac{F_{max}}{\dot{A}_0}. \quad (8.1.3)$$

В точці  $D$  на зразку з'являється місцеве звуження – шийка, тобто починається руйнування зразка. В означенні границі міцності мова йдеться про умовне напруження, оскільки в перерізах шийки напруження є різними і точний закон його розподілення невідомий.

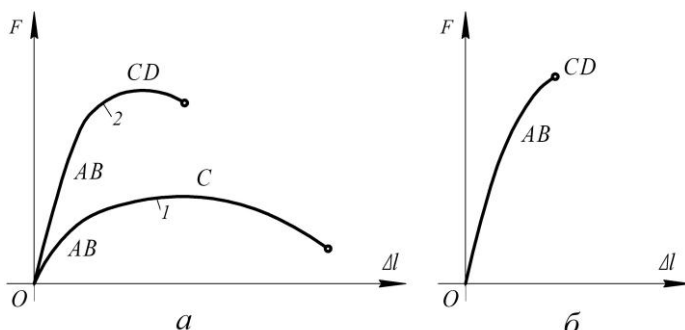
Границя міцності є основною характеристикою для оцінки міцності крихких матеріалів.

Вся деформація зразка в подальшому зосереджується тільки навколо шийки і зразок видовжується за рахунок пластичної деформації в шийці. Площа перерізу шийки зменшується інтенсивніше зміни сили, а тому на діаграмі спостерігається зменшення сили  $F$  (ділянка  $DE$ ).

Точка  $E$  відповідає силі  $F_p$ , за якої відбувається руйнування зразка.

Наявність ділянки текучості для більшості металів не завжди є характерною. В більшості випадків під час випробувань на розтяг ділянка

$AB$  не утворюється і має вид кривих, що наведені на рис. 8.2, *а*. Крива 1 характерна для алюмінію та відпаленої міді,



крива 2 – для високоякісних легованих сталей. Для крихких матеріалів (чавуну, загартованих вуглецевих і легованих сталей та ін.) діаграма розтягу має форму, що зображена на рис. 8.2, б.

## 2.2 Характеристики пластичності

Здатність матеріалу деформуватись пластично без руйнування називається *пластичністю*. Характеристикою пластичності є *відносна деформація* при розриві зразка, яка визначається:

$$\varepsilon_r = \frac{\Delta l_{\text{розр}}}{l_0} \cdot 100\% = \frac{l - l_0}{l_0} \cdot 100\%, \quad (8.1.4)$$

де  $\Delta l_{\text{розр}}$  – абсолютне залишкове видовження робочої довжини зразка.

Тут  $l$  і  $l_0$  – довжина розрахункової частини зразка відповідно в момент розриву і початкова довжина. Чим більша  $\varepsilon_r$ , тим еластичнішим є матеріал. Протилежною до властивості пластичності є крихкість, тобто здатність матеріалу руйнуватись без набуття залишкових деформацій. Для таких матеріалів величина  $\varepsilon_r < 5\%$ , а для деяких вимірюється частками відсотків. До пластичних належать, наприклад, маловуглецеві сталі, мідь, алюміній, латунь, свинець, до крихких – чавун, високовуглецеві інструментальні сталі, скло, цегла, каміння. Крім відносної деформації користуються відносним звуженням площі поперечного перерізу зразка після розриву:

$$\psi = \frac{A_0 - A_{\text{ш}}}{A_0} \cdot 100\%, \quad (8.1.5)$$

де  $A_{\text{ш}}$  – площа поперечного перерізу шийки після розриву.

## 3 Послідовність виконання роботи

3.1 Накреслити ескіз зразка.

3.2 Виміряти діаметр зразка з точністю до 0,01мм за двома взаємно перпендикулярними напрямками. Визначити середнє арифметичне значення, яке прийняти за розрахункове значення діаметра  $d_0$ .

3.3 За розрахункову довжину зразка  $\Delta l_0$  прийняти відстань між двома позначками, які нанесені на краях робочої частини зразка. Довжину  $l_0$  виміряти штангенциркулем з точністю до 0,01 мм.

3.4 Встановити зразок в захваті машини, і виконати випробування. При цьому автоматично записується залежність між навантаженням  $F$ , що діє на зразок, та абсолютним видовженням  $\Delta l$ .

3.5 Під час проведення випробування необхідно за шкалою вимірювального пристрою визначити максимальне навантаження  $F_{max}$ , навантаження в момент розриву  $F_{np}$ .

3.6 Після руйнування зразка виміряти діаметр шийки  $d_{ш}$ .

3.7 Обидві частини зразка після розриву прикладають одну до одної та вимірюють довжину  $l$  робочої частини зразка між двома позначками. Результати вимірювання заносять в таблицю 8.1.1

Лабораторний практикум

Таблиця 8.1.1

Розміри зразка				Опір зразка			
До випробування		Після випробування					
$l_o$ , мм	$d_o$ , мм	$l$ , мм	$d_{ш}$ , мм	$F_{нц}$ , Н	$F_T$ , Н	$F_{max}$ , Н	$F$ , Н

#### 4 Обробка результатів випробування

За максимальним значенням навантаження  $F_{max}$ , величиною абсолютного видовження,  $\Delta l$ , що отримані на діаграмі розтягу, визначають масштаби  $\mu_F$  та  $\mu_{\Delta l}$ . Значення навантаження  $F_m$ ,  $F_T$  та  $F_p$  визначають з діаграми множенням величини ординати, що їм відповідає, на масштабний коефіцієнт  $\mu_F$ . За формулами (8.1.1) – (8.1.5) розраховують характеристики міцності  $\sigma_m$ ,  $\sigma_T$ ,  $\sigma_B$  та характеристики пластичності  $\varepsilon$ ,  $\psi$ . Результати розрахунків заносять в таблицю 8.1.2.

Таблиця 8.1.2

$\sigma_{np}$ , МПа	$\sigma_m$ , МПа	$\sigma_u$ , МПа	$\varepsilon$ , %	$\psi$ , %	Марка сталі

#### 5 Зміст звіту

5.1 Звіт з лабораторної роботи оформлюється згідно вимог до текстової конструкторської документації (ГОСТ 2.105-93).

5.2 В звіті відображається мета лабораторної роботи, основні теоретичні відомості, що супроводжуються необхідними ілюстраціями.

5.3 Ескізи зразка з виміряними розмірами

5.4 Діаграма розтягу зразка з маловуглецевої сталі, що отримана на випробувальному стенді.

5.5 Результати вимірювань (таблиця 8.1).

5.6 Результати обчислень характеристик матеріалу зразка (таблиця 8.2).

5.7 Висновки.

## **6. Контрольні запитання**

6.1 Які характерні точки має діаграма розтягу маловуглецевої сталі?

6.2 При якому навантаженні на зразку виникає шийка?

6.3 Що таке наклеп метала?

### Лабораторний практикум

---

6.4 Як визначити границі пропорційності, текучості та міцності при випробуванні на розтяг?

6.5 Як визначити відносне видовження та звуження зразка після його руйнування?

6.6 За якими характеристиками визначають марку матеріалу?

6.7 Сформулюйте та запишіть закон Гука.

6.8 За якою ознакою матеріали умовно поділяються на пластичні та крихкі?

6.9 Як за діаграмою можна визначити модуль пружності?

## Лабораторна робота № 2

### Визначення модуля пружності та коефіцієнта поперечної деформації

#### 1 Мета роботи

Дослідним шляхом визначити значення сталих – модуля Юнга та коефіцієнта Пуассона.

#### 2 Теоретичні відомості

##### 2.1 Випробування матеріалів на розтяг-стиск

Під час розтягу-стиску за початкового навантаження в межах пружності для більшості матеріалів існує лінійна залежність між осьовим навантаженням  $F$  та видовженням  $\Delta l$ :

$$\Delta l = \frac{F \cdot l}{E \cdot A}, \quad (8.2.1)$$

де  $l$  – початкова довжина тієї частини зразка, видовження якої змінюється (наприклад, база тензометра);

$A$  – площа поперечного перерізу зразка.

Значення навантаження  $F$  у виразі (8.2.1) не повинно перебільшувати

$$F_{max} = \sigma_{mi} \cdot A,$$

де  $\sigma_{mi}$  – межа пропорційності матеріалу зразка.

Поздовжню деформацію зразка характеризують абсолютною поздовжньою деформацією  $\Delta l$  та відносною поздовжньою деформацією  $\varepsilon_r$ :

$$\varepsilon_r = \frac{\Delta l}{l}. \quad (8.2.2)$$

Поперечну деформацію зразка характеризують такі величини:

*абсолютна поперечна деформація*

$$\Delta b = b_0 - b_1,$$

де  $b_0$  – початковий поперечний розмір зразка;

$b_1$  – відповідний розмір деформованого зразка;

відносна поперечна деформація

$$\varepsilon_n = \frac{\Delta b}{b} . \quad (8.2.3)$$

При розтягу  $\varepsilon > 0$ ;  $\varepsilon_n < 0$ ; при стиску навпаки  $\varepsilon < 0$ ;  $\varepsilon_n > 0$ .

Численні досліди на зразках, виготовлених з різних матеріалів, показують, що відношення відносної поперечної деформації до відносної

---

Лабораторний практикум

поздовжньої деформації в межах пружних деформацій зразка є величина стала та має назву *коефіцієнт Пуассона* і позначається буквою  $\mu$ :

$$\mu = \left| \frac{\varepsilon_r}{\varepsilon_l} \right| . \quad (8.2.4)$$

Модуль пружності  $E$  та коефіцієнт Пуассона  $\mu$  повністю характеризують пружні властивості ізотропних матеріалів та визначаються дослідним шляхом.

Постійна  $\mu$  вперше введене французьким вченим Пуассоном (1781-1840), а достовірні значення для сталі отримав професор Петербурзької Академії наук М. Ф. Окатов (1836-1904).

Коефіцієнт Пуассона може змінюватися в межах  $0 \leq \mu \leq 0,5$ . Середнє значення коефіцієнта  $\mu$ , яке отримано для сталі, дорівнює 0,28 та змінюється в межах 0,25...0,3.

Для визначення значень пружних сталих  $E$  та  $\mu$  досліджуваного матеріалу скористаємось формулами (8.2.1), (8.2.2) та (8.2.4). З формул (8.2.1) та (8.2.2) знаходимо

$$E = \frac{F}{A \cdot \varepsilon} . \quad (8.2.5)$$

Для підвищення точності вимірювань зразок навантажують частинами, збільшуючи навантаження кожний раз на однакову величину. Невеликі лінійні деформації в поздовжньому та поперечному напрямках вимірюють методом електротензометрії.

Повздовжня деформація вимірюється тензорезисторами 1 та 2; поперечна – 3 та 4. (рис. 8.3).

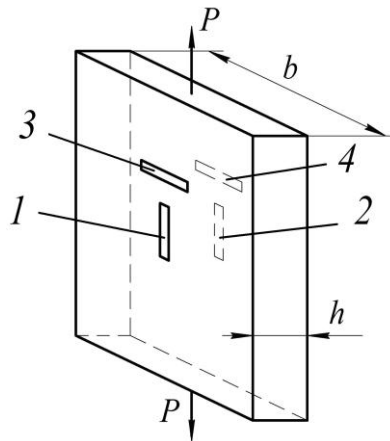


Рисунок 8.3 – Ескіз зразка із зазначенням розташування електричних тензорезисторів

Для вимірювання деформацій застосовується вимірювач деформацій цифровий ВДЦ-1, який призначений для вимірювання статичних

---

Лабораторний практикум

деформацій за допомогою тензорезисторів, що увімкнені за півмостовою схемою.

## 2.2 Улаштування та робота приладу

Внутрішній напівміст є частиною вимірювального моста. Активний та компенсаційний тензорезистори, які входять у внутрішній півміст, наклеюються на поверхню зразка, який деформують розтягуванням чи стисканням. Дротяний тензорезистор – датчик, який є провідником у вигляді декількох плоских петель тонкого, зазвичай манганінового чи константанового дроту діаметром 0,05-0,03 мм, наклеєного між двома шарами паперу чи пластмасової плівки (рис. 8.4).

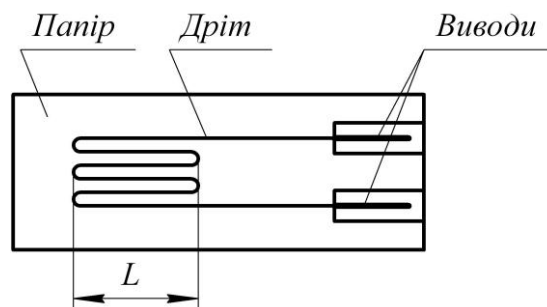


Рисунок 8.4 – Тензодатчик

Довжина петлі  $L$  називається базою датчика. Як правило, вибираються датчики з найбільш можливою за умовами досліду базою, виходячи лише з вимоги, щоб за довжиною датчика деформації деталі були достатньою мірою однорідними. Датчик наклеюється на поверхню



досліджуваного зразка таким чином, щоб база датчика збігалася з напрямком вимірювальної деформації.

Під час деформації зразка деформується датчик, внаслідок чого змінюється його омичний опір: під час розтягу – збільшується, стиску – зменшується. Під час дії деформації на датчик, що увімкнений у зовнішній вимірювальний півміст пристрою, відбувається розбаланс півмоста.

Відносне значення зміни опору активного тензодатчика визначає величину деформації:

$$\frac{\Delta R}{R} = k \cdot \frac{\Delta l}{l}, \quad (8.2.6)$$

де  $\Delta R$  – зміна опору активного датчика під час деформації, Ом;

$R$  – опір активного датчика за відсутності деформації, Ом;

$k$  – коефіцієнт чутливості, що залежить від матеріалу датчика;

$l$  – довжина активного датчика при відсутності деформації, мм;

Лабораторний практикум

---

$\Delta l$  – зміна довжини активного датчика під час зміни деформації досліджуваного об'єкта, мм.

Сигнал розбалансу з моста надходить на вхід підсилювача та через фазочутливий детектор – до блока автоматичного зрівноважування.

Індукція здійснюється за допомогою цифрових індикаторів, які засвічуються на лицьовій панелі пристрою у відповідних розрядах десяткового числа. Блок цифрової індикації вмикається після закінчення процесу автоматичного зрівноважування розбалансу моста. Результат вимірювань визначається як різниця абсолютних значень показів приладу за ненавантаженого та навантаженого об'єкта.

### **3 Порядок проведення випробувань**

3.1 Накреслити ескіз зразка (рис. 8.3) із зазначенням розташування електричних тензорезисторів.

3.2 Визначити розміри перерізу зразка  $b$  та  $h$ .

3.3 Закріпити зразок в захватах випробувальної машини. Кожний датчик увімкнути в мостову схему як робочий опір.

3.4 Для уникнення похибок на початку випробувань (ліквідація зазорів у вузлах випробувальної машини, проковзування зразка в захватах машини) відлік значень  $\Delta F$  слід вести від попереднього навантаження  $F = 500$  кгс.

3.5 Навантажити зразок через 5-6 інтервалів навантаження  $\Delta F$ . Відлік навантаження вести за шкалою машини Р10 чи Р20, а значення  $\varepsilon_r$  – за шкалою ВДЦ-1. Щоб отримати справжні значення  $\varepsilon_r$  та  $\varepsilon_n$ , показ приладу ВДЦ-1 необхідно помножити на  $10^{-5}$ .

### 3.6 Результати вимірювання занести в таблицю 8.2.1.

Таблиця 8.2.1 – Результати вимірювання зразка

Навантаження	Тензорезистори, що встановлені в поздовжньому напрямку				Тензорезистори, що встановлені в поперечному напрямку			
$F$	1		2		3		4	
$Kgc$	Відлік	Різниця	Відлік	Різниця	Відлік	Різниця	Відлік	Різниця

## 4 Обробка результатів випробувань

Значення відносних деформацій  $\varepsilon_r$  та  $\varepsilon_n$  на кожному етапі навантаження визначаються як різниця значень в кінці  $\varepsilon_{i+1}$ ,  $\varepsilon_{ni+1}$  та на початку  $\varepsilon_i$ ;  $\varepsilon_{ni}$  етапів. Середні значення будуть дорівнювати:

Лабораторний практикум

$$\varepsilon_{rc} = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_k}{k}, \quad (8.2.7)$$

$$\varepsilon_{i\bar{n}} = \frac{\varepsilon_{n1} + \varepsilon_{n2} + \dots + \varepsilon_{nk}}{k}, \quad (8.2.8)$$

де  $k$  – число інтервалів.

Модуль пружності за даними випробувань розраховується за формулою:

$$E = \frac{\Delta F}{\varepsilon_{rc} \Delta}, \quad (8.2.9)$$

коефіцієнт поперечної деформації:

$$\mu = \left| \frac{\varepsilon_{i\bar{n}}}{\varepsilon_{rc}} \right|. \quad (8.2.10)$$

## 5 Зміст звіту

5.1 Звіт з лабораторної роботи оформлюється згідно з вимогами до текстової конструкторської документації (ГОСТ 2.105-93).

5.2 В звіті відображається мета лабораторної роботи, основні теоретичні відомості, що супроводжуються необхідними ілюстраціями.

5.3 Навести ескіз з основними розмірами дослідного зразка.

5.4 Результати вимірювання зразка, що отримані під час випробування, записати в таблицю 8.2.1.

5.5 Навести середні значення відносних деформацій  $\varepsilon_r$  та  $\varepsilon_n$ , а також модуля пружності  $E$  та коефіцієнта поперечної деформації  $\mu$ .

## 5.6 Висновки.

## 6 Контрольні запитання

6.1 Які властивості матеріалу характеризують коефіцієнт Пуассона та модуль Юнга?

6.2 Який фізичний зміст  $\mu$  ?

6.3 Який фізичний та геометричний зміст модуля пружності  $E$ ?

6.4 Чому дорівнює коефіцієнт поперечної деформації для різних матеріалів?

6.5 Як змінюється коефіцієнт Пуассона  $\mu$  при зміні величини та знака навантаження?

6.6 Як залежить величина  $E$  від марки сталі?

6.7 Чому під час визначення модуля пружності  $E$  напруження не повинні перевищувати границі пропорційності?

6.8 Якими способами можна підвищувати точність визначення  $E$  та  $\mu$ .

---

## Лабораторна робота № 3

### Випробування різних матеріалів на стиск

#### 1 Мета роботи

Вивчити поведінку різних матеріалів при випробуванні на стиск, визначити межу текучості для пластичних матеріалів і межу міцності для крихких матеріалів.

#### 2 Теоретичні відомості

##### 2.1 Випробування на стиск металевих зразків

Випробування на стиск є основним у визначенні міцності крихких матеріалів: чавуну, натуральних і штучних будівельних матеріалів тощо. При випробуванні на стиск механічні характеристики матеріалів умовні, оскільки мають місце такі особливості:

– стискне навантаження важко прикласти строго вздовж осі зразка, що часто призводить до нерівного розподілення напруження в поперечному перерізі і викривлення зразка;

– на торцевих поверхнях зразка виникають великі сили тертя, що призводить до виникнення поблизу цих поверхонь тривісного напруженого стану і спотворення циліндричної форми зразка. Вплив сил тертя тим більший, чим коротший зразок, тому результати випробування

на стиск суттєво залежать від відношення висоти зразка до його діаметра і умов тертя на контактуючих поверхнях.

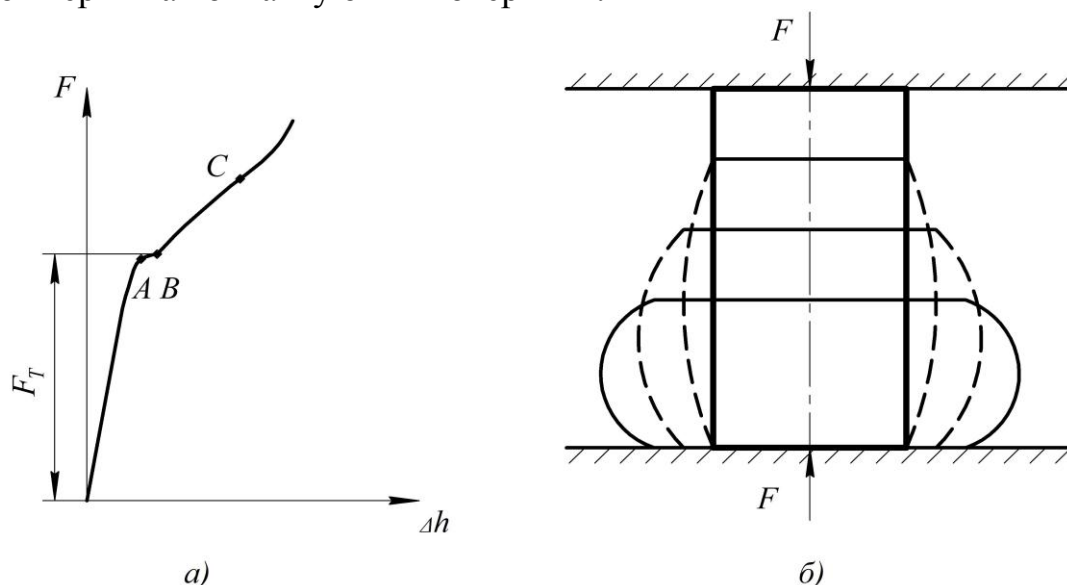


Рисунок 8.5 – Діаграма стиску і характерне деформування пластичного матеріалу  
Лабораторний практикум

Випробування на стиск пластичного матеріалу (маловуглецевої сталі) проводять на циліндричних зразках з відношенням висоти до діаметра  $1 < h/d < 2$ . При цьому діаграма стиску має вигляд, що показаний на рис. 8.5. Для більшості пластичних матеріалів границя пропорційності  $\sigma_{\text{пл}}$ , модуль пружності  $E$ , межа текучості  $\sigma_T$  при стиску приблизно такі ж, що і при розтягу. Після площадки текучості функція  $F(\Delta h)$  зростає. Відбувається це в результаті того, що площа поперечного перерізу стисненого зразка під час збільшення навантаження збільшується. Довести зразок з пластичного матеріалу до руйнування практично не вдається, він деформується в тонку пластину і подальше випробування обмежується можливостями машини. Тому границю міцності при стиску для пластичних матеріалів не визначають, тобто вважають однаковою при розтягу і стиску.

Випробування на стиск крихкого матеріалу (чавуну, високовуглецевої сталі тощо) проводяться також на циліндричних зразках  $1 < h/d < 2$ . Під час стиску зразок приймає дещо бочкоподібну форму, після чого виникають тріщини по нахилених площинах і навантаження різко падає (рис. 8.5). Нахилені поверхні, по яким розпочинається і розвивається руйнування утворюють з віссю зразка кут, приблизно рівний  $45...50^\circ$ , тобто кут, під яким діє максимальне контактне напруження.

Як для чавуну (рис. 8.5, а), так і, наприклад, для цегли чи каменю (рис. 8.5, б) процес руйнування при стиску відбувається миттєво з утворенням відламків довільної форми. Для цих матеріалів границя міцності при стиску  $\sigma_{\text{вс}}$  є значно вищою, ніж при розтягу, тобто крихкі матеріали чинять опір стиску значно краще, ніж розтягу. Наприклад, для

чавуну границя міцності при стиску  $\sigma_{\text{вс}}$  є більшою від границі міцності при розтягу  $\sigma_{\text{вс}}$  2...4 рази.

## 2.2 Випробовування на стиск деревини

Деревина – анізотропний матеріал і її механічні властивості при різних напрямках різні. Тому випробування на стиск проводиться вздовж і поперек волокон. При цьому слід розрізняти стиск поперек волокон по радіусу стовбура і вздовж річного шару по дотичній до кола. При випробуванні на стиск дерева застосовують зразки у вигляді кубиків.

## 3 Порядок проведення випробування

Перед випробуванням зразки заміряють з точністю до 0,1 мм. При цьому слідкують за тим, щоб торцеві поверхні зразка були ретельно оброблені, строго паралельні і перпендикулярні до осі зразка.

Зразки з маловуглецевої сталі і чавуну поміщають в металевий стакан (виконує функції запобіжного пристрою та центрування

---

прикладання навантаження), який поміщають між опорними плитами машини Р20 чи Р10. Випробування здійснюється поступово зростаючим навантаженням.

Зразок із сталі навантажують до деякого достатньо високого навантаження  $P_{\text{max}}$  (приблизно 50000 кгс), потім навантаження знімають і зарисовують вигляд зразка.

Максимальне напруження, до якого матеріал був доведений під час випробування, визначають за формулою

$$\sigma_{\text{max}} = \frac{F_{\text{max}}}{A}, \quad (8.3.1)$$

а визначення текучості за формулою:

$$\sigma_{\delta} = \frac{F_{\delta}}{F}, \quad (8.3.2)$$

де  $A$  – площа поперечного перерізу зразка до випробування.

Числові значення  $h$ ,  $D$ ,  $A$ ,  $F_{\text{max}}$  заносяться в таблицю 8.3.1.

Під час випробування зразка з чавуну визначають навантаження  $F_{\text{max}}$  в момент його руйнування. Потім навантаження знімають і зарисовують зразок, звертаючи велику увагу на напрямок тріщин відносно осі зразка. Границя міцності зразка при стиску обчислюється за формулою  $\sigma_{\hat{a}} = \frac{F_{\text{max}}}{A}$ . (8.3.3)

Випробування на стиск дерев'яних зразків проводять на універсальній машині Р20. Для цього зразки встановлюють на нижню

плиту машини так, щоб навантаження в подальшому діяло вздовж або поперек волокон.

При стиску дерев'яного зразка вздовж волокон фіксують за шкалою силовимірного пристрою найбільше навантаження  $F_{max}$  при досягненні якого зразок починає руйнуватися. Відношення  $F_{max}$  до початкової площі називається межею міцності  $\sigma_{\text{вв}}$  деревини вздовж волокон. Руйнування зразка в цьому випадку супроводжується зсувом за похилими площадками як для крихких матеріалів від дії дотичних напружень.

При навантаженні дерев'яного зразка поперек волокон в радіальному напрямку він не руйнується, а тільки зпресовується, тому за умовне руйнівне навантаження  $F_{max}$  приймають те значення навантаження, за якого кубик стискається на одну третю початкової висоти. Границя міцності деревини поперек волокон  $\sigma_{\text{в.п}}$  визначається за формулою 8.3.3. Значення  $A$ ,  $F_{max}$ ,  $\sigma_{\text{в.п}}$  заносяться в таблицю 8.3.2.

Міцність деревини на стискання поперек волокон зазвичай в 8-10 разів менша, ніж вздовж волокон.

Лабораторний практикум

#### 4 Обробка результатів випробовування

Таблиця 8.3.1

Матеріал		Сталь	Чавун
Розміри зразка	Висота $h$ , мм		
	Діаметр $d$ , мм		
	Площа зрізу $A$ , мм <sup>2</sup>		
Максимальне значення стискної сили $F$ , Н			
Границя міцності (для крихких матеріалів) $\sigma_{\text{в}}$ , МПа			
Максимальне напруження (для пластичних)			
Вигляд зразка після випробування (ескіз)			

Таблиця 8.3.2

Параметри	Вздовж волокон	Поперек волокон	
		в радіальному напрямку	в тангенціальному напрямку
Площа поперечного зрізу зразка $A$ , мм <sup>2</sup>			
Руйнівне навантаження $F$ , Н			

Границя міцності $\sigma_{\text{вв}}$ , МПа			
Вигляд зразка після випробування (ескіз)			

## 5 Зміст звіту

5.1 Звіт з лабораторної роботи оформлюється згідно з вимогами до текстової конструкторської документації (ГОСТ 2.105-93).

5.2 В звіті відображається мета лабораторної роботи, основні теоретичні відомості, що супроводжуються необхідними ілюстраціями.

5.3 Виміри зразків з маловуглецевої сталі та чавуну звести в табл. 8.3.1

5.4 Записати в табл. 8.3.1 результати вимірювань та розрахунків  $\sigma_{\text{max}}$ ,  $\sigma_{\text{вс}}$  та розмістити ескіз зразків після випробувань.

5.5 Результати вимірювань зразків з деревини звести в табл. 8.3.2.

Лабораторний практикум

---

## 6. Контрольні запитання

6.1 Які механічні характеристики можна визначити при випробуванні пластичних матеріалів на стиск?

6.2 Які механічні характеристики можна визначити при випробуванні крихких матеріалів на стиск?

6.3 Чим обумовлені розміри зразків при випробуванні на стиск?

6.4 Чому зразки із крихких матеріалів руйнуються по площинах, які складають кут  $\sim 45^\circ$  з віссю зразка?

6.5 Як залежить межа міцності деревини від напрямку?

6.6 Чому умова тертя на контактуючих поверхнях і відношення висоти зразка до його діаметра суттєво впливає на результати випробування?

## Лабораторна робота № 4

### Складання кінематичних схем та структурний аналіз механізмів

#### 1 Мета роботи

Засвоїти методику складання структурних і кінематичних схем механізмів з використанням стандартних умовних позначень. Вивчити основні принципи структурного аналізу і синтезу механізмів, визначити ступінь рухомості, клас і порядок механізмів.

#### 2 Теоретичні відомості

##### 2.1 Основні поняття та означення

Проектування нових, а також аналіз існуючих механізмів розпочинають зі складання структурних схем.

*Структурна схема* це графічне зображення механізму за допомогою умовного позначення ланок і кінематичних пар. При зображенні структурної схеми механізму зазвичай не дотримуються співвідношень між розмірами ланок, конфігурація окремих ланок визначається тільки взаємним розміщенням кінематичних пар. Структурна схема дає можливість встановити число ланок, кінематичних пар та їх клас, вид окремих ланок механізму.

Як приклад, на рис. 8.6 показані конструктивна (а) та структурна (б) схеми двигуна внутрішнього згоряння, де 1 – кривошип; 2 – шатун; 3 – поршень, 0 – стояк.

Перед початком виконання роботи, студент повинен знати основні поняття та означення, що наводяться нижче.

*Механізмом* називають штучно створену систему тіл, призначену для перетворення руху одного чи декількох тіл в заданий рух інших тіл.

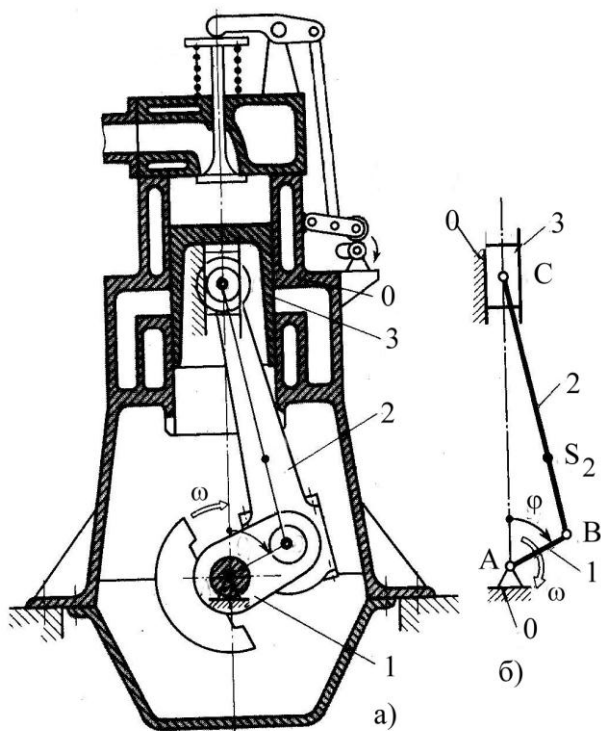


Рисунок 8.6 – Двигун внутрішнього згорання:  
а) – поперечний переріз – конструктивна  
схема; б) – структурна схема механізму

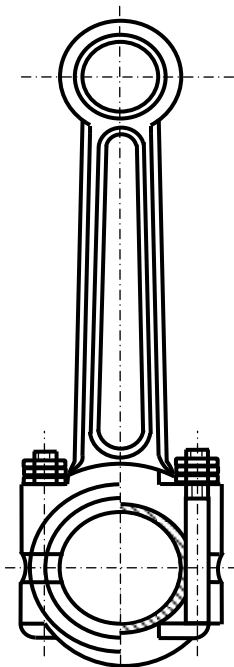


*Ланкою* називають деталь або групу деталей, що з'єднані між собою жорстко і рухаються як єдине ціле. Тверде тіло, що входить до складу ланок, називається деталлю. Наприклад, шатун (рис. 8.7) складається із корпусу, кришки, роз'ємного підшипника, втулки і деталей з'єднаних жорстко.

*Ведучою ланкою* називають ланку, закон руху якої заданий і перетворюється механізмом у потрібний рух інших ланок.

*Веденою ланкою* називають ланку, що здійснює рух, для виконання якого призначений механізм.

Усі нерухомі деталі механізму утворюють одну нерухому систему тіл, яка називається нерухомою, або *стояком*. В механізмі стояк лише один (на рис. 8.6 – стояк 0).



Залежно від характеру руху ланки в механізмі мають певну назву: *Кривошип* – ланка, що з'єднана зі стояком і за цикл руху виконує повний оберт; *шатун* – ланка, що не з'єднана зі стояком і виконує складний плоский рух; *повзун* – ланка, що виконує зворотно-поступальний рух; *коромисло* – ланка, що з'єднана зі стояком оберальною кінематичною парою та виконує відносно нього коливальний рух; *куліса* – ланка, що служить рухомою напрямною.

*Кінематичною парою* називають рухоме з'єднання двох ланок, які дотикаються. Місця взаємного дотику ланок (точки, лінії, поверхні) називають елементами кінематичних пар.

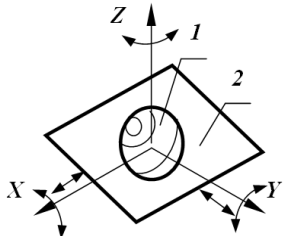
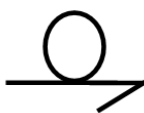
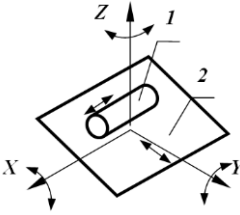

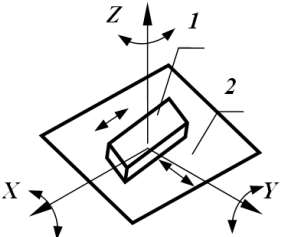
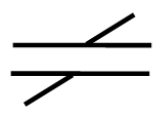
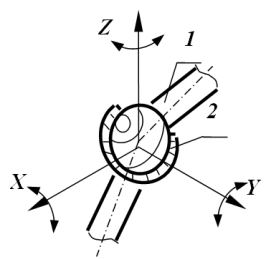
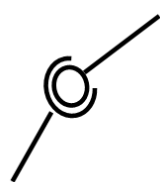
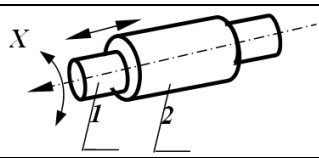

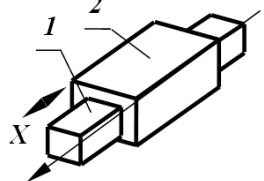
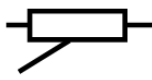
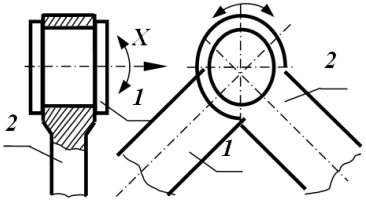

Кінематичні пари класифікують за такими ознаками: за кількістю обмежень, які кінематичні пари накладають на відносний рух ланок, вони поділяються на п'ять класів. *Клас* кінематичної пари визначається за формулою:

$$S=6-H, \quad (8.4.1)$$

де  $S$  – кількість обмежень на відносний рух,

$H$  – кількість ступенів вільності ланок, яку можна обчислити за кількістю відносних рухів, що мають ланки, які утворюють кінематичну пару; за характером елементів контакту кінематичні пари поділяються на нижчі та вищі. Якщо ланки дотикаються поверхнями, то кінематичні пари називаються *нижчими*, а якщо в точці або по лінії – *вищими*; за характером відносного руху ланок кінематичні пари поділяють на *обертальні* та *поступальні*. Приклади напівконструктивного виконання деяких кінематичних пар та їх умовні позначення згідно з ГОСТом 2. 770-68 подані в табл. 8.4.1.

Таблиця 8.4.1 – Приклади кінематичних пар

Номер пари	Напівконструктивне зображення пари	Умовні позначення	Назва пари	S	Клас пари
1			Куля – Площина	1	I
2			Циліндр – площина	2	II
3			Площинна	3	III
4			Сферична	3	III
5			Циліндрична	4	IV
6			Поступальна	5	V
7			Обертова	5	V

*Кінематичним ланцюгом* називається система ланок, з'єднаних між собою кінематичними парами.

*Механізмом* називають кінематичний ланцюг, в якому за заданим рухом однієї або декількох ланок (ведучих), всі інші ланки (ведені) здійснюють певні рухи.

*Кінематичною схемою* механізму називається його графічне зображення з використанням умовних позначень ланок і кінематичних пар (табл. 8.4.2).

## 2.2 Побудова кінематичної схеми механізму

Для побудови кінематичної схеми необхідно вияснити, які геометричні розміри визначають величини лінійних і кутових переміщень ланок механізму. В плоских механізмах – це відстані між осями обертальних кінематичних пар, постійні кути між окремими плечами ланок, радіуси кривизни, що визначають конфігурацію ланок, положення нерухомих напрямних тощо.

Викреслювання кінематичної схеми необхідно розпочинати з вибору осей координати  $XOY$ , початок яких зручніше сумістити з центром кінематичної пари, утвореної початковою ланкою і стояком. Визначити положення центрів нерухомих шарнірів а також осей напрямних поступальних пар в даній системі координат. Потім викреслюють ведучу ланку, положення якої вибирається так, щоб інші ланки були чітко видні і не перекривали одна одну. Після цього послідовно викреслюють положення ведених ланок, користуючись методом засічок. Під кінематичною схемою доцільно вказати значення, що визначають її розміри: лінійні – в міліметрах, кутові – в градусах.

Ланки на схемі нумеруються арабськими цифрами у послідовності їх приєднання до ведучої ланки, а кінематичні пари позначають великими літерами латинського алфавіту.

Кінематичну схему необхідно викреслювати в креслярському масштабі (для зменшення – 1:2; 1:2,5; 1:4; 1:5; 1:10). В теорії механізмів і машин поряд з масштабом використовують *масштабний коефіцієнт*  $\mu_l$  – це відношення числового значення фізичної величини довжини ланки в  $m$  до довжини відрізка в  $mm$ , що відображає його величину на кресленні.

## 2.3 Структурний аналіз плоского механізму

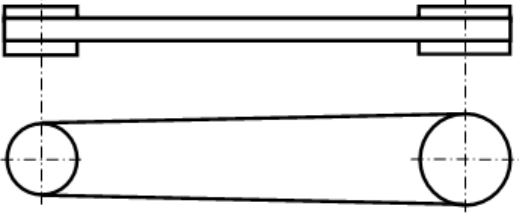
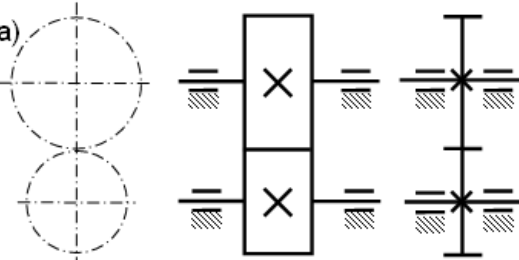
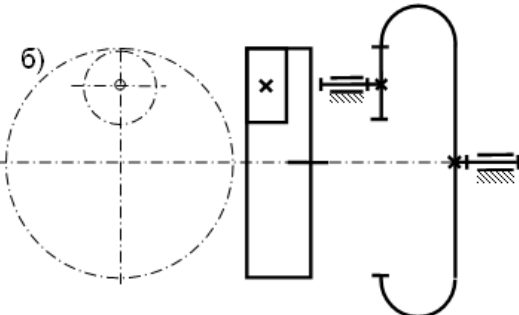
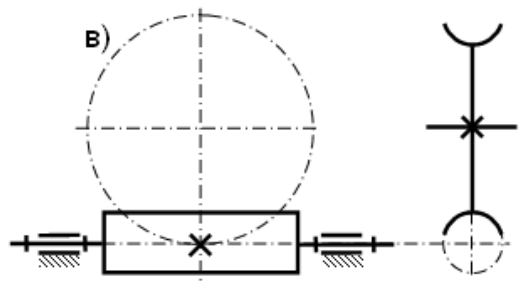
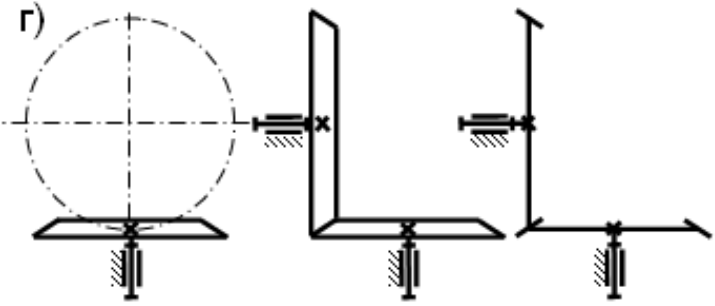
*Метою* структурного аналізу є визначення ступеня рухомості, а також класу і порядку механізму.

*Ступенем рухомості*  $W$  називають загальне число ступенів вільності ланок механізму відносно стояка. Воно відповідає необхідній кількості ведучих ланок, а також вказує на наявність пасивних ланок або зайвих ступенів вільності.

Таблиця 8.4.2 – Умовні позначення ланок і кінематичних пар

Позначення	Назва
1	2
	1. Вал, вісь стержень
	2. Нерухоме закріплення осі, стержня і т. д.
	3. Ланка: а) проста; б) складна
	4. З'єднання ланок: а) жорстке; б) шарнірне
	5. З'єднання ланки з нерухомою опорою шарнірне
	6. Ланки, що перетинаються
	7. Повзун в нерухомих напрямних
	8. Ланка, що рухається зворотно-поступально
	9. З'єднання кривошипа з шатуном
	10. Кривошипно-кулісні механізми: а) з поступально-рухомою кулісою; б) з кулісою, яка обертається
	11. Передачі фрикційні з циліндричними роликами

Продовження таблиці 8.4.2

1	2
	<p>12. Передача з плоским пасом</p>
<p>а)</p> 	<p>13. Передачі зубчасті:</p> <p>а) зовнішнє зачеплення з паралельними валами;</p>
<p>б)</p> 	<p>б) внутрішнє зачеплення з паралельними валами;</p>
<p>в)</p> 	<p>в) черв'ячні з циліндричним черв'яком;</p>
<p>г)</p> 	<p>г) з валами, що перехрещуються (конічні)</p>

Для просторових механізмів ступінь рухомості визначають за формулою Сомова-Малишева

$$W = 6n - 5p_5 - 4p_4 - 3p_3 - 2p_2 - p_1, \quad (8.4.2)$$

де  $n$  – число рухомих ланок механізму;

$p_i$  – кількість кінематичних пар відповідного класу.

Ступінь рухомості плоского механізму визначається за формулою П. Л. Чебишева

$$W = 3n - 2p_5 - p_4. \quad (8.4.3)$$

В основу структурної класифікації плоских механізмів покладено принцип утворення механізмів шляхом приєднання до ведучої ланки (ланок) і стояка, які утворюють механізм першого класу, структурних груп (груп Ассура).

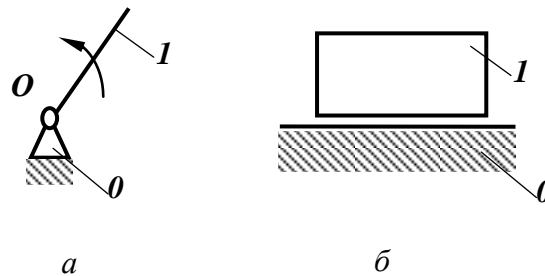


Рисунок 8.8 – Механізми першого класу

*Механізмом першого класу* називають ведучу ланку, що з'єднана обертальною (рис. 8.8, а) або поступальною (рис. 8.8, б) парою зі стояком. Ступінь рухомості такого найпростішого механізму  $W=1$ .

*Групою Ассура* називають найпростіший кінематичний ланцюг, який після приєднання вільними елементами ланок до стояка буде мати нульовий ступінь вільності ( $W_{ep} = 0$ ), а після приєднання до механізму не змінює його ступеня рухомості.

Умова існування структурної групи (групи Ассура), до складу якої входять лише пари 5 класу (при наявності у кінематичному ланцюзі пар 4 класу проводять їх еквівалентну заміну), має вигляд:

$$3n - 2p_5 = 0, \text{ або } p_5 = 3/2n. \quad (8.4.4)$$

З рівняння (8.4.4) видно, що кількість ланок у групі Ассура повинна бути парною, а кількість пар 5 класу кратна трьом.

Складність структурних груп визначається класом та порядком.

*Клас* групи визначається числом кінематичних пар що утворюють найбільш складний замкнений контур ланок, які входять до групи. До II класу віднесені всі двоповідкові групи, до III класу – групи Ассура, контур

яких, створений внутрішніми кінематичними парами, є трикутник, до IV – чотирикутник, до V – п'ятикутник.

*Порядок* групи визначається числом вільних зовнішніх елементів кінематичних пар, якими можна приєднати ланцюг до стояка чи механізму.

*Вид* групи характеризується місцем і кількістю поступальних і обертальних пар та їх взаємним розміщенням.

В табл. 8.4.3 показано класифікацію структурних груп Ассура за класом, порядком і видом.

Клас і порядок механізму визначається за структурною групою найвищого класу, яка входить до його складу.

Поділ механізму на структурні групи доцільно розпочинати з відокремлення найбільш віддалених від ведучої ланки. При цьому необхідно зберігати такі умови: відокремлений кінематичний ланцюг повинен задовольняти вимоги, що ставляться до групи Ассура; ланки, що залишилися на кінематичній схемі після відокремлення, повинні являти замкнений кінематичний ланцюг або механізм I класу.

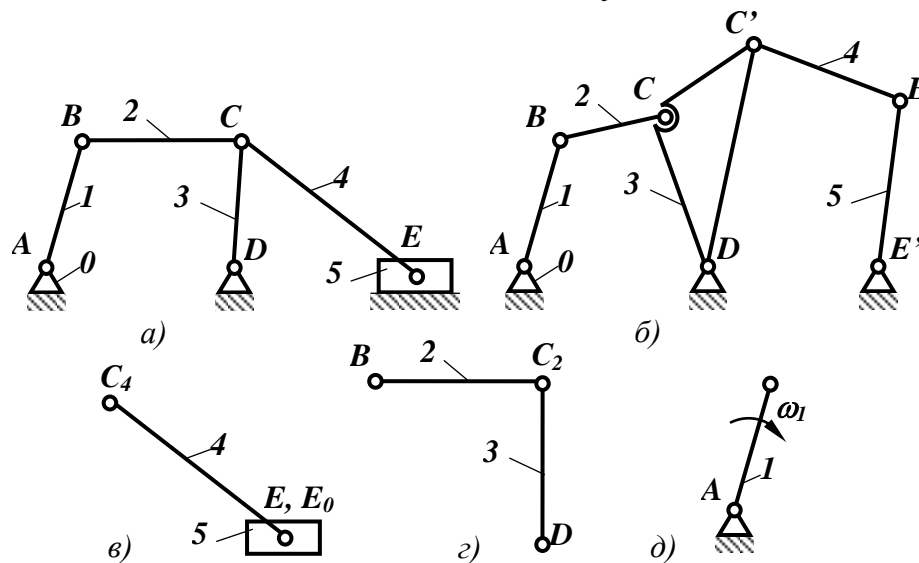


Рисунок 3.4 – Схема механізму принципова (а), структурна (б) та поділ його на структурні групи

Склад механізму і послідовність приєднання до ведучої ланки структурних груп виражають *формулою будови механізму*. У цій формулі римськими цифрами позначають класи ведучої ланки і структурних груп, а в круглих дужках арабськими цифрами – номери ланок, які входять до її складу. Так, наприклад, для механізму на рис. 8.8 формула будови має вигляд  $I(0,1) \rightarrow II(2,3) \rightarrow II(4,5)$ .

Вона вказує на те, що до механізму першого класу (ведучої ланки), який утворений кривошипом 1 і стояком 0, послідовно приєднані дві структурні групи другого класу, які утворені відповідно ланками 2, 3 і 4, 5.

За формулою будови можна зробити висновок, що даний механізм є механізмом другого класу.

Основою для проведення структурного аналізу є принципова схема механізму (рис. 8.8 а). Структурний аналіз механізму доцільно проводити за структурною схемою (рис. 8.8 б), яка базується на основі його принципової схеми.

При побудові структурної схеми механізму дотримуються таких правил: ланки на схемі зображають у вигляді простих геометричних фігур довільних розмірів (прямі, трикутники, чотирикутники і т. д.); прямолінійним відрізком зображають прості ланки; трикутниками, чотирикутниками, і т. д. зображають складні ланки; поступальні кінематичні пари умовно зображають обертальними; усі ланки на структурній схемі повинні мати такі ж номери, як і на принциповій.

## 2.4 Особливі випадки структурного аналізу

2.4.1. *Складний шарнір*. Якщо в одній точці механізму з'єднується більше ніж дві ланки, то такий шарнір називається складним (див. рис. 8.9, а – точка С). Кількість кінематичних пар, які утворюють складний шарнір, визначається за формулою

$$P_5 = n - 1, \quad (8.4.5)$$

де  $n$  – кількість ланок, які сходяться у складному шарнірі.

2.4.2. Наявність *пасивних* ланок та *зайвих* ступенів вільності. Деякі механізми містять пасивні або “зайві” ланки, які не впливають на кінематику, а необхідні тільки для підвищення жорсткості системи.

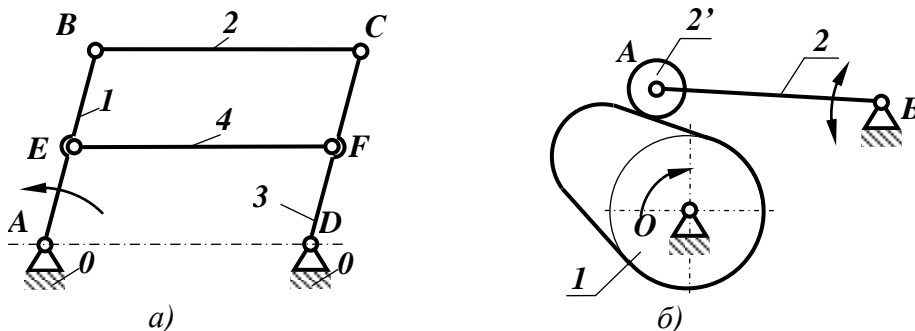


Рисунок 8.9 – Механізм з пасивними ланками (а), та зайвими ступенями вільності

На рис. 8.9, а зображена схема механізму паралельних кривошипів, до складу якого входить одна “зайва” ланка 4. Ступінь рухомості цього механізму

$$W = 3n - 2p_5 = 3 \cdot 4 - 2 \cdot 6 = 0. \quad (8.4.6)$$



Таблиця 8.4.3 – Структурні групи Ассура

Схема групи	Клас	Порядок	Вид	Позначення
	II	2	1	$II_2^1 (2, 3)$
	II	2	2	$II_2^2 (2, 3)$
	II	2	3	$II_2^3 (2, 3)$
	II	2	4	$II_2^4 (2, 3)$
	II	2	5	$II_2^5 (2, 3)$
	III	3	-	$III_3 (2, 3, 4, 5)$
	IV	3	-	$IV_3 (2, 3, 4, 5, 6, 7)$

Нульовий ступінь рухомості вказує на те, що такий кінематичний ланцюг не є механізмом, а жорсткою конструкцією (фермою). Але якщо довжини ланок підібрані так, що  $AD=BC=EF$  і  $AB=CD$ , то наявність ланки 4 не впливає на рух механізму. Ланка 4 – пасивна або “зайва”, оскільки з точки зору кінематики механізму у ній нема потреби. Ця ланка введена до складу механізму для надання йому більшої жорсткості. Тому якщо умовно вилучити із схеми ланку 4 і пари  $E$  і  $F$ , то залишається чотириланковий механізм  $ABCD$ , ступінь рухомості якого

$$W=3n - 2p_5=3 \cdot 3 - 2 \cdot 4=1. \quad (8.4.7)$$

Таким чином пасивні ланки не повинні враховуватися при визначенні ступеня рухомості за формулою Чебишева.

*Зайвими* ступенями вільності називають рухомості ланок, що не впливають на рух механізму в цілому. Їх вводять у конструкцію механізму, щоб зменшити силу тертя і зношування елементів кінематики пар. Наприклад, на рис. 8.9, б показана схема кулачкового механізму, що призначається для перетворення обертального руху кулачка 1 в зворотно-обертальний рух штовхача 2. Ступінь рухомості цього механізму

$$W=3n - 2p_5 - p_4=3 \cdot 3 - 2 \cdot 3 - 1=2, \quad (8.4.8)$$

де  $n=3$ ;  $p_5=3$ ;  $p_4=1$ .

У даному випадку врахована одна “зайва” ступінь рухомості – обертання ролика 2 навколо власної осі. Але обертання ролика не впливає на рух штовхача 2. Ролик тільки потрібен для зменшення сил тертя і зношування поверхні кулачка. Рух штовхача не зміниться, якщо умовно жорстко з’єднаємо ролик зі штовхачем (вилучимо ролик 2), тоді рухомість механізму

$$W=3n - 2p_5 - p_4=3 \cdot 2 - 2 \cdot 2 - 1=1. \quad (8.4.9)$$

Під час структурного аналізу механізмів ланки, які створюють зайві ступені вільності, умовно вилучають.

## 2.5 Заміна вищих кінематичних пар

Якщо у механізмі поряд з нижчими є вищі кінематичні пари, тоді необхідно умовно замінити вищі пари четвертого класу нижчими парами п’ятого класу. Для заміни вищої кінематичної пари  $E$  в механізмі (рис. 8.10, а) через точку дотику проводять спільну нормаль, на котрій в центрах кривизни (точки  $B$  і  $C$ ) профілів, що контактують, розміщують кінематичні пари п’ятого класу  $B$  і  $C$  і з’єднують їх умовною ланкою, довжина якої  $BC=\rho_1+\rho_2$ .

Схема механізму, який замінює основний, зображена на рис. 8.10, б.

Таким чином, вища кінематична пара четвертого класу повинна бути замінена двома нижчими кінематичними парами п'ятого класу і додатковою ланкою, що з'єднує їх. Від такої заміни ступінь рухомості механізму і характер миттєвого відносного руху не змінюється.

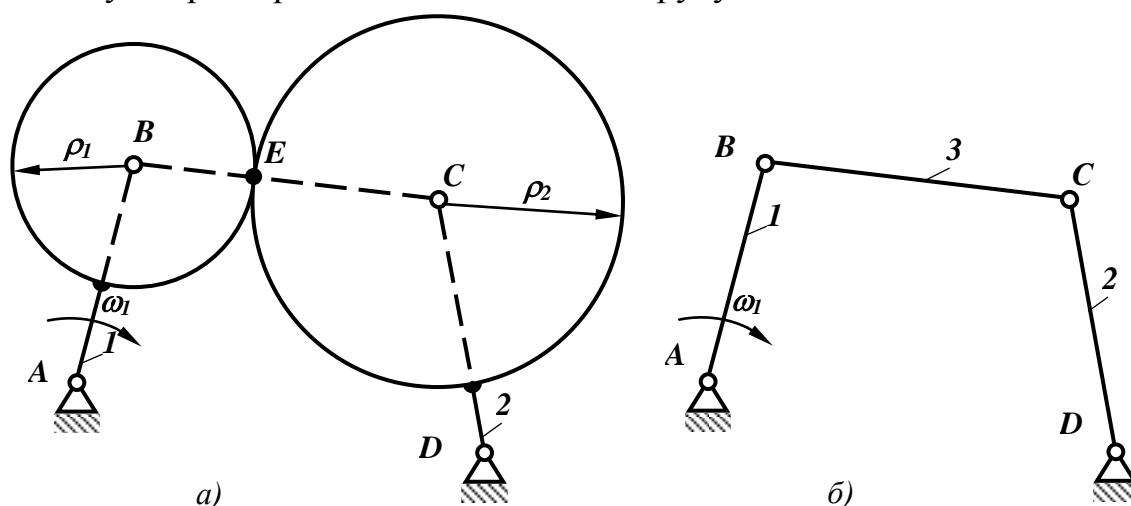


Рисунок 8.10 – Механізм з вищою кінематичною парою (а) та замінювальний механізм (б)

Якщо один з радіусів кривизни дорівнює нескінченності (рис. 8.11, а), то у відповідній точці ставиться поступальна кінематична пара (рис. 8.11, б).

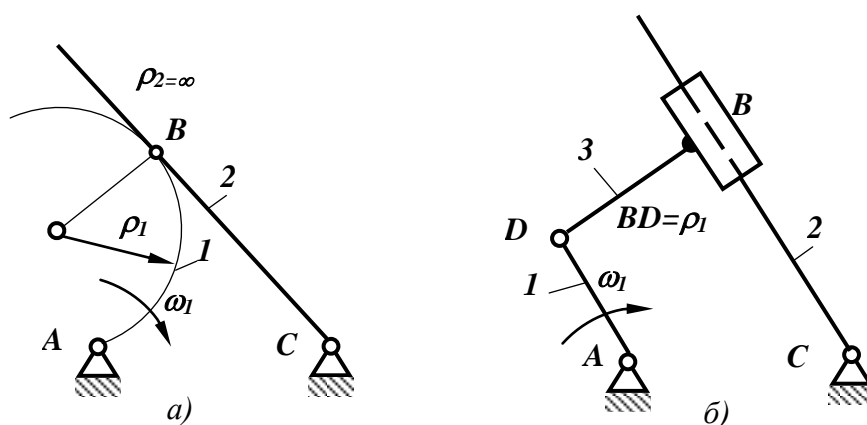


Рисунок 8.11 – Механізм з вищою кінематичною парою (а) та замінювальний механізм (б)

### 3 Лабораторне обладнання і приладдя

При виконанні лабораторної роботи використовують окремі моделі механізмів, а також комплект моделей плоских механізмів типу ТММ-5М. Для виконання роботи необхідні також вимірювальні та креслярські інструменти.

#### **4 Послідовність виконання роботи**

4.1 Ознайомитися з умовними позначеннями, що використовуються для зображення кінематичних схем.

4.2 Ознайомитися з роботою механізмів виданих викладачем. З'ясувати характер руху ланок, а також, які кінематичні пари утворюють ланки між собою (обертальні, поступальні чи вищі).

4.3 Накреслити у масштабі одну із кінематичних схем механізму, а схеми інших (двох, трьох) механізмів зобразити без масштабу.

4.4 Виконати структурний аналіз кожної із схем заданих механізмів.

4.4.1 Позначити ланки і кінематичні пари. Ланки рекомендується позначати арабськими цифрами, розпочинаючи від ведучої, а кінематичні пари – латинськими великими літерами. Якщо деякі ланки механізму утворюють вищі кінематичні пари, то на початку структурного аналізу їх необхідно замінити ланками з нижчими кінематичними парами, а потім виконати структурний аналіз.

4.4.2 Скласти таблицю кінематичних пар, де визначити характер відносного руху ланок; вказати, які ланки створили цю пару; визначити клас кінематичної пари.

4.4.3 Визначити ступінь рухомості механізму за формулою Чебишева. Якщо необхідно, то усунути пасивні зв'язки і зайві ступені вільності.

4.4.4 Позначити на схемі механізму ведучу ланку.

4.4.5 Відокремити структурні групи, які входять до складу механізму, визначити їх клас і порядок. Для цього:

- відокремлення груп розпочинають з ланок і кінематичних пар, найбільш віддалених від ведучої ланки, стараючись від'єднати спочатку групи Ассура II класу;

- перевіряють ступінь рухомості частини механізму, що залишилася, встановлюючи, чи буде відокремлений кінематичний ланцюг дійсно структурною групою;

- визначити клас, порядок, вид відокремленої групи Ассура. Якщо групу Ассура II класу віднайти не вдається, треба спробувати виділити групу Ассура III класу тощо;

- виділення груп продовжувати доти, поки не дійдемо до механізму I класу (ведучої ланки та стояка).

4.4.6 За класом старшої групи визначити клас і порядок механізму в цілому.

4.4.7 Записати формулу будови механізму.

#### **5 Зміст звіту**

5.1 Звіт з лабораторної роботи оформлюється згідно з вимогами до текстової конструкторської документації (ГОСТ 2.105-93).

5.2 В звіті відображається мета лабораторної роботи, основні теоретичні відомості, що супроводжуються необхідними ілюстраціями.

5.3 Кінематична схема механізму, числові значення розмірів ланок, масштабний коефіцієнт довжин  $\mu_l$ .

5.4 Структурна схема механізму.

5.5 Характеристика кінематичних пар (табл. 8.4.4).

5.6 Визначення ступеня рухомості механізму.

5.7 Виділення і класифікація структурних груп, які входять до складу механізму.

5.8 Формула будови механізму.

5.9 Вказати клас і порядок всього механізму.

5.10 Висновки.

Таблиця 8.4.4 – Характеристика кінематичних пар

Позначення кінематичних пар				
Ланки, які утворюють кінематичну пару				
Назва кінематичної пари				
Клас кінематичної пари				

## 6 Контрольні запитання для самопідготовки

6.1 Що називається деталлю, ланкою?

6.2 Що називається кінематичною парою? Класифікація кінематичних пар.

6.3 Що називається кінематичним ланцюгом та механізмом?

6.4 Які механізми називаються плоскими і які просторовими? Написати формулу для визначення ступеня рухомості плоских та просторових механізмів. Навести приклади.

6.5 Навести приклади механізмів із зайвими ступенями вільності та пасивними ланками.

6.6 Що називається структурною схемою механізму? Чим відрізняється кінематична схема від структурної?

6.7 Група Ассура. Визначення і ознаки. Класифікація груп Ассура. Клас, порядок і вид.

6.8 Який механізм називають механізмом I класу (ведучою ланкою)?

6.9 Послідовність структурного аналізу і синтезу механізмів.

6.10 Як проводять заміну вищих кінематичних пар? Навести приклади.

6.11 Як записується формула будови механізму?

6.12 Виконати структурний синтез механізму за формулою будови:  
 $I \rightarrow II^3_2 \rightarrow II^4_2; III \leftarrow I \rightarrow II^I_2 \rightarrow II^3_2$ .

6.13 Визначити число ступенів вільності просторового маніпулятора. Навести приклад.

## Лабораторна робота № 5

### Визначення основних геометричних параметрів евольвентних циліндричних прямозубих зубчастих коліс

#### 1 Мета роботи

Ознайомитися з основними елементами і геометрією зубчастих коліс. Навчитися визначати основні параметри циліндричного прямозубого стандартного колеса з евольвентним профілем зубця.

#### 2 Теоретичні відомості

Визначення параметрів зубчастих коліс за результатами обмірювання їх зразків виконується з метою відновлення або виготовлення коліс під час ремонту машин, проведення експертизи, пов'язаної з виясненням причин поломок і аварій, а також під час контролю розмірів у процесі виготовлення зубчастих коліс.

Зубчастим колесом називається зубчаста ланка із замкненою системою зубців, які забезпечують неперервний рух другої зубчастої ланки (ГОСТ 16530-70). Зубчасті колеса призначені для передачі обертального

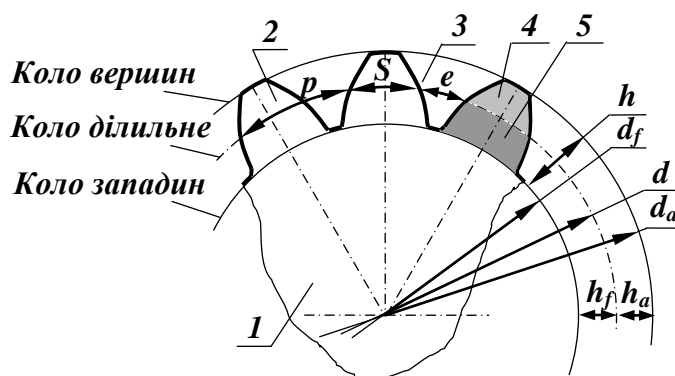


Рисунок 8.12 – Основні елементи та геометричні параметри зубчастого колеса

руху (а також моментів сил) з одного вала на інший. В зубчастому колесі (рис. 8.12) виділяють такі основні елементи: тіло 1 зубчастого колеса, зубець 2, западина 3. В свою чергу зубець поділяють на головку 4 і ніжку 5. Коло, яке обмежує ніжку зубця, називається *колом вершин*. Коло, яке обмежує ніжку зубця зі сторони тіла колеса,

називається *колом западин*. Коло, яке поділяє зубець на ніжку та головку зубця, називається *ділільним*. До основних параметрів циліндричного прямого зубчастого колеса належать: кількість зубців  $z$ , модуль  $m$ , кут  $\alpha$  вихідного контуру інструмента для нарізання зубців, діаметр  $d$  ділільного кола, діаметр  $d_a$  кола вершин, діаметр  $d_f$  кола западин, діаметр  $d_b$  основного кола, крок  $p$  зубців по ділільному колу, товщина  $S$  та ширина  $e$  зубця по ділільному колу, висота  $h_a$  головки і висота  $h_f$  ніжки зубця, висота  $h$  зубця.

Усі розміри зубчастих коліс можна виразити через наведені вище параметри. Деякі параметри (наприклад, діаметри кола вершин і западин) можна виміряти безпосередньо, але більшість параметрів визначаються вимірами і розрахунками.

Головний параметр зубчастого колеса – *модуль* – це відношення

$$m = \frac{p}{\pi}, \quad (8.5.1)$$

де  $p$  – крок по ділильному колу.

Відстань між однойменними точками двох сусідніх профілів зубців, виміряну по дузі ділильного кола, називають *кроком* зубчастого колеса (зачеплення):

$$p = S + e, \quad (8.5.2)$$

де  $S$  – товщина зубця;

$e$  – ширина западини.

Діаметр ділильного кола  $d$ , число зубців  $z$  і крок  $p$  поєднані рівнянням

$$zp = \pi d,$$

звідки випливає фізичний зміст модуля

$$m = d/z. \quad (8.5.3)$$

Тобто, *модуль* – це кількість міліметрів діаметра ділильного кола, що припадає на один зубець. Модуль визначає міцність зубця на згин. Одиниця вимірювання модуля – мм.

Значення модуля стандартизовані (СТ СЕВ 310-76). Тому отриманий під час вимірювання або розрахунків модуль повинен бути заокруглений до ближчого стандартного значення (табл. 8.5.1). При виборі модуля зубців слід надавати перевагу значенням з першого ряду.

Таблиця 8.5.1 – Стандартні значення модуля в мм

1-й ряд	0,8	1,0	1,25	1,5	2	2,5	3	4	5	6	8	10
2-й ряд	0,9	1,125	1,375	1,75	2,25	2,75	3,5	4,5	5,5	7	9	11

Модуль входить у всі найважливіші розміри елементів колеса і зубчастої передачі. У двох коліс, що знаходяться в зачепленні, повинен бути однаковий крок, а отже, і модуль. Висота головки нормального колеса  $h_a = m$ , а висота ніжки  $h_f = 1,25m$ , що забезпечує радіальний зазор між зубцями коліс, що знаходяться у зачепленні:  $c = c \cdot m = 0,25m$ . Повна висота зубця  $h = 2,25m$ .

Розрахункові значення діаметрів кіл вершин  $d_a$  і западин  $d_f$  коліс з зовнішніми зубцями:

$$d_a = d + 2h_a = mz + 2m = m(z + 2); \quad (8.5.4)$$

$$d_f = d - 2h_f = mz - 2 \cdot 1,25 \cdot m = m(z - 2,5). \quad (8.5.5)$$

Формули (8.5.4) і (8.5.5) можна застосувати при визначенні модуля колеса:

$$m = \frac{d_a}{z + 2}; \quad (8.5.6)$$

$$m = \frac{d_f}{z - 2,5}. \quad (8.5.7)$$

В державах з дюймовою системою мір розміри зубців інструменту і коліс визначають не модулем, а пітчем (*pitch* – крок). Діаметральний пітч  $p_d$  показує кількість зубців колеса, що припадає на один дюйм (25,4 мм) діаметра ділильного кола:

$$p_d = \frac{z}{d(\text{дюйм})}.$$

Пітч  $p_d$  і модуль  $m$  пов'язані залежністю

$$m = \frac{25,4}{p_d}.$$

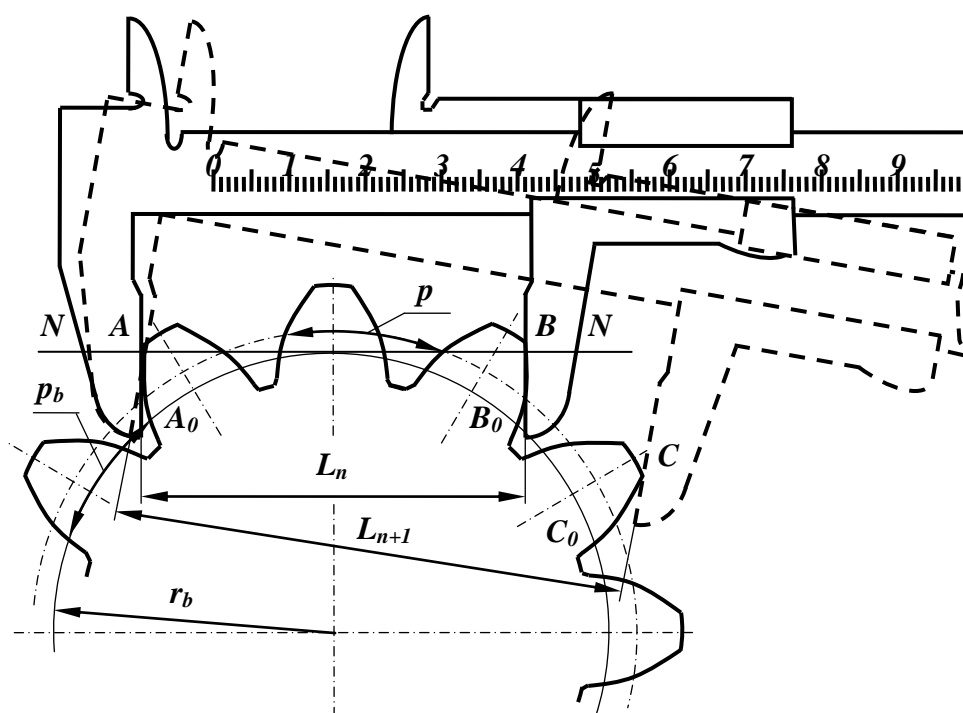


Рисунок 8.13 – Схема вимірювання довжин спільних нормалей  $L_n$  і  $L_{n+1}$



Геометричні розрахунки модульних і півцевих коліс однакові.

Для визначення модуля розрахункового значення можна також скористатися відомостями про основні властивості евольвенти: нормаль у будь-якій точці евольвенти є дотичною до основного кола; відстань між двома однойменними суміжними профілями зубців, виміряна вздовж нормалі до евольвенти, завжди стала і дорівнює кроку на основному колі. Звідси можна зробити висновок, що якщо охопити декілька зубців колеса штангенциркулем (розмір  $AC$  на рис. 8.13), то лінія  $AC$  буде дотичною до основного кола, тобто ця лінія перпендикулярна в точках  $A$  і  $C$  до робочих губок штангенциркуля а, отже, нормальна профілям зубців в цих точках. Відстань між різними боковими поверхнями зубців, виміряна по спільній нормалі, називається довжиною спільної нормалі.

Зрозуміло, що якщо перекочувати відрізок  $AC$  по основному колу (за годинниковою і проти годинникової стрілки), то за властивістю евольвенти точка  $A$  прийде в точку  $A_0$ , точка  $C$  – в точку  $C_0$  і точка  $B$  – в точку  $B_0$ . Із рис. 8.13 видно, що відрізок  $BC$  являє собою розгортку дуги  $B_0C_0$  основного кола, тобто  $\overline{BC} = B_0C_0 = p_b$ .

Таким чином, якщо виміряти спочатку розмір  $L_n$ , що відповідає кількості  $z_n$  зубців, а потім виміряти розмір  $L_{n+1}$ , тобто охопити штангенциркулем на один зуб більше, то крок по основному колу  $p_b$  визначиться різницею цих вимірювань:

$$p_b = L_{n+1} - L_n.$$

Щоб губки штангенциркуля дотикалися у обох випадках евольвентних ділянок профілів, необхідно вибирати число охоплених зубців  $z_n$  із табл. 8.5.2 залежно від числа зубців  $z$  колеса.

З іншого боку

$$p_b = \pi m \cos \alpha. \quad (8.5.9)$$

Звідси розрахункове значення модуля зубчастого колеса

$$m^* = \frac{p_b}{\pi \cdot \cos \alpha} = \frac{L_{n+1} - L_n}{\pi \cdot \cos \alpha}, \quad (8.5.10)$$

де  $\alpha = 20^\circ$  – кут профілю вихідного контуру ( $\cos 20^\circ = 0,9397$ ).

Таблиця 8.5.2 – Значення  $z_n$  в залежності від  $z$

Число зубців ( $z$ ) колеса	12-18	19-27	28-36	37-45	46-54	55-63	64-72	73-81
Число охоплених для обмірювання зубців ( $z_n$ )	2	3	4	5	6	7	8	9

Оскільки розміри  $L_{n+1}$  і  $L_n$  визначені з деякими похибками (при виготовленні колеса і вимірюванні), одержане розрахункове значення модуля  $m^*$  слід округлити до ближчого стандартного (табл. 8.5.1).

Вибравши стандартне значення модуля, обчислюємо діаметр ділильного  $d$  і основного  $d_b$  кола:

$$d=mz; \quad (8.5.11)$$

$$d_b=mz\cos\alpha, \quad (8.5.12)$$

а також кроки ділильний  $p$  і основний  $p_b$ :

$$p=\pi \cdot m; \quad (8.5.13)$$

$$p_b=\pi m\cos\alpha. \quad (8.5.14)$$

Для визначення фактичних значень діаметрів вершин  $d_a$  і западин  $d_f$  зубчастих коліс з парним числом зубців вимірювання виконують безпосередньо штангенциркулем чи мікрометром, як показано на рис. 8.14, а, а для коліс з непарним числом зубців – згідно з рисунком 8.14, б за формулами:

$$d_a=d_{омс}+2H_a; \quad (8.5.15)$$

$$d_f=d_{омс}+2H_f. \quad (8.5.16)$$

Для нульових (невиправлених) коліс значення  $d_a$  і  $d_f$  одержані вимірюванням, повинні дорівнювати розрахунковим.

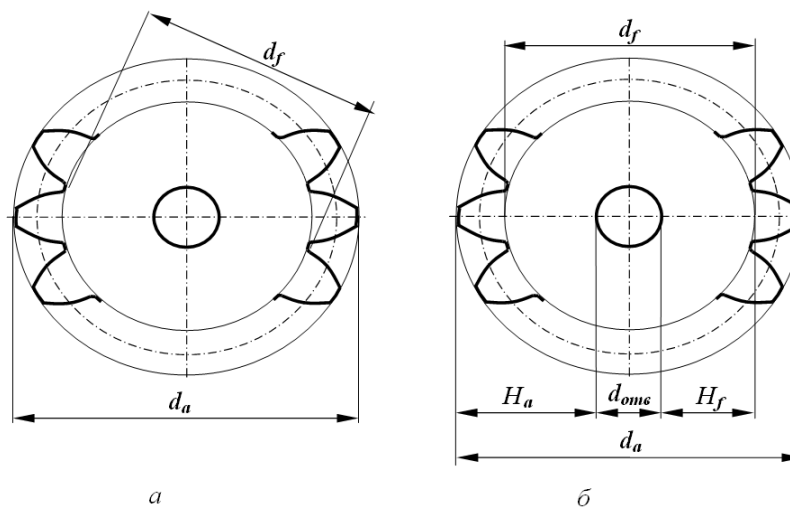


Рисунок 8.14 – Схема вимірювання  $d_a$  і  $d_f$  при парній кількості зубців (а) та при непарній (б)

На практиці крім нульових коліс використовують зубчасті колеса, виготовлені (нарізані) зі зміщенням зубонарізного інструменту. Під зміщенням розуміють зміну міжосьової відстані різального інструменту і заготовки. В цьому випадку необхідно визначити коефіцієнт зміщення  $x$ , що виражає зміщення інструменту від нульового положення в частках модуля:

$$x = \frac{S_b / t_b \cdot \pi - \pi/2 - z \cdot \operatorname{inv} \alpha}{2 \operatorname{tg} \alpha}, \quad (8.5.17)$$

де  $\operatorname{inv} \alpha = \operatorname{tg} \alpha - \alpha$  ( $\operatorname{inv} 20^\circ = 0,0149$ );

$S_b$  – фактична товщина зубця по основному колу, яка визначається через вимірювання довжини спільної нормалі  $L_{n+1}$  за формулою:

$$S_b = L_{n+1} - \pi p_b. \quad (8.5.18)$$

Для додаткового контролю зіставляється теоретична розрахункова  $S^T$  і фактична  $S^\Phi$  товщина зубця по хорді на ділильному колі.

Для коліс, нарізаних без зміщення, товщина зубця по ділильному колу

$$S^T = 0,5\pi m, \quad (8.5.19)$$

а товщина зубця по хорді ділильного кола

$$S_x^T = d \cdot \sin \beta, \quad (8.5.20)$$

$$\text{де } b = \frac{360^\circ}{4z} = \frac{90^\circ}{z}.$$

Якщо коефіцієнт зміщення  $x \neq 0$ , то теоретична товщина зубця по ділильному колу:

$$S^T = \frac{\pi m}{2} + 2mx \operatorname{tg} \alpha. \quad (8.5.21)$$

Фактичну товщину зубця  $S_x^\Phi$  вимірюють штангензубоміром (рис. 8.15), який складається із кутника 1, що має горизонтальну і вертикальну шкали. По горизонтальній шкалі переміщується рамка 2 з губкою 3, на якій закріплено ноніус з точністю відрахунку 0,02 мм, по вертикальній шкалі переміщується рамка 4 з фіксатором висоти 5, на якому закріплено ноніус 6.

Для вимірювання товщини  $S_x^\Phi$  необхідно фіксатор 5 висоти встановити (за допомогою мікрогвинта 7) на розмір  $h_x$ , який розраховується за формулою

$$h_x = \frac{d_a - d \cos \beta}{2}, \quad (8.5.22)$$

і закріпити рамку 4 гвинтом 10. Фіксатор необхідно оперти на вершину зубця і наблизити губки 1 і 3 (за допомогою мікрогвинта 8) так, щоб вони дотикалися бокових поверхонь зубця, закріпити рамку 2 гвинтом 11 і на горизонтальній шкалі зафіксувати розмір  $S_x^\Phi$ .

Різниця ( $S_x^{\Phi} - S_x^T$ ) впливає на сталість передаточного відношення і

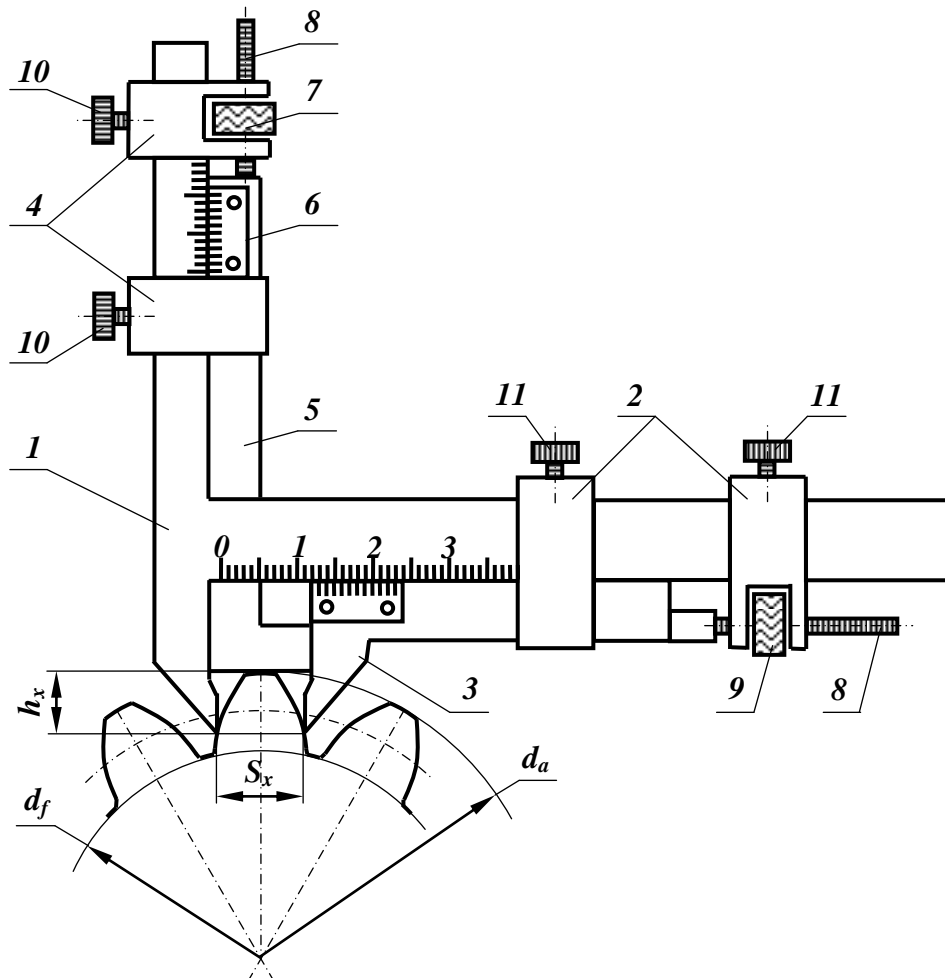


Рисунок 8.15 – Схема вимірювання фактичної товщини зубця за допомогою штангензубоміра

може бути використана для:

- перевірки налагодження зуборізного верстата;
- визначення класу точності зубчастого колеса;
- прийняття рішення про необхідність заміни колеса при ремонті зубчастого механізму.

### 3 Лабораторне обладнання та приладдя

1. Прямозубе циліндричне зубчасте колесо з евольвентним профілем зубців.
2. Зубомірний мікрометр або штангенциркуль.

### 4 Послідовність виконання роботи

- 4.1 Виконати ескіз зубчастого колеса, виміряти діаметри кіл вершин  $d_a$  і западин  $d_f$ , підрахувати кількість зубців колеса  $z$ .

4.2 Виміряти довжини спільних нормалей  $L_n$  і  $L_{n+1}$ , попередньо визначивши число зубців  $z_n$ , що необхідно охопити, із табл. 1.2.

4.3 Визначити розрахункове значення модуля за формулами (8.5.6) і (8.5.10) та округлити його до стандартного.

4.4 Обчислити параметри зубчастого колеса (табл. 8.5.3). (В формули підставляти стандартне значення модуля).

4.5 Накреслити робоче креслення зубчастого колеса.

Таблиця 8.5.3 – Результати вимірювання розмірів (мм)

Номер вимірювання	$L_n(z_n)$	$L_{n+1}(z_{n+1})$	$d_a$	$d_f$
1				
2				
3				
Середнє значення				

Таблиця 8.5.4 – Розрахунок геометричних параметрів зубчастого колеса

Назва параметра	Позначення та формула	Результати розрахунку
Діаметр (мм): ділильного кола	$d = mz$	$d =$
кола вершин	$d_a = m(z+2)$	$d_a =$
кола западин	$d_f = m(z-2,5)$	$d_f =$
кола основного	$d_b = d \cdot \cos \alpha$	$d_b =$
Крок (мм) по ділильному колу	$p = \pi m$	$p =$
по основному колу	$p_b = \pi m \cdot \cos \alpha$	$p_b =$
Товщина (мм) зубця по ділильному колу	$S = 0,5 \cdot \pi \cdot m$	$S =$
Ширина (мм) западини по ділильному колу	$e = 0,5 \cdot \pi \cdot m$	$e =$
Висота (мм): ніжки зубця	$h_f = 1,25 \cdot m$	$h_f =$
головки зубця	$h_a = m$	$h_a =$
зубця	$h = 2,25 \cdot m$	$h =$

## 5 Зміст звіту та форма протоколу

5.1 Звіт з лабораторної роботи оформлюється згідно з вимогами до текстової конструкторської документації (ГОСТ 2.105-93).

5.2 В звіті відображається мета лабораторної роботи, основні теоретичні відомості, що супроводжуються необхідними ілюстраціями.

5.3 Схема замірів довжини загальної нормалі. Всі розрахункові формули.

5.4 Ескіз зубчастого колеса з підрахованим числом зубців  $z =$  .

5.5 Результати замірювання розмірів у вигляді табл. 8.5.3.

5.6 Розрахункове значення модуля (мм):

$$m^* = \frac{L_{n+1} - L_n}{\pi \cos \alpha}; \quad m^* = \frac{d_a}{z + 2}. \quad (8.5.23)$$

5.7 Стандартне значення модуля (табл. 8.5.1)

$$m = \quad (\text{мм}).$$

5.8 Розрахунок геометричних параметрів зубчастого колеса у вигляді табл.

5.9 Робоче креслення зубчастого колеса.

5.10 Висновки.

## 6 Контрольні запитання для самопідготовки

6.1 Які основні елементи зубчастого колеса ви знаєте?

6.2 Що таке модуль? Який фізичний зміст модуля?

6.3 Яка крива називається евольвентою? Властивості евольвенти.

6.4 Що називається довжиною загальної нормалі  $L_n$ ?

6.5 Що називається кроком зачеплення?

6.6 Написати формули для визначення основних геометричних параметрів зубчастого колеса та показати ці параметри на кресленні.

6.7 Яке коло називається ділільним, основним, початковим?

6.8 Що називається коефіцієнтом зміщення?

6.9 Яку величину необхідно визначити, щоб виявити, чи виготовлено колесо без зміщенням або зі зміщенням інструменту?

## Лабораторна робота № 6

### Моделювання процесу виготовлення зубчастих коліс методом обкочування

#### 1 Мета роботи

Ознайомитись з експериментальним профілюванням евольвентних зубців методом обкочування і дослідити вплив зміщення інструментальної рейки на форму і розміри зубців.

#### 2 Теоретичні відомості

На практиці використовують два основних методи виготовлення зубчастих коліс: копіювання і обкочування. При методі *копіювання* профіль ріжучої частини інструменту повинен збігатися з профілем западин між зубцями, які нарізуються (інструментом для нарізання зубців, при даному способі служать модульні фрези (рис. 8.16, *а* і *б*), протяжки, стругальні або довбальні різці, шліфувальні круги та ін.).

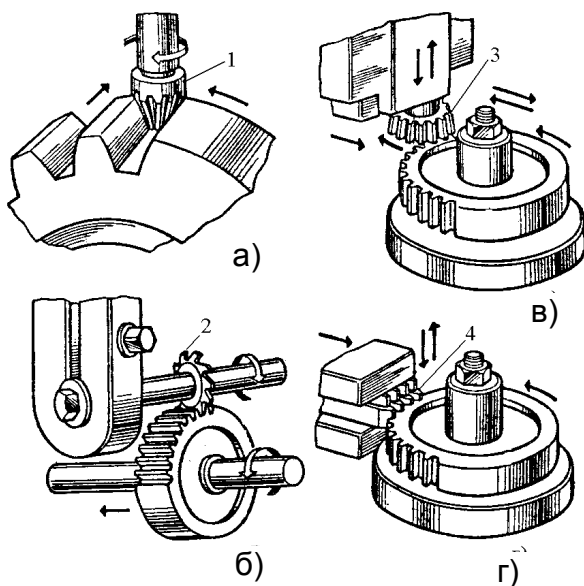


Рисунок 8.16 – Виготовлення зубчастих коліс копіюванням за допомогою фрез (*а* і *б*) та обкочуванням за допомогою довбача і гребінки (*в* і *г*): 1 – пальцева фреза; 2 – дискова фреза; 3 – довбач; 4 – гребінка

Виготовлення зубчастих коліс методом обкочування (обгинання) застосовують значно ширше, якнайпродуктивніше і точніше. Метод обкочування полягає в тому, що ріжучому інструменту (наприклад, гребінці) і заготовці надають такий же відносний рух, який виникає при нормальному зачепленні колеса з рейкою. При нарізанні зубців цим методом ріжучі кромки інструменту, переміщуючись, займають відносно профілів зубців коліс ряд послідовних положень, вирізаючи метал між зубцями і формуючи їх профілі. Евольвентні профілі зубців утворюються як обвідні ряду положень ріжучих кромки

інструменту, що перекочується по профілю зубця.

Методом обкочування зубчасті колеса нарізають на спеціальних зубонарізних верстатах: гребінками (на зубостругальних (рис. 8.16, *г*), черв'ячними фрезами (на зубофрезерних) і довбалами (інструментами, що

мають форму зубчастого колеса – на зубостругальних верстатах (рис. 8.16, в). Однією із переваг методу обточування є те, що на зуборізних верстатах, одним і тим же інструментом можна нарізати евольвентні колеса з будь-яким числом зубців і різною формою профілю зубця. При цьому форма і розміри зубців колеса, що виготовляється, визначається розмірами інструменту і його розміщенням відносно заготовки.

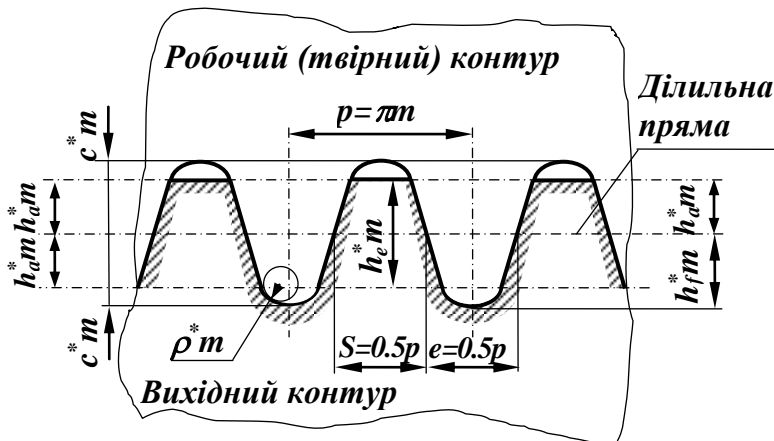


Рисунок 8.17 – Вихідний і робочий контури інструментальної рейки

(рис. 8.17). Параметри вихідного контуру за СТРЕВ368 – 76 мають такі значення: кут профілю  $\alpha = 20^\circ$ ; коефіцієнт висоти головки зубця  $h_a^* = 1$ ; коефіцієнт висоти ніжки зубця  $h_f^* = 1,25$ ; коефіцієнт радіального зазору в парі вихідних контурів  $C^* = 0,25$ ; коефіцієнт радіуса кривизни перехідної кривої  $\rho_f^* = 0,38$ ; коефіцієнт граничної висоти  $h_e^* = 2$ .

Робочий контур інструментальної рейки окреслюють по западинах вихідного контуру. Базова лінія вихідного контуру, на якій товщина зубця дорівнює ширині западини, називається його *ділильною прямою*. Ділильна пряма ділить зубець твірного контуру по висоті на дві рівні частини, а тому її часто називають *середньою лінією*. Відстань між однойменними профілями сусідніх зубців на ділильній або іншій паралельній їй прямій називають *кроком (p)* зубців вихідного контуру. Одним із основних параметрів контуру є *модуль (m)*

$$m = \frac{p}{\pi}, \quad (8.6.1)$$

який вимірюється в мм і регламентований ГОСТ 9563-80.

В залежності від розташування робочого контуру інструментальної рейки відносно заготовки (рис. 8.18), можна нарізати три різних варіанти зубчастих коліс: нульові, додатні і від'ємні.

*Нульові* зубчасті колеса отримують тоді, коли рейка встановлена так, що ділильна пряма (Дп) рейки є дотичною до ділильного кола майбутнього

Для забезпечення сприятливих умов стандартизації виготовлення зубчастих коліс і їх взаємозамінності в передачах за основу стандарту прийнято вихідний контур, який є зубчастою рейкою із симетричними трапеце-подібними зубцями



колеса (рис. 8.18, а), тобто коли відсутнє зміщення між ділильною прямою і ділильним колом.

Ділильним колом колеса називається таке коло, на якому крок  $p$  зачеплення дорівнює кроку інструментальної рейки  $p = \pi m$ .

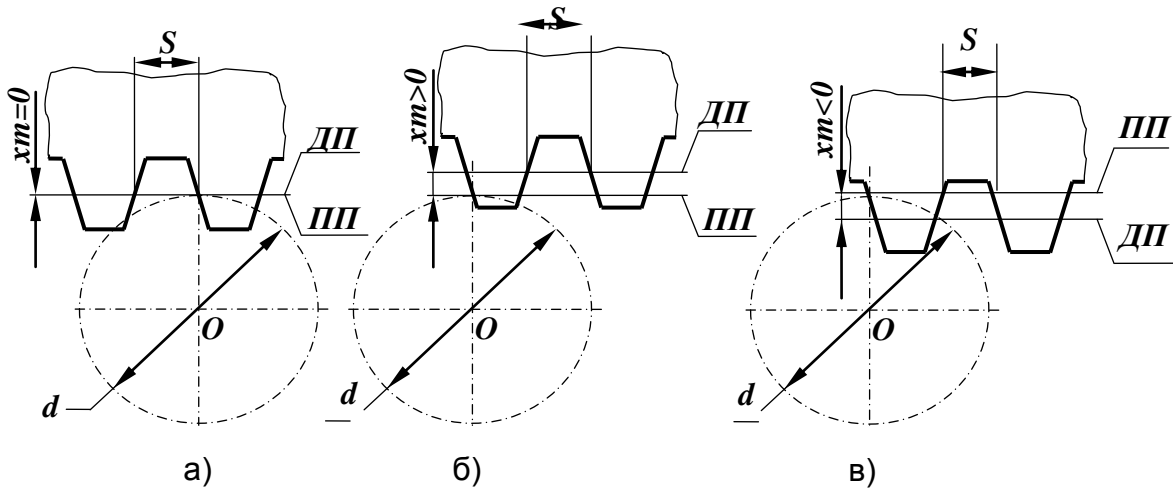


Рисунок 8.18 – Схеми нарізування зубчастих коліс: а) без зміщення; б) з додатним зміщенням; в) від’ємним зміщенням

В нульовому колесі товщина зубця по ділильному колу колеса  $S$  дорівнює ширині западини  $e$ , а тому  $S = e = \frac{p}{2}$ ; висота головки зубця  $h_a = m$ ; висота ніжки зубця:

$$h_f = h_a + c = 1,25m. \quad (8.6.2)$$

1. Рейка встановлена так, що ділильна пряма відведена від ділильного кола на деяку величину  $mx$  (рис. 6.3, б). У цьому випадку по ділильному колу зубчастого колеса, яке нарізається, буде обкочуватися не ділильна пряма (ДП), а пряма, яка називається *початковою прямою* (ПП) рейки. Відстань  $b = mx$  між ділильною і початковими прямими називається *зміщенням рейки*, а  $x = b/m$  – *коефіцієнтом зміщення*. Зміщення називають *додатним*, якщо рейку віддаляють від центра заготовки, тобто коли ділильна пряма і ділильне коло не перетинаються. При такому зміщенні висота ніжки зубця  $h_f$  менша, ніж у “нульового”, на величину  $xm$ . Ширина зубця по ділильному колу більша, ніж у “нульового” і визначається за формулою:  $S = p/2 + 2xmtg\alpha$ . Таке колесо називають колесом з *додатним зміщенням* або просто *додатним*.

2. Рейка встановлена так, що ділильна пряма (ДП) перетинає ділильне коло колеса (рис. 6.3.в), тобто рейка зміщена від номінального положення до центра заготовки. Таке зміщення називають *від’ємним*, а зубчасте колесо – з *від’ємним зміщенням* або просто *від’ємним*. У таких зубчастих колесах висота ніжки зубця  $h_f$  більша, ніж у “нульового”, на

величину зміщення  $xm$ , а ширина зубця по ділильному колу – менша і дорівнює ширині западини рейки по початковій прямій (ПП), тобто:

$$S = \frac{P}{2} - 2xmtg\alpha. \quad (8.6.3)$$

Колеса нарізані зі зміщенням називають ще виправленими або *коригованими*. Коригування зубчастих коліс виконують з метою: запобігання підрізуванню ніжки зубця; зменшення зношування; підвищення міцності зубця.

#### Підрізування та загострення зубців

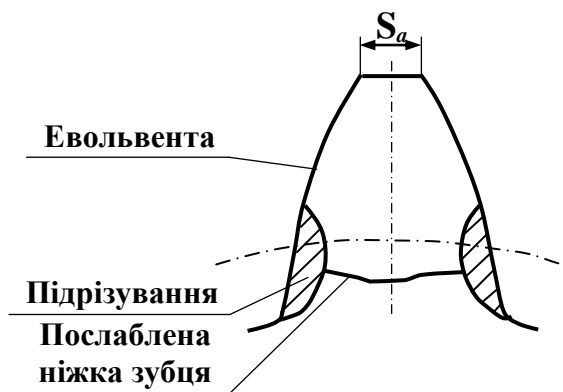


Рисунок 8.19 – Явища підрізування та загострення зубця

При нарізуванні зубчастих коліс з числом зубців  $z < 17$ , виникає *явище підрізування* ніжки зубця (рис. 8.19), яке полягає в тому, що головка різального інструменту врізається в ніжку зубця колеса, що призводить до зменшення товщини зубця біля ніжки, а отже і його міцності на згин.

Щоб уникнути такого небажаного явища, необхідно змістити рейку від центра заготовки на величину найменшого зміщення  $b_{min} = x_{min} \cdot m$ . Значення мінімального коефіцієнта

зміщення визначають за формулою:

$$x_{min} = \frac{17 - z}{17}, \quad (8.6.4)$$

де  $z$  – число зубців колеса, що виготовляється.

На практиці величину коефіцієнта зміщення  $x$  приймають більшою від  $x_{min}$ , але значне збільшення  $x$  може призвести до іншого небажаного явища – *загострення зубців*, при якому товщина зубця по колу вершин  $S_a < 0,2m$  (рис. 8.19). Для усунення загострення зубців, необхідно вибрати таке зміщення інструменту, що задовольняє умову  $S_a \geq [S_a]$ , де  $[S_a] = (0,2 \dots 0,25)m$  – допустиме значення товщини зубця по колу вершин.

У коліс нарізаних зі зміщенням і без нього (рис. 8.18) однаковими залишаються такі параметри, як число зубців  $z$ , модуль  $m$ , а отже і діаметр ділильного кола  $d$ , крок зубців по ділильному колу  $p_m$ , а різними – товщина зубців по ділильному колу  $S$ , ширина западини по ділильному колу  $e$ , діаметр кіл вершин  $d_a$ , діаметр кіл западин  $d_f$ , а також співвідношення між висотою головки  $h_a$  і ніжки  $h_f$  зубців.



#### 4 Послідовність виконання роботи

4.1 Ознайомитися з будовою і принципом дії приладу ТММ-42. Записати номер приладу та задані величини:  $m, d, z$ .

4.2 Паперову заготовку поділити на три рівних сектори і закріпити її на верхньому дискові накладкою 3 за допомогою гвинта 4. У першому секторі потрібно викреслити зубці нульового колеса, а в другому і в третьому – додатного і від'ємного коліс.

4.3 Викреслювання зубців *нульового* колеса на приладі виконати таким чином:

- встановити рейку 1 так, щоб ділильна пряма дотикалась до ділильного кола (поділка рейки повинна збігатися з нульовою поділкою шкали 10);

- натиснути пружину 8 і відвести рейку в крайнє праве положення;

- диск повернути так, щоб початок першого сектора збігся з лівим зубцем рейки;

- гострим олівцем обвести зубці рейки, натиснути на клавішу 9 і перемістити рейку вліво на один крок 4 – 5 мм і знову окреслити зубці рейки. Так повторювати доти, поки рейка займе крайнє ліве положення, а на заготовці отримаємо 2 або 3 зубці нульового колеса.

4.4 Встановити диск із заготовкою і рейку у вихідне положення для побудови зубців в наступному секторі.

4.5 Визначити число зубців колеса, які нарізаються, за формулою  $z = \frac{d}{m}$ .

4.6 Визначити мінімальний коефіцієнт зміщення  $x_{min}$  рейки, який забезпечує усунення підрізування зубців, за формулою  $x_{min} = \frac{17 - z}{17}$ .

4.7 Визначити зміщення рейки  $b_1 = x_{min}m$

4.8 Змістити рейку від осі заготовки колеса на величину  $b_1$ , користуючись шкалою 10, і закріпити її гвинтами 7.

4.9 Викреслити два або три зубці *додатного* колеса, користуючись вказівками п. 3.

4.10 Змістити рейку до осі заготовки на величину  $b_2 = -b_1$  і викреслити у третьому секторі 2 – 3 зубці *від'ємного* колеса.

4.11 Обчислити за формулами, зазначеними у табл. 6.1, параметри *нульового, додатного і від'ємного* коліс.

4.12 Нанести на заготовку в кожному із секторів, обчислені в п. 11 значення діаметрів ділильного  $d$ , западин  $d_f$  і вершин  $d_a$  кіл *нульового, додатного та від'ємного* коліс.

4.13 Порівняти на заготовці товщину зубців по хорді ділильного кола, а також діаметри кіл западин і вершин нульового, додатного і від'ємного коліс.

4.14 Виконати аналіз результатів та зробити висновки.

4.15 Оформити звіт про роботу і прикласти до нього заготовку з викресленими профілями зубців коліс (рис. 8.21).

## 5 Зміст звіту

5.1 Звіт з лабораторної роботи оформлюється згідно з вимогами до текстової конструкторської документації (ГОСТ 2.105-93).

5.2 В звіті відображається мета лабораторної роботи, основні теоретичні відомості, що супроводжуються необхідними ілюстраціями

5.3 Вихідні дані: модуль зачеплення  $m$ ; діаметр ділительного кола  $d$ ; кут профілю  $\alpha$ .

5.4 Розрахунки значень параметрів зубчастих коліс, виготовлених з нульовим, додатним і від'ємним зміщенням інструментальної рейки (табл. 6.1.)

5.5 Результати обмірювань накреслених зубців зубчастих коліс (табл. 6.1.)

5.6 Аналіз результатів і висновки.

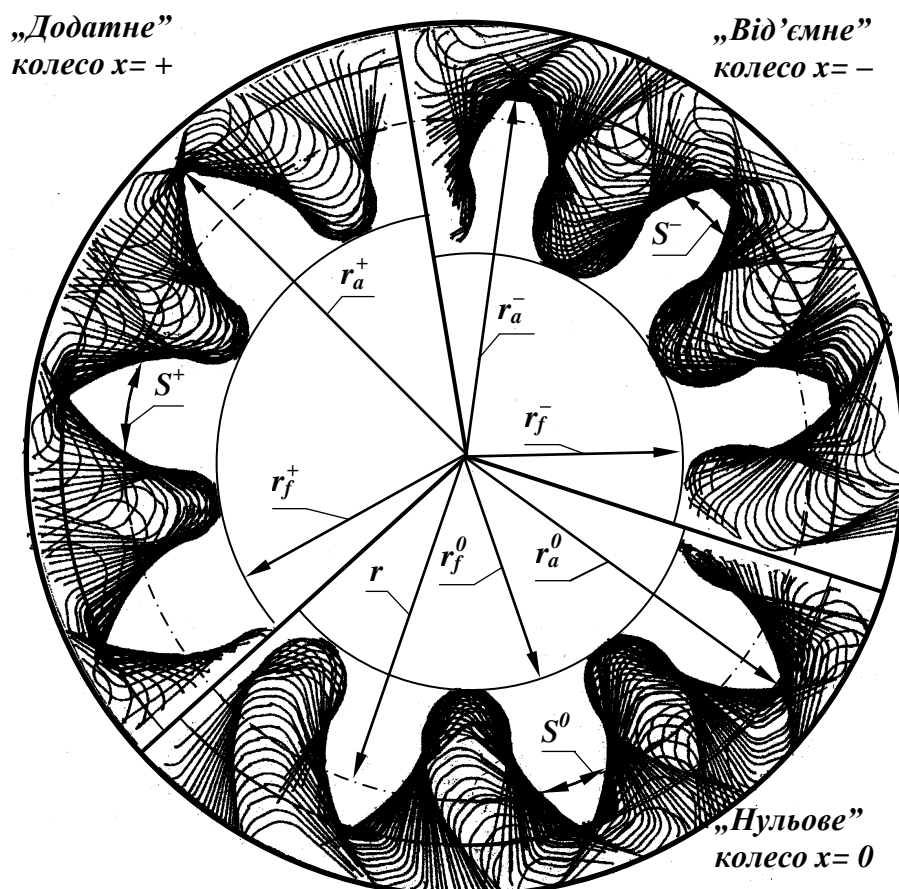


Рисунок 8.21 – Профілі зубців, що отримані при різних значеннях коефіцієнтів зміщення

Таблиця 8.6.1 – Розрахунок геометричних параметрів зубчастих коліс при різних зміщеннях рейки

Найменування параметра	Позначення параметра; розрахункові формули та обчислення		
	Нульове колесо	Додатне колесо	Від’ємне колесо
1. Модуль	$m =$ мм		
2. Діаметр ділительного кола	$d =$ мм		
3. Кут профілю	$\alpha = 20^\circ$		
4. Крок зачеплення	$p = \pi m =$		
5. Число зубців колеса	$z = d/m =$		
6. Діаметр основного кола	$d_b = d \cos \alpha =$		
7. Коефіцієнт зміщення	$x = 0$	$x_1 = (17-z)/17 =$	$x_2 = -x_1 =$
8. Зміщення	$b = 0$	$b_1 = m \cdot x_1 =$	$b_2 = -b_1 =$
9. Діаметр кола вершин	$d_a = m(z+2) =$	$d_a = m(z+2) + 2x_1 \cdot m =$	$d_a = m(z+2) - 2 x_2  \cdot m =$
10. Діаметр кола западин	$d_f = m(z-2,5) =$	$d_f = m(z-2,5) + 2x_1 \cdot m =$	$d_f = m(z-2,5) - 2 x_2  \cdot m =$
11. Товщина зубця по ділительному колу	$S = \pi \cdot m / 2 =$	$S = \pi \cdot m / 2 + 2x_1 \cdot m \cdot \operatorname{tg} \alpha =$	$S = \pi \cdot m / 2 - 2 x_2  \cdot m \cdot \operatorname{tg} \alpha =$
12. Товщина зубця по хорді ділительного кола	$S =$	$S =$	$S =$

## 6 Контрольні запитання для самопідготовки

6.1 Назвіть основні методи виготовлення зубчастих коліс. Вкажіть їх переваги і недоліки.

6.2 Як відбувається нарізання зубців методом обкочування?

6.3 Чому евольвентне зубчасте зачеплення має переважне застосування?

6.4 Які параметри визначають геометрію вихідного контуру?

6.5 Що таке коефіцієнт зміщення і зміщення інструментальної рейки?

6.6 В чому полягає явище підрізування зубця при виготовленні зубчастих коліс?

6.7 Яке зміщення називають додатним, а яке – від’ємним?

6.8 Які колеса називають нульовими, додатними і від’ємними? Їх основні відмінності.

6.9 Як змінюється товщина зубця в залежності від величини зміщення інструментальної рейки?

6.10 В яких випадках виконують коригування зубчастих коліс?

6.11 Як впливає зміщення інструментальної рейки на діаметр кола вершин і висоту головки зубця зубчастого колеса?

6.12 При якому зміщенні інструментальної рейки можна нарізати зубчасте колесо з числом зубців меншим, ніж мінімально допустиме?

6.13 Які різальні інструменти застосовують при виготовленні зубчастих коліс?

6.14 Яку пряму на рейці називають ділильною?

## Лабораторна робота № 7

### Визначення твердості та ударної в'язкості матеріалів

#### 1 Мета роботи

Ознайомитись з існуючими методами вимірювання твердості та ударної в'язкості матеріалів та навчитись експериментально їх визначати.

#### 2 Теоретичні відомості

##### 2.1 Твердість і методи її вимірювання

Під *твердістю* розуміється властивість поверхневого шару матеріалу чинити опір пружній і пластичній деформаціям або руйнуванню за місцевої контактної дії з боку іншого, більш твердого тіла (індентора) певної форми та розміру, що не отримує деформації під час цієї взаємодії. За обсягом застосування випробування на твердість конкурують з найбільш поширеними випробуваннями на статичний розтяг. Це пояснюється простотою, високою продуктивністю, відсутністю руйнування зразка деталі, можливістю оцінки інших властивостей (міцності, пластичності, зносостійкості і т. п.). а отже, і оброблюваності матеріалу в твердому стані.

Способи визначення твердості поділяються на *статичні* і *динамічні*, залежно від швидкості прикладання навантаження, а за способом його прикладання – на методи заглиблення під навантаженням і царапання. Найбільш поширені методи, в яких використовується статичне заглиблення індентора нормально до поверхні зразка, – це методи Брінелля, Роквелла, Віккерса і мікротвердості. В останньому випадку визначають твердість окремих зерен, фаз або структурних складових сплавів.

У всіх методах випробування на твердість дуже важливо якісно підготувати поверхневий шар зразка. Це має бути горизонтальна шліфувана поверхня, а для вимірювання мікротвердості – полірована. Поверхня, що досліджується, повинна бути строго паралельна опорній поверхні. Неплоскі зразки кріплять на спеціальних опорних столиках, що входять в комплект твердомірів.

Інденторами в твердомірах застосовують тіла певної геометричної форми (куля, піраміда, конус, голка), виготовлені з алмазу, твердого сплаву, загартованої сталі.

*Твердість за Брінеллем.* Згідно із стандартним (ГОСТ 9012-59) вимірюванням твердості за Брінеллем сталеву кульку діаметром  $D$



заглиблюють у випробовуваний зразок під прикладеним певний час навантаженням  $P$ ; після зняття навантаження вимірюють діаметр зразка відбитку, що залишився на поверхні (рис. 8.22). Діаметр відбитку виходить тим менший, чим більший опір матеріалу зразка деформації, що спричинена індентором. Число твердості за Брінеллем ( $HB$ ) є відношення навантаження  $P$ , що діє на кульковий індентор діаметром  $D$ , до площі  $A$  кульової поверхні відбитку, МПа;

$$H = P/A = 2P/\pi D \cdot (D - \sqrt{D^2 - d^2}), \quad (8.7.1)$$

де –  $D$  і  $d$  – відповідно діаметр кульки і відбитку, мм;  
 $P$  – навантаження, Н.

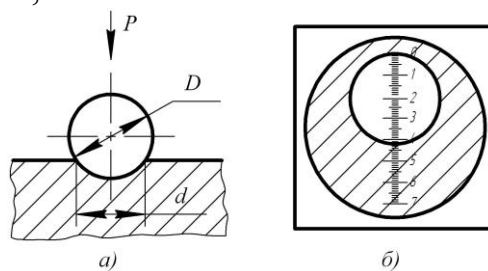


Рисунок 8.22 – Схема отримання відбитку при випробуванні на твердість за Брінеллем, вимірювання діаметра відбитка

Для визначення твердості за Брінеллем застосовують спеціальні прилади. На рис. 8.23 показано пристрій твердоміра типу ТБ. Випробовуваний зразок (деталь) встановлюється на столику 20, який підводиться маховиком 18 до упору 21. При цьому завдяки пружині 3 до зразка додається попереднє навантаження 1000 Н для усунення зсувів зразка під час випробування. Натисканням кнопки 16 вмикається електродвигун 12, який через редуктор 14 і систему важелів 13, 9, 7 опускає коромисло 6 і через важелі 5 і 4 навантажує шпindel 2 вантажами 11 підвіски 10. При цьому кулька в оправці 1 заглиблюється в метал. Набір вантажів з підвіскою важить 75 кг. Завдяки системі важелів на кульці діаметром 10 мм створюється зусилля 3000 кг з (29...30 Н). Це зусилля витримується певний час, після чого спрацьовує перемикач, реверсує переміщення коромисла і навантаження припиняє діяти.

Таблиця 8.7.1 – Навантаження ( $P$ ) і діаметр ( $D$ ) кульок, рекомендованих для випробування твердості за Брінеллем

$p$ , кгс	$B$ , мм			Примітки
	10	5	2,5	
1	2	3	4	5
30	3000	750	187,5	Матеріали з HB 130-450 (сталь, чавун, високоміцні сплави на основі титану, нікелю, міді, алюмінію)

Продовження таблиці 8.7.1

1	2	3	4	5
10	1000	250	62,5	Матеріали з HB 35-130 (алюмінієві сплави, латунь, бронза)
5	500	125	31,25	Алюміній, магній, цинк, латунь
2,5	250	62,5	15,62	Підшипникові сплави
1,25	125	31,25	7,81	Свинець, олово

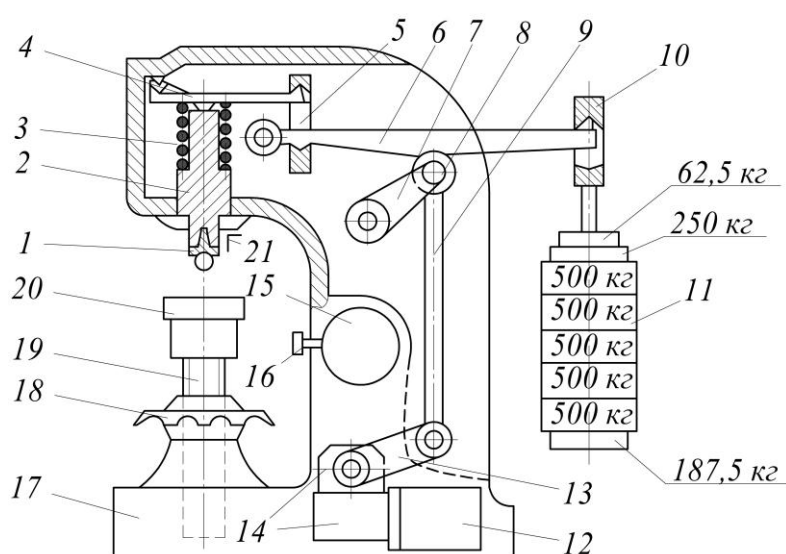


Рисунок 8.23 – Прилад Брінелля з механічним приводом: 1 – оправка з кулькою, 2 – шпindel, 3 – пружина, 4 – малий вантажний важіль, 5 – сережка, 6 – великий вантажний важіль, 7 – коливний важіль, 8 – опірний ролик, 9 – шток, 10 – підвіс для вантажів, 11 – вантажі, 12 – електродвигун, 13 – кривошип, 14 – редуктор, 15 – шкала для задання тривалості витримки під навантаженням, 16 – пускова кнопка, 17 – станина, 18 – маховик з гайкою, 19 – підйомний гвинт, 20 – столик для плоских зразків, 21 – упор.

Діаметр відбитка вимірюється спеціальним відліковим мікроскопом МПБ-2, на окулярі якого нанесена шкала з діленнями, що відповідають десятим часткам міліметра. Діаметр відбитку визначають середнім значенням двох його вимірювань у взаємно перпендикулярних напрямках з точністю до 0,05 мм (рис. 8.22, б).

При вимірюванні твердості кулькою певного діаметра і зі встановленими навантаженнями розрахунок числа твердості за формулою  $HB = P/A$  майже не виконують, а користуються таблицями, в яких наведено число  $HB$  залежно від діаметра відбитка і співвідношення між навантаженням  $P$  і  $D^2$  (табл. 8.7.2).

При вимірюванні твердості за Брінеллем необхідно дотримуватись таких вимог:

- поверхня випробовуваного зразка повинна бути плоскою, чистою і гладенькою, щоб краї відбитка були достатньо виразними;
- зразок повинен лежати на столику (підставці) стійко, щоб він не зсувався або не прогинався під час вимірювання твердості;
- товщина випробовуваного зразка повинна бути не менша десятиразової глибини відбитка (більше 1 – 2 мм);
- відстань від центрів відбитка до краю зразка повинна бути не менше  $2,5d$ , а між центрами двох сусідніх відбитків – не менше  $4d$ ; для металів з  $HB < 350$  відповідно  $3d$  і  $6d$ .
- для вимірювання твердості на зразках або деталях з криволінійною поверхнею довжина і ширина підготовленої плоскої поверхні повинні складати не менше 20 мм при  $D = 10$  мм, 10 мм при  $D = 5$  мм і 5 мм при  $D = 2,5$  мм;

Для випробування твердих матеріалів як індентор використовують алмазний конус, що навантажується силою  $P = 150$  кгс (1471 Н), а вимірювання ведуть за чорною шкалою  $C$ . Надтверді сплави, наприклад, цементовані сталі, випробовують на твердість заглибленням такого ж алмазного конуса за повного навантаження  $P = 60$  кгс (588 Н) з відліком числа твердості за шкалою  $A$ , з'єднаною з шкалою  $C$  на циферблаті індикатора.

Схема вимірювання твердості за Роквеллом дана на рис. 8.24. Твердість за Роквеллом позначається так:  $HRB$  30,  $HRC$  60,  $HRA$  80, тобто у першому позначенні твердість 30 за шкалою  $B$ , у другому 60 одиниць за шкалою  $C$ , у третьому 80 одиниць за шкалою  $A$ . (Числа  $HRA$  можна перевести на числа  $HRC$  за формулою  $HRC = 2 (HRA - 104)$ ).

Значення твердості визначають за глибиною занурення індентора  $h$ :

$$\text{для конуса} - HRC (HRA) = 100 - (h - h_0) / 0,002, \quad (8.7.2)$$

$$\text{для кульки} - HRB = 130 - (h - h_0) / 0,002, \quad (8.7.3)$$

де 0,002 – умовна одиниця твердості (ціна ділення шкали індикатора).

Одиниця твердості за Роквеллом – безрозмірна величина і відповідає осьовому переміщенню індикатора на 0,002 мм.

На рис. 8.24 зображена схема приладу для вимірювання твердості за Роквеллом. Підготовлений зразок встановлюється на підставку 10 і підводиться до оправки з індентором 9 маховиком 11 до збігу малої стрілки індикатора 7 з червоною крапкою. Це означає, що індентор втиснувся в зразок під дією попереднього навантаження  $P_0 = 10$  кгс (98 Н). При цьому велика стрілка індикатора займає вертикальне положення чи близьке до нього.

Таблиця 8.7.2 – Твердість за Брінеллем при  $D = 10$  мм,  $P=29430$  Н (3000 кгс) і  $P/D^2 = 30$ 

$d, \text{мм}$	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.06	0.09
2.90	444	441	438	435	432	429	426	423	420	417
3.00	415	412	409	406	403	401	398	395	393	390
3.10	388	385	383	380	378	375	373	370	368	366
3.20	363	361	359	356	354	352	350	347	345	343
3.30	341	339	337	335	333	331	329	326	325	323
3.40	321	319	317	315	313	311	309	307	306	304
3.50	302	300	298	297	295	293	292	290	288	286
3.60	285	283	282	280	278	277	275	274	272	271
3.70	269	268	266	265	263	262	260	259	257	256
3.80	255	253	252	250	248	248	246	245	244	242
3.90	241	240	239	237	236	235	234	232	231	230
4.00	229	228	226	225	224	223	222	221	219	218
4.10	217	216	215	214	213	212	211	210	209	208
4.20	207	205	204	203	202	201	200	199	198	198
4.30	197	196	195	194	193	192	190	189	188	188
4.40	187	186	185	185	184	183	182	181	180	179
4.50	179	178	177	176	175	174	174	173	172	171
4.60	170	170	169	168	167	167	166	165	164	164
4.70	163	162	161	161	160	159	158	158	157	156
4.80	156	155	154	154	153	152	152	151	150	150
4.90	149	149	148	147	146	146	145	144	144	143
5.00	143	142	141	141	140	140	139	138	138	137
5.10	137	136	135	135	134	134	133	133	132	132
5.20	131	130	130	129	129	128	128	127	127	126
5.30	126	125	125	124	124	123	123	122	122	121
5.40	121	120	120	119	119	118	118	117	117	116
5.50	116	115	115	114	114	114	113	113	112	112
5.60	111	111	110	110	110	109	109	108	108	107
5.70	107	107	106	106	105	105	105	104	104	103
5.80	103	103	102	102	101	101	101	100	99.5	99.5
5.90	99.2	98.8	98.4	98.0	97.7	97.3	96.9	96.6	96.2	95.9
6.00	95.5	-	-	-	-	-	-	-	-	-

Якщо при цьому велика стрілка не збігається з нульовою відміткою чорної шкали, то її встановлення проводять поворотом цієї шкали. Для додатку основного навантаження звільняють рукоятку 6, яка, повертаючись, впливає на важіль 5 і через нього шпindel з наконечником одержують навантаження, величина якого визначається вантажами 1, 2, 3. Навантаження триває 3...6 с. Після цього рукоятку 6 плавно переводять в початкове положення і фіксують цифру, на яку вказує велика стрілка індикатора за відповідною шкалою. Це і є число твердості за Роквеллом.

Відлік результатів вимірювання твердості проводиться в цілих діленнях шкали індикатора. За число твердості приймають результат окремого вимірювання, причому на кожному зразку повинно бути виконано не менше трьох вимірювань.

Відстань між центрами двох сусідніх відбитків або відстань від центра будь-якого відбитка до краю зразка повинна бути не менше 3 мм.

Для визначення твердості за Роквеллом тонких зразків або шарів використовують спеціальний прилад Супер-Роквелл. Він відрізняється від звичайних твердомірів типу ТК меншою величиною сумарного навантаження і точнішим індикатором.

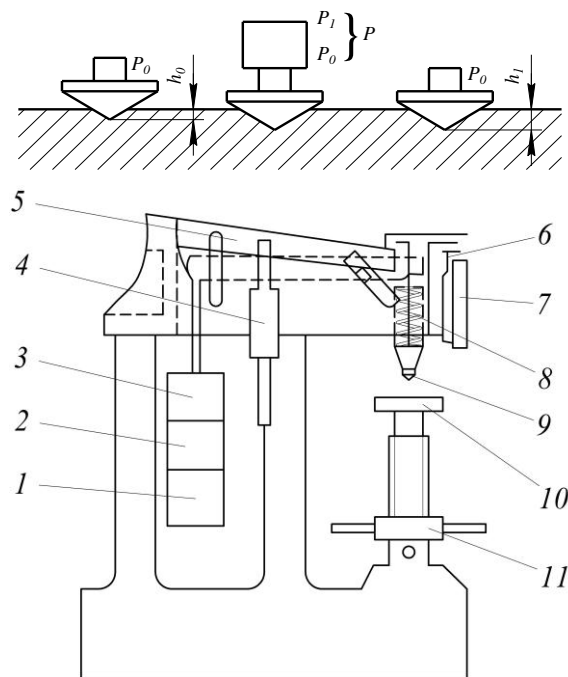


Рисунок 8.24 – Схема вимірювання твердості за Роквеллом, 1,2,3 – набір вантажів, 4 – амортизатор для плавного прикладання основного навантаження, 5 – важіль, 6 – рукоятка, 7 – індикатор, 8 – пружина для попереднього навантаження, 9 – оправка з індентором; 10 – підставка для зразка, 11 – маховик

Попереднє навантаження у цього приладу 30 Н, а загальне – 150, 350 або 450 Н. За ГОСТ 2295-78 на цьому приладі вимірюють числа твердості HRS (індентор – алмазний конус, навантаження 150 Н) і HRT (індентор – сталева кулька, навантаження 450 Н). Одне ділення індикатора відповідає тут глибині заглиблення 0,001 мм. Супер-Роквелл використовують для оцінки твердості тонких листів, дуже малих зразків, поверхневих шарів, виробів, які можуть продавлюватися наскрізь або руйнуватися під дією великого навантаження.

*Твердість за Віккерсом.* Вимірюють твердість цементованих та азотованих поверхонь деталей, а також тонких листових матеріалів. При стандартному вимірюванні твердості за Віккерсом в поверхню зразка заглиблюють алмазний індентор у формі чотиригранної піраміди з кутом при вершині  $136^\circ$  під дією навантаження  $P$ , яке вибирають в межах 49...1176 Н (5...120 кгс) (ГОСТ 2999-75).

В результаті випробувань на поверхні зразка одержують відбиток у вигляді ромба. Після припинення дії навантаження, що тривало певний час (10...15 с), вимірюють діагональ відбитка  $d$ . Число твердості HV визначають діленням навантаження в Н (кгс) на площу бічної поверхні одержаного пірамідального відбитка,  $\text{мм}^2$ :

$$HV = 1,854 P/d^2. \quad (8.7.4)$$

Якщо число твердості виражають в МПа, то після нього вказують одиницю вимірювання (наприклад, HV 320 МПа).

Числа HB і HV близькі за абсолютною величиною, однак тільки до значення приблизно HB 400. Вище цих значень метод Брінелля дає спотворені результати внаслідок залишкової деформації сталюї кульки. Алмазна піраміда в методі Віккерса дозволяє визначати твердість практично будь-яких металевих матеріалів. Ще більш важлива перевага цього методу полягає в строгому кількісному зіставленні чисел твердості HV будь-яких матеріалів, випробуваних за різних навантажень.

## 2.2 Інші методи вимірювання твердості

Для вимірювання твердості масивних деталей і конструкцій, коли описані способи застосувати не можна, використовують метод ударного відбитка (ГОСТ 18661-73). На рис. 8.25 зображений прилад, призначений для такого вимірювання. Прилад складається з корпусу 4, бойка 3, шарика 1, пружини 2. В розріз корпусу встановлюється еталонний зразок 5, твердість якого відома. Для вимірювання твердості виробу 6 прилад встановлюється шариком 1 на його поверхню і по бойку 3 завдається удар молотком. При цьому кулька занурюється одночасно у

випробовувану деталь і в еталон, утворюючи лунки, поверхні яких пропорційні відомій і шуканій твердості.

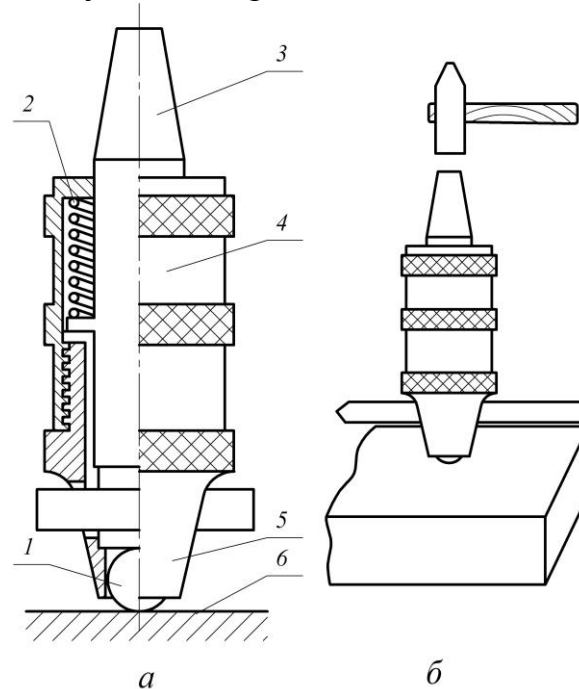


Рисунок 8.25 – Схема вимірювання твердості методом ударного відбитка  
Число твердості випробовуваного матеріалу в одиницях Брінелля

$$HB = (HB_e F_e / F_u), \quad (8.7.5)$$

де  $HB_e$  – твердість еталону в одиницях Брінелля;

$F_e$  – площа поверхні відбитка на еталоні,  $\text{мм}^2$ ;

$F_u$  – площа поверхні відбитка на деталі,  $\text{мм}^2$ .

Результати випробування отримуються тим точніші, чим ближче за твердістю еталон і зразок.

З інших динамічних методів оцінки твердості слід зазначити метод пружного відскоку (метод Шора) – ГОСТ 2373-78, який використовується для надтвердих матеріалів. Твердість визначають за допомогою склероскопа, що має бойок з алмазним наконечником, який падає на поверхню зразка з фіксованої висоти. Енергія бойка витрачається на пружну і пластичну деформацію в місці удару і на подальше підняття бойка. Чим більша висота підйому бойка після удару, тим, відповідно, менша енергія, яка витрачається на деформацію зразка і тим більша повинна бути його твердість. Число твердості за Шором HSD вимірюють в умовних одиницях, відповідних висоті підйому бойка. Висота відскоку бойка фіксується стрілкою індикатора. Позначається, наприклад, 85HSD.

Метод не дає точних вимірів, але дуже простий і тому може бути застосований для швидкого контролю термічно оброблених виробів. Також дозволяє вимірювати твердість на готових виробах, великогабаритних деталях та криволінійних поверхнях.

Твердість за Шором для вуглецевої сталі пов'язана з твердістю за Брінеллем співвідношенням:

$$HB \approx 2,5HSD$$

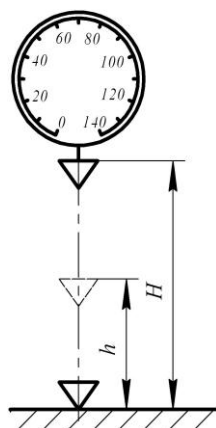


Рисунок 8.26 – Схема вимірювання твердості за методом Шора  
Співвідношення між значеннями твердості, які виміряні різними способами, наведено в таблиці 8.7.3.

Таблиця 8.7.3 – Значення твердості, виміряної різними методами

HB	230	235	240	245	250	255	260	265	270	276	283	290	297
HRC	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32
HV	236	241	246	251	257	264	271	278	285	293	301	309	317
HB	305	313	323	332	342	352	362	372	383	393	404	415	426
HRC	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45
HV	325	334	343	353	363	373	383	393	403	413	424	435	446
HB	437	448	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
HRC	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58
HV	458	471	485	498	513	528	545	562	580	598	617	636	655
HB	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	
HRC	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	
HV	675	695	715	739	763	789	820	854	894	942	1004	1076	



### 2.3 Динамічні випробування матеріалів

Під час експлуатації різні деталі і конструкції часто піддаються ударним навантаженням (переїзд автомобіля через вибоїну на дорозі, зліт і посадка літака, високошвидкісна обробка металу тиском і т. д.). Для оцінки здатності металевих матеріалів переносити ударні навантаження використовують динамічні випробування, які широко застосовуються також для виявлення схильності металів до крихкого руйнування. Це найбільш небезпечний вид руйнування, що катастрофічно швидко розвивається під дією порівняно низьких напружень. Крихке руйнування характеризується наявністю кристалічного зламу в площині, яка перпендикулярна до нормальних розтягуючих напружень. При простому огляді крихкий злам звичайно блискучий або має колір фаз, що розташовані на межах зерен.

### 2.4 Визначення ударної в'язкості

Найчастіше в'язкість матеріалу оцінюють кількістю енергії (роботи), витраченої на руйнування зразка під час ударних навантажень. Основним зразком за ГОСТ 9454-78 є стержень з квадратним перерізом  $10 \times 10$  мм і завдовжки 55 мм (рис. 8.27, а) з надрізом (концентратором) посередині. Зразки з U-подібним надрізом (зразки Шарпі) є основними і рекомендуються для вибору і приймального контролю металів і сплавів. Зразки з V-подібним надрізом (зразки Менаже) використовуються для контролю металевих матеріалів відповідальних конструкцій (літальних апаратів, транспортних засобів і т. д.). Третій тип зразків, передбачений ГОСТ 9454-78, має T-подібний концентратор. Такі зразки призначені для випробування матеріалів, що працюють в особливо відповідальних конструкціях.

Випробування на ударний згин проводять на маятникових копрах з граничною енергією, що перевищує 300 Дж (30 кгс·м) (рис. 8.27, в).

Схема випробування зображена на рис. 8.27, б. Зразок кладуть горизонтально в спеціальний шаблон, що забезпечує установку надрізу строго посередині прогону між опорами. Удар завдають зі сторони, протилежної надрізу, в площині, перпендикулярній до поздовжньої осі зразка. Маятник копра закріплюється в початковому верхньому положенні. За шкалою фіксується кут підймання маятника  $\alpha$ .

Після звільнення маятника він вільно падає під власною вагою, ударає по зразку, згинає та руйнує його, піднімаючись відносно вертикальної осі на кут  $\beta$ . Цей кут тим менший, чим більша робота  $E$ , що витрачається маятником на деформацію та руйнування зразка:

$$E = G (H - h), \quad (8.7.6)$$

де  $G$  – вага маятника;

$H$  – висота встановлення маятника;

$h$  – висота підйому маятника після удару.

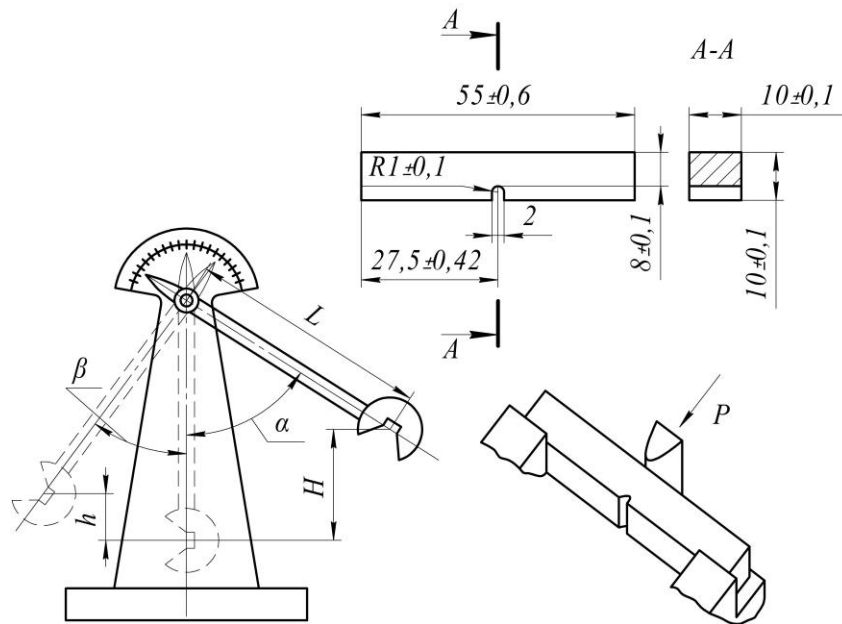


Рисунок 8.27 – Схема випробування на ударну в'язкість:  
а – зразок для випробування; б – схема маятникового копра

Якщо довжина маятника  $L$ , то  $h = L(1 - \cos \beta)$ ,  $H = L(1 - \cos \alpha)$  і робота руйнування буде:

$$E = G L (\cos \beta - \cos \alpha). \quad (8.7.7)$$

За цією формулою можна розрахувати роботу  $K$ , вимірявши кути  $\alpha$  і  $\beta$  та знаючи величини  $G$  і  $L$ , які для кожного копра постійні. (В лабораторному копрі шкала проградуєвана в одиницях роботи кГ·м).

Знаючи повну роботу деформації і руйнування  $E$ , можна розрахувати ударну в'язкість  $a_H$ :

$$a_H = E / A, \quad (8.7.8)$$

де  $A$  – площа поперечного перерізу зразка в місці надрізу до випробування. Стандартна одиниця вимірювання ударної в'язкості – Дж/м<sup>2</sup> або кГ·м/см<sup>2</sup>.

Ударну в'язкість позначають символом  $a_H$ . Залежно від виду концентратора в зразку в позначення ударної в'язкості вводиться третій індекс (U, V або T). Наприклад,  $a_H$  – ударна в'язкість, визначена на зразку з V – подібним концентратором при кімнатній температурі.

У ГОСТ 9454-78 рекомендується при позначенні ударної в'язкості вказати також температуру випробування, максимальну енергію удару маятника, Дж, глибину концентратора, мм, ширину зразка, мм.

Ударні випробування при різних температурах дозволяють встановити оптимальні режими гарячої обробки, зварювання, комбінованого різання, холодноламкості і т. п.

### **3 Лабораторне обладнання**

Для виконання лабораторної роботи використовується твердомір для визначення твердості матеріалу за Брінеллем, з механічним приводом, твердоміром МПБ-2, маятниковий копр для визначення ударної в'язкості та досліджувані зразки матеріалів.

### **4 Послідовність виконання роботи**

4.1 Ознайомитись з теоретичними відомостями щодо методів вимірювання твердості матеріалів, ударної в'язкості та обладнанням.

4.2 Підготувати досліджуваний зразок згідно з вимогами, що наведені в роботі для вимірювання твердості за Брінеллем.

4.3 Ретельно встановити зразок на столик твердоміра і підвести його до контакту з кулькою приладу за допомогою маховика.

4.4 Навантажити зразок, ввімкнувши електродвигун, який через редуктор, систему важелів під дією встановлених на підвісці вантажів завантажує шпиндель, в якому закріплена оправка з кулькою.

4.5 Витримати 10...60 с (за вказівкою викладача) зразок під дією навантаження.

4.6 Вимкнути двигун. Опустити столик і покласти досліджуваний зразок на предметний столик мікроскопа для вимірювання відбитка.

4.7 Виміряти діаметр відбитка за двома взаємоперепендикулярними напрямками з точністю до 0,05 мм.

4.8 За допомогою табл. 8.7.2 визначити за середньою величиною виміру діаметра відбитка твердість досліджуваного матеріалу.

4.9 Підготувати зразок для визначення ударної в'язкості матеріалу.

4.10 В спеціальний шаблон встановити зразок надрізом у протилежну сторону до місця нанесення удару.

4.11 Відвести маятник копра в початкове верхнє положення, закріпити і за шкалою виміряти кут підняття  $\alpha$ .

4.12 Звільнити маятник і після нанесення удару руйнування зразка заміряти кут відхилення маятника  $\beta$ .

4.13 Виконати розрахунок ударної в'язкості за формулою (8.7.8).

4.14 Підготувати звіт з лабораторної роботи.

## **5 Зміст звіту**

5.1 Звіт з лабораторної роботи оформлюється згідно з вимогами до текстової конструкторської документації (ГОСТ 2.105-93).

5.2 В звіті відображається мета лабораторної роботи, основні теоретичні відомості, що супроводжуються необхідними ілюстраціями

5.3 Зробити ескіз досліджуваних зразків.

5.4 Навести результати вимірів зазначених характеристик після випробування.

5.5 Встановити шукані характеристики досліджуваних зразків відповідно до п. 4.8 і 4.13.

5.6 Навести висновки до роботи.

## **6 Контрольні запитання**

6.1 Що таке твердість матеріалу?

6.2 Які існують способи визначення твердості матеріалу?

6.3 В чому суть методу визначення твердості:

а) за Брінеллем;

б) за Роквеллом;

в) за Віккерсом.

6.4 З якою метою використовуються різні методи визначення твердості?

6.5 Назвіть інші методи вимірювання твердості матеріалів.

6.6 Для чого застосовують динамічні випробування матеріалів.

6.7 Чим характеризується ударна в'язкість матеріалів?

6.8 Поясніть, яким чином визначається ударна в'язкість на маятникових копрах.

6.9 Для чого на зразку робиться надріз?

6.10 Як використовується ударна в'язкість в інженерних розрахунках та проектах?

## ЛІТЕРАТУРА

1. Анурьев В. И. Справочник конструктора-машиностроителя: в 3-х т. / Анурьев В. И. – [5-е изд., перераб. и доп.] – М. : Машиностроение, 1978. Т. 1. – 1978 – 728 с.
2. Вірник М. М. Теорія механізмів і машин. Лабораторний практикум / М. М. Вірник, Ю. В. Булига. – Вінниця : ВНТУ, 2004. – 100 с.
3. Вишенський І. І. Теорія механізмів і машин. Механічні передачі / Вишенський І. І. – К. : УМК ВО, 1992. – 356 с.
4. Заблонский К. И. Прикладная механика / [Заблонский К. И., Беляев М. С., Телис И. Я. и др.] – К. : Вища школа, 1984. – 280 с.
5. Иванов М. Н. Волновые зубчатые передачи / Иванов М. Н. – М. : Высшая школа, 1985. – 221 с.
6. Иосилевич Г. Б. Прикладная механика: учеб. [для вузов] / Иосилевич Г. Б., Строганов Г. Б., Маслов Г. С.; под ред. Иосилевича Г. Б. – М. : Высш. шк., 1989. – 351 с.
7. Кіницький Я. Т. Теорія механізмів і машин / Кіницький Я. Т. – К. : Наукова думка, 2001. – 660 с.
8. Кожевников С. Н. Механизмы / Кожевников С. Н., Есипенко Я. И., Раскин Я. М. – М. : Машиностроение, 1976. – 784 с.
9. Клименко В. М. Технологія конструкційних матеріалів. Ч.1: Конструкційні матеріали: властивості, класифікація, виробництво / Клименко В. М., Шиліна О. П., Осадчук А. Ю. – Вінниця : УНІВЕРСУМ. учеб. пособие, 2002. – 97 с.
10. Марченко С. И. Прикладная механика: учеб. пособие / Марченко С. И., Логинова Н. В., Марченко Е. П. – М. : Высшее образование, 2006. – 541 с.
11. Материаловедение: учебник [для вузов] / [Арзамасов Б. Н., Макарова В. И., Мухин Г. Г. и др.] – [3-е изд.] – М. : Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2002. – 648 с.
12. Машиностроение: энциклопедия. В 4-х т. / [Решетов Д. Н., Гузенков А. П., Дроздов Ю. Н. и др.]; под общ. ред. Решетова Д. Н. – М. : Машиностроение. 1995. – 864 с.  
Т.1: Детали машин. Конструкционная прочность, трение, износ, смазка – 1995. – 864 с.
13. Писаренко Г. С. Опір матеріалів: підруч. / Писаренко Г. С., Квітка О. Л., Уманський Е. С.; за ред. Писаренко Г. С. – К. : Вища школа, 1993. – 655 с.
14. Павлище В. Т. Основи конструювання та розрахунок деталей машин: підруч. / Павлище В. Т. – [2-е вид. перероб.] – Львів : Афіша, 2003. – 560 с.

15. Павлище В. Т. Прикладна механіка: навч. посібник / [Павлище В. Т., Харченко Є. В., Барвінський А. Ф., Гаршнєв Ю. Г.]; за ред. Павлище В. Т. – Львів : “Інтелект-Захід”, 2004. – 368 с.
16. Прикладная механика: учеб. [для вузов] / [Джамай В. В., Дроздов Ю. Н., Самойлов Б. А. и др.]; под ред. Джамая В. В. – М. : Дрофа, 2004. – 414 с.
17. Путята Т. В. Прикладная механика: учеб. пособие. / [Путята Т. В., Можаровский Н. С., Соколов Н. Г., Гордийко Ф. П.] – К. : Вища школа, 1977. – 534 с.
18. Решетов Д. Н. Детали машин: учеб. [для вузов] / Решетов Д. Н. – М. : Машиностроение, 1989. – 496 с.
19. Справочник по сопротивлению материалов / Писаренко Г. С., Яковлев А. П., Матвеев В. В. – К. : Наукова думка, 1975. – 703 с.
20. Сторожев В. П. Механические передачи / Сторожев В. П. – К. : Алерта, 2005. – 783 с.
21. Технічна механіка: підруч. [для вузів]. В 3-х т. / Чернілевський Д. В., Кіницький Я. Т., Панов С. Л.; за ред. Чернілевського Д. В. – Київ : НМК ВО, 1992.  
Кн. 3: Основи теорії машин та механізмів –1992. – 167 с.
22. Феодосьев В. И. Сопротивление материалов: учеб. [для вузов] / Феодосьев В. И. – М. : Наука, 1972. – 544 с.
23. Дослідження механізмів та триботехнічних систем: [навч. посібник] / Чернець М. В., Скварок Ю. Ю., Опеляк М., Кіндрацький Б. І. – Дрогобич : Коло, 2003. – 440 с.

## СЛОВНИК НАЙБІЛЬШ ВЖИВАНИХ ТЕРМІНІВ

абразивне – abrasive ~  
адгезійне – adhesive ~  
аналіз – analysis  
варіатор – variator  
ведена – driven ~  
ведуча – driving ~  
відцентровий – centrifugal  
втомне – fatigue ~  
в'язі – links  
гвинтовий – helical ~  
група Ассура – group of Assyria  
динаміка – dynamics  
довговічність – durability  
ерозійне – erosive ~  
жорсткість – stiffness  
заїдання – sticking  
збіжні сили – convergent forces  
зносостійкість – wear resistance  
зношування – wear  
зрівноваження – balancing  
кавітаційне – cavitation ~  
кінематика – kinematics  
колесо – wheel  
корозійно-механічне – corrosion-mechanical ~  
крутний момент – torque  
ланка – link  
матеріальна точка – material point  
машина – machine  
механізм – mechanism  
механіка – mechanics  
міцність – strength  
модуль пружності – elasticity modulus  
момент сили – moment of force  
навантаження – load  
осьовий – axial  
пара сил – pair of forces  
планетарний – planetary ~  
пластичність – plasticity  
полярний – polar  
пружність – elasticity  
редуктор – reducer

сателіт – satellite  
сила – force  
синтез – synthesis  
статика – statics  
статичний – static  
стійкість – stability  
тверде тіло – rigid body  
твердість – hardness  
трибототехніка – tribotechnology  
ударна в'язкість – impact elasticity  
фреттинг-корозія – fretting corrosion ~  
шестерня – gear.



*Навчальне видання*

**Леонід Клавдійович Поліщук**

## **Прикладна механіка та матеріалознавство**

Навчальний посібник

Редактор В. Дружиніна

Коректор З. Поліщук

Оригінал-макет підготовлено Л. Поліщуком

Підписано до друку  
Формат 29,7×42<sup>1</sup>/<sub>4</sub>. Папір офсетний.  
Гарнітура Times New Roman.  
Друк різнографічний. Ум. Др. Арк.  
Наклад      прим. Зам. №

Вінницький національний технічний університет,  
Навчально-методичний відділ ВНТУ.  
21021, м. Вінниця, Хмельницьке шосе, 95,  
ВНТУ, к. 2201.  
Тел. (0432) 59-87-36.  
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи  
серія ДК № 3516 від 01.07.2009 р.

Віддруковано у Вінницькому національному технічному університеті  
в комп'ютерному інформаційно-видавничому центрі.  
21021, м. Вінниця, Хмельницьке шосе, 95,  
ВНТУ, ГНК, к. 114.  
Тел. (0432) 59-87-38.  
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи  
серія ДК № 3516 від 01.07.2009 р.