А.И. Сиянов, канд. техн. наук, доц.
Винницкий национальный технический университет, г. Винница, Украина

Устойчивость пространственной цилиндрической стержневой системы с учетом действия возмущающей нагрузки

Актуальность исследования устойчивости пространственных цилиндрических стержневых систем (рис. 1) определяется их геометрическим сходством с аналогичными по форме сплошными конструкциями (рис. 2). Речь идет о системах, у которых элементы расположены на поверхности цилиндрических оболочек. Для них исчерпание несущей способности происходит из-за потери устойчивости.

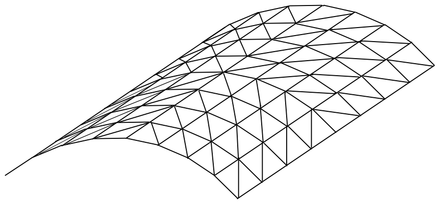

Рис.1. Цилиндрическая стержневая система

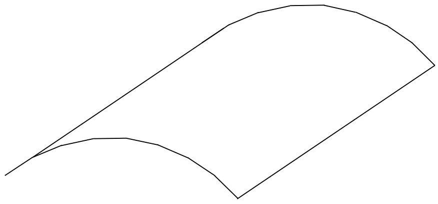

Рис.2. Цилиндрическая сплошная система

Представленная работа является логическим продолжением описания методики сложного поведения пространственной цилиндрической стержневой системы, испытывающей действие внешней нагрузки.

В предыдущей работе [1] представлено уравнение равновесия системы

$$\left|\boldsymbol{K}\right|\left\{\delta_{гл}\right\}+\left|\overline{\boldsymbol{K}}\right|\left\{\delta_{гл}\right\}=\epsilon\overline{\boldsymbol{F}}\ , \tag{1}$$

позволяющее достаточно точно и быстро определять узловые перемещения для разных уровней приложения нагрузки в зависимости от параметра нагружения ϵ.

Полученные таким образом неизвестные перемещения $\boldsymbol{\delta}$ целесообразно разложить в ряд по степеням ϵ:

$$\delta=\sum_{i=1}^{\infty}\epsilon^{i}\delta_{i}\ . \tag{2}$$

Подставив этот ряд в уравнение (1) и сгруппировав члены, содержащие одинаковые степени ϵ ($\epsilon\neq\mathbf{0}$), получим рекуррентную зависимость для определения неизвестных векторных коэффициентов ряда $\boldsymbol{\delta}_i$ [2]:

$$\boldsymbol{\delta}_1=\boldsymbol{K}^{-1}\overline{\boldsymbol{F}}\ ; \tag{3}$$

$$\boldsymbol{\delta}_2=-\boldsymbol{K}^{-1}\left[\overline{\boldsymbol{K}}(\delta_1)\delta_1\right]; \tag{4}$$

$$\boldsymbol{\delta}_3=-\boldsymbol{K}^{-1}\left[\overline{\boldsymbol{K}}(\delta_1)\delta_2+\overline{\boldsymbol{K}}(\delta_2)\delta_1\right]; \tag{5}$$

. . . .

$$\boldsymbol{\delta}_n=-\boldsymbol{K}^{-1}\sum_{m=1}^{n-1}\overline{\boldsymbol{K}}(\delta_m)\delta_{n-m}\ , \tag{6}$$

Здесь $\boldsymbol{\delta}_1$ является решением линейной задачи расчета конструкции на заданную конфигурацию нагрузки $\left|\overline{\boldsymbol{F}}\right|$.

Последовательным вычислением $\boldsymbol{\delta}_1$, $\boldsymbol{\delta}_2$, ... $\boldsymbol{\delta}_n$ можно построить ряд (2) и, задавшись значениями параметра ϵ, определить узловые перемещения для разных уровней приложения нагрузки при условии сходимости ряда.

Для успешной реализации алгоритма, в линейные перемещения $\boldsymbol{\delta}_1$ вводятся возмущения $\boldsymbol{\delta}_1*$, которые имеют смысл начальных неправильностей формы.

Тогда:

$$\boldsymbol{\delta}_1=\boldsymbol{K}^{-1}\overline{\boldsymbol{F}}\ ; \tag{7}$$

$$\boldsymbol{\delta}_2=-\boldsymbol{K}^{-1}\overline{\boldsymbol{K}}(\delta_1)\delta_1*\ ; \tag{8}$$

$$\boldsymbol{\delta}_3=-\boldsymbol{K}^{-1}\overline{\boldsymbol{K}}(\delta_1)\delta_2\ ; \tag{9}$$

. . . .

$$\boldsymbol{\delta}_n=-\boldsymbol{K}^{-1}\overline{\boldsymbol{K}}(\delta_1)\delta_n\ . \tag{10}$$

Выражения (7) – (10) представляют собой итерационный процесс уточнения решения задачи устойчивости.

Сначала (первый шаг) определяются перемещения, вызванные нагрузкой $\overline{\boldsymbol{F}}$. Потом (шаг второй) характер перемещений определяется характером введенных возмущений. На последующих шагах влияние возмущений уменьшается, а характер перемещений приближается к собственной форме потери устойчивости. Критический параметр потери устойчивости вычисляется из условия сходимости ряда (2).

Попытаемся оценить влияние возмущающей нагрузки на конструкцию, которая находится под определенным уровнем нагружения.

Для этого воспользуемся разложением правой части основного уравнения равновесия системы [2–4]:

$$\boldsymbol{K}\delta_{гл} + \overline{\boldsymbol{K}}\delta_{гл} = \boldsymbol{F}. \tag{11}$$

по малому параметру $\boldsymbol{\varepsilon} << 1$ и получим:

$$\boldsymbol{F} = \epsilon\overline{\boldsymbol{F}}_0 + \varepsilon\overline{\boldsymbol{F}}_1 + \varepsilon^2\overline{\boldsymbol{F}}_2 + \ldots \tag{12}$$

Тогда решение представим в виде:

$$\boldsymbol{f} = \boldsymbol{f}_0 + \varepsilon\boldsymbol{f}_1 + \varepsilon^2\boldsymbol{f}_2 + \ldots \tag{13}$$

Опустив члены большого порядка малости, получим:

$$\boldsymbol{F} = \epsilon\overline{\boldsymbol{F}}_0 + \varepsilon\overline{\boldsymbol{F}}_1; \tag{14}$$

$$\boldsymbol{f} = \boldsymbol{f}_0 + \varepsilon\boldsymbol{f}_1, \tag{15}$$

где $\epsilon\overline{\boldsymbol{F}}_0$ – расчетная нагрузка;

$\varepsilon\overline{\boldsymbol{F}}_1$ – возмущение.

Подставим (14) и (15) в основное уравнение и сгруппируем члены с одинаковыми степенями $\boldsymbol{\varepsilon}$, причем члены, которые содержат $\boldsymbol{\varepsilon}^2$, учитывать не будем.

Получим такие соотношения:

$$\boldsymbol{K}\delta_0 + \overline{\boldsymbol{K}}(\delta_0)\delta_0 = \epsilon\overline{\boldsymbol{F}}; \tag{16}$$

$$\boldsymbol{K}\delta_1 + \overline{\boldsymbol{K}}(\delta_0)\delta_1 + \overline{\boldsymbol{K}}(\delta_1)\delta_0 = \overline{\boldsymbol{F}}_1. \tag{17}$$

Выражение (16) аналогично (1). Решением этого уравнения являются перемещения $\boldsymbol{\delta_0}$, которые отвечают расчетной нагрузке $\epsilon\overline{\boldsymbol{F}}_0$ с заданным параметром нагружения $\boldsymbol{\epsilon}$. Значения перемещений $\boldsymbol{\delta_0}$ определяются с помощью предложенной методики.

Выражение (17) учитывает влияние возмущающей нагрузки на уже деформированную конструкцию.

На основании анализа выражения $\overline{\boldsymbol{K}}(\delta_1)\delta_0$ можно показать, что возможно представление

$$\overline{\boldsymbol{K}}(\delta_1)\delta_0 = \overline{\boldsymbol{K}}(\delta_0)\delta_1. \tag{18}$$

Тогда дополнительное уравнение равновесия примет вид:

$$\left[\boldsymbol{K} + \overline{\boldsymbol{K}}(\delta_0) + \overline{\boldsymbol{K}}(\delta_0)\right]\delta_1 = \overline{\boldsymbol{F}}_1. \tag{19}$$

Уравнение (19) позволяет получать решение для различных конфигураций возмущающей нагрузки. Величину возмущения можно регулировать с помощью параметра $\boldsymbol{\varepsilon}$.

Пользуясь понятием возмущающей нагрузки, можно подойти к решению задачи на комбинации нагружений. Для этого необходимо выделить основную расчетную нагрузку $\overline{\boldsymbol{F}}_0$ (собственный вес) и возмущающую нагрузку $\overline{\boldsymbol{F}}_1$ (снег, ветер). Основным требованием к выбору нагрузки является выполнение соотношений:

$$\left|\epsilon\overline{\boldsymbol{F}}_0\right| > \left|\varepsilon\overline{\boldsymbol{F}}_0\right|; \tag{20}$$

$$\epsilon < \epsilon_{кр}. \tag{21}$$

Тогда, проведя нелинейный расчет на основную нагрузку, можно исследовать напряженно-деформированное состояние конструкции для комбинации этой нагрузки с любой возмущающей.

Выводы

1. Рассмотрена методика решения задачи устойчивости пространственной цилиндрической стержневой системы с учетом действия возмущающей нагрузки.

2. Исходя из принятых положений, определяющих связь между компонентами уравнения равновесия, показана возможность получения основных зависимостей критического состояния системы.

3. Применены известные соотношения строительной механики, которые позволяют реализовать итерационный процесс решения задачи устойчивости с использованием процедуры пошагового приложения нагрузок.

4. Для успешной реализации алгоритма и отражения особенностей общего состояния системы, введены возмущения, имеющие смысл начальных неправильностей формы. Показано их влияние на деформированную конструкцию.

5. Представленный подход позволяет подойти к решению задачи устойчивости на возможные комбинации нагружений.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Сиянов А.И. Дискретизация пространственной цилиндрической стержневой системы для оценки ее напряженно-деформированного состояния // Перспективные разработки науки и техники: Материалы науч.-практ. конф.–Том 10.– Белгород: Руснаучкнига; Днепропетровск: Наука и образование, 2004.– С. 40–45.
2. Игнатова Е.В. Расчет устойчивости пространственных стержневых конструкций на основе метода конечных элементов: Автореф. дис. … канд. техн. наук.–Москва, 1988.– 13 с.
3. Лотов В.Н. Упруго-пластическая устойчивость стержневых систем, пластин и цилиндрических оболочек при сложном нагружении: Автореф. дис. … канд. физ.–мат. наук.–Москва, 1975.– 22 с.
4. Современные пространственные конструкции: Справочник / Под ред. Ю.А. Дыховичного, Э.З. Жуковского.–М.: Высш. шк., 1991.– 542 с.

Аннотация

Рассмотрена методика решения задачи устойчивости пространственной цилиндрической стержневой системы с учетом действия возмущающей нагрузки. Показана возможность получения основных зависимостей, позволяющих оценить влияние начальных неправильностей формы на деформированную конструкцию. Отмечена пригодность представленного подхода для исследования напряженно-деформированного состояния системы.