УДК 517.958+624.4

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ ФОРМОВАНИЯ ДЕКОРАТИВНЫХ БЕТОННЫХ БЛОЧКОВ: II МЕТОД ДИНАМИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ ГРИНА В АНАЛИЗЕ ПОЛЯ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ, ГЕНЕРИРУЕМОГО ОБЪЕМНЫМ ИСТОЧНИКОМ УПРУГИХ ВОЛН

Г.С. Ратушняк, Н.М. Слободян

Винницкий государственный политехнический университет

Аналіз поля переміщень, що генерується об'ємним джерелом пружних хвиль, у процесі формування декоративних бетонних блочків здійснений методом динамічної функції Гріна. Встановлені особливості цього поля у т.з. ближній зоні до джерела збудження хвиль.

Анализ поля перемещений, генерируемых объёмным источником упругих волн, в процессе формования декоративных бетонных блочков осуществлён методом динамической функции Грина. Установлены особенности этого поля в т.н. ближней зоне к источнику возбуждения волн.

The analysis of displacement's field generated by the volume resource of elastic waves in the process of forming of decorative concrete's blocks is realized with the help of dynamical Green's function. One may determine the peculiarities of such field in the so-called near-field zone to the resource of waves' perturbation.

При изучении волновых движений, происходящих под действием объёмных сил, в процессах формования декоративных бетонных блочков, необходимо иметь решение динамических уравнений теории упругости (вязкоупругости) для произвольно ориентированной точечной силы, действующей в неограниченной среде. Построению такого решения посвящены работы [1-4]. Так, в [1] при построении динамической функции Грина для неограниченной среды использован метод интегральных преобразований. В [2-4] тот же результат получен с помощью разложения силового источника на потенциальную и вихревую составляющие и последующего интегрирования неоднородных волновых уравнений для скалярного и векторного потенциала перемещений.

Свойства полей перемещений и напряжений, генерируемых в неограниченной среде силовыми источниками, подробно рассматриваются в [2]. Большое внимание здесь уделено и описанию самих источников упругих волн. Функция Грина для волн в двух измерениях построена в [3]. Принцип Гюйгенса, условия излучения и интегральные формулы для рассеяния упругих волн рассматриваются в [8].

Следует отметить, что к исследованию волнового распространения в областях с уходящими на бесконечность границами кроме уравнений движения, дополненных соответствующими начальными и граничными условиями, в необходимых случаях привлекаются т.н. условия излучения [5,8]. Физическое содержание условий излучения заключается в требовании отсутствия на бесконечности источников энергии.

Существует принципиальное отличие в применении условий излучения к гармоническим процессам (виброформованию декоративных бетонных блочков) и задачам о генерировании волн источниками, которые сосредоточены в конечной области первоначально покоящейся среды (неотформованного слоя бетона). В первом случае условия излучения являются средством получения единственного решения граничной задачи, т.к. позволяют исключить приходящие из бесконечности волны, удовлетворяющие однородным уравнениям и граничным условиям (например, волны Релея в задаче о возбуждении полупространства поверхностной нагрузкой, как это имеет место в задаче формования декоративных бетонных блочков). Для нестационарных задач, связанных с представлением о существовании движения не во всём интервале времени, но лишь при $t > 0$, условия излучения являются следствием принципа причинности в механических явлениях. Их выполнение обеспечивается тем требованием, что скорость передачи возмущений не должна превосходить скорости волн расширения в неограниченной среде.

Существование двух типов упругих волн (продольных и поперечных) делает явление волнового распространения в ограниченном упругом теле (декоративном бетонном блочке) более сложным, например, по сравнению с акустическими волнами. Закономерности отражения волн от свободной границы, а также преломления на границе раздела двух сред с различными материальными свойствами (бетонный блочок – эластичный пригруз), включая энергетический анализ, изложены в [5]. Отсутствие в указанных задачах характерного линейного размера приводит к независимости полученных результатов (!) от частоты гармонических волн, что позволяет непосредственно перенести их и на неустановившиеся волновые явления. Взаимодействие продольных и поперечных волн на свободной границе (области отсутствия контакта эластичного пригруза с бетонным декоративным блочком) приводит к появлению особого типа локализованного вблизи поверхности движения – волны Релея [2,5] и, как следствие, наличию каверны достаточно большого диаметра (сравнимого с размером самого блочка) непосредственно под эластичным пригрузом после завершения процесса виброформования. Волны Релея играют важную роль и в задаче Лэмба о возбуждении полупространства поверхностной нагрузкой (одна из возможных динамических моделей поверхностного виброформования декоративных бетонных блочков). Подробный анализ волновых полей в задаче Лэмба для случая импульсных нагрузок имеется в [2], а для гармонических нагрузок в [5]. Волны напряжения, возникающие при мгновенном образовании сферической полости в одноосно деформированном упругом пространстве, рассматриваются в [7].

Анализ вышеуказанных литературных источников позволяет утверждать авторам настоящей работы, что объёмные источники упругих волн в процессах виброформования декоративных бетонных блочков проявляют характерные свойства в ближней к ним зоне, что в конечном итоге сказывается на качестве изделия. По-видимому, лишь использование метода динамической функции Грина позволит учесть все детали процесса виброформования декоративных бетонных блочков. Целью данной работы и является установление указанной функции, позволяющей произвести детальный анализ поля перемещений в формуемом изделии.

1. Постановка задачи. Определение динамической функции Грина. Известно [1], что выражение для тензора Грина $G_{ij} - i -$й компоненты вектора перемещений u_i, генерируемых в неограниченном пространстве единичной сосредоточенной силой, действующей в положительном направлении оси x_j декартовых координат, имеет вид:

$$G_{ij} = \frac{1}{4\pi\rho\omega^2}\left[\delta_{ij}\cdot k_2{}^2\cdot\frac{e^{ik_2r}}{r} - \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}\left(\frac{e^{ik_1r}}{r} - \frac{e^{ik_2r}}{r}\right)\right], \tag{1}$$

где $\rho -$ плотность среды, $\delta_{ij} -$ символ Кронекера, $(i,j)=(1,2,3)$, $G_{ij} = G_{ji}$, $r -$ расстояние от точки приложения силы до точки наблюдения, $\omega -$ круговая частота гармонической силы, $k_1 = \dfrac{\omega}{c_1}, k_2 = \dfrac{\omega}{c_2}$, $c_{1,2} -$ скорости продольных и поперечных упругих волн в среде, соответственно.

Тензор Грина для установившихся колебаний является решением тензорного уравнения:

$$\mu\nabla^2 G_{ij} + (\lambda+\mu) grad\ div G_{ij} + \rho\omega^2 G_{ij} = -\delta_{ij}\cdot\delta(x)\cdot\delta(y)\cdot\delta(z), \tag{2}$$

где $(\lambda,\mu) -$ коэффициенты Ламэ среды, $\delta(x_i) -$ дельта-функция x_i Дирака,

$i = (1,2,3)$.

Используя решение (2) в форме (1), можно построить тензор Грина для импульсной объёмной силы, сосредоточенной в начале координат и изменяющейся во времени по закону $\chi(t)$. Последний тензор удовлетворяет (оставляем те же обозначения G_{ij}) уравнению:

$$\mu\nabla^2 G_{ij} + (\lambda+\mu) grad\ div G_{ij} - \rho\frac{\partial^2 G_{ij}}{\partial t^2} = -\delta_{ij}\cdot\delta(x)\cdot\delta(y)\cdot\delta(z)\cdot\chi(t). \quad (3)$$

Применяя к (3) комплексное преобразование Фурье по времени, с учётом нулевых начальных условий (для G_{ij} и $\frac{\partial G_{ij}}{\partial t}$), можно получить в области изображений следующий результат :

$$G_{ij}{}^F = \frac{\chi^F(\omega)}{4\pi\rho\omega^2}\cdot\left[\delta_{ij}\cdot k_2{}^2\cdot\frac{e^{ik_2 r}}{r} - \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}\left(\frac{e^{ik_1 r}}{r} - \frac{e^{ik_2 r}}{r}\right)\right]. \quad (4)$$

В соответствии с формулой обращения (опуская промежуточные выкладки) оригинал-тензор Грина $G_{ij} - i-$я компонента поля перемещений, генерируемых в неограниченном пространстве сосредоточенной силой амплитуды $\chi(t)$, направленной вдоль оси x_j, имеет вид:

$$G_{ij} = \frac{1}{4\pi\rho r}\left[\gamma_i\gamma_j\cdot\frac{\chi(t - r/c_1)}{c_1{}^2} + (\delta_{ij} - \gamma_i\gamma_j)\cdot\frac{\chi(t - r/c_2)}{c_2{}^2} - \right.$$

$$\left. - \frac{\delta_{ij} - 3\gamma_i\gamma_j}{r^2}\cdot\int\limits_{r/c_1}^{r/c_2}\tau\cdot\chi(t-\tau)d\tau\right], \quad (5)$$

где $\gamma_i, \gamma_j -$ направляющие косинусы радиуса-вектора точки $(x_1, x_2, x_3): \gamma_i = \frac{\partial r}{\partial x_i} = \frac{x_i}{r} = \cos(r, x_i)$, $\gamma_j = \frac{\partial r}{\partial x_j} = \frac{x_j}{r} = \cos(r, x_j)$, $r = \left(x_1{}^2 + x_2{}^2 + x_3{}^2\right)^{1/2}$. Если сила действует в направлении произвольного единичного вектора с компонентами n_j, волновое поле представляется формулой: $u_i = n_j \cdot G_{ij}$.

2. Анализ поля перемещений, генерируемого сосредоточенной силой в неограниченной среде. В соответствии с решением (5) для силы, действующей в направлении x_j, перемещения в направлении x_i представляются суммой трёх слагаемых [1]:

$$u_i = u_i^{\ P} + u_i^{\ S} + u_i^{\ N}, \tag{6}$$

где

$$u_i^{\ P} = \frac{1}{4\pi\rho c_1^{\ 2}} \cdot \frac{\gamma_i \gamma_j}{r} \cdot \chi\left(t - \frac{r}{c_1}\right), \tag{7}$$

$$u_i^{\ S} = \frac{1}{4\pi\rho c_2^{\ 2}} \cdot \frac{\delta_{ij} - \gamma_i \gamma_j}{r} \cdot \chi\left(t - \frac{r}{c_2}\right), \tag{8}$$

$$u_i^{\ N} = \frac{1}{4\pi\rho} \cdot \frac{\left(3\gamma_i \gamma_j - \delta_{ij}\right)}{r^3} \cdot \int\limits_{r/c_1}^{r/c_2} \tau\chi(t-\tau)d\tau. \tag{9}$$

Следует описать каждое из этих выражений (7)-(9) в отдельности, т.к. они вносят существенный вклад в общую картину формообразования поля упругих перемещений формуемого изделия (бетонного декоративного блочка).

Формула (7) определяет т.н. P- волну в дальней зоне (от источника возмущения среды – локальной гармонической силы). Возмущения, связанные с этой волной, переносятся со скоростью волн сжатия c_1 и затухают с расстоянием $\sim \frac{1}{r}$. Легко видеть, что $u_i^{\ P}$ параллельно направлению γ_i от источника до точки наблюдения, т.е. движение частиц (формуемого бетона) происходит в направлении распространения волны. В точку, отстоящую на расстоянии r от начала координат, продольная волна приходит в момент времени $t = r / c_1$ и имеет амплитуду смещения, пропорциональную приложенной силе в задержанный момент времени.

Волна S в дальней зоне (8) имеет скорость распространения c_2, равную скорости сдвиговых волн, и также затухает с расстоянием как r^{-1}. Направление смещений в ней перпендикулярно направлению распространения, т.к. $\gamma_i\left(\delta_{ij} - \gamma_i\gamma_j\right) = \gamma_j - \gamma_j = 0$. Время прихода этой волны в точку наблюдения равно r / c_2, а амплитуда смещения пропорциональна силе в момент времени $t - r / c_2$.

Определяемое выражением (9) смещение в ближнем поле называется так потому [1], что для источников с $\chi(t) \neq 0$ лишь в конечном интервале времени u_i^N имеет порядок r^{-2} при $r \to \infty$ и, следовательно, мало по сравнению с u_i^P и u_i^S. При небольших r (вариант формования декоративных бетонных блочков!) u_i^N сравнимо с u_i^P и u_i^S! Ближнее поле ведёт себя чрезвычайно своеобразно: оно образуется как продольными, так и поперечными волнами; переносимые им возмущения не являются ни чисто продольными, ни поперечными. Если сила, вызывающая волновое движение, отлична от нуля при $0 < t < T$ ($T -$ время виброформования бетонного декоративного блочка), из (9) следует, что обусловленное ближним полем движение начинается в точке наблюдения в момент времени $t = r/c_1$ и заканчивается при $t = r/c_2 + T$, т.е. его длительность равна $r/c_2 - r/c_1 + T$ (при $(r/c_1, r/c_2) << T$ эта длительность практически совпадает с T).

3. Волновое поле объёмных источников, распределённых в пространстве произвольно. В заключение опишем построение волнового поля объёмных источников, распределённых в пространстве произвольно. Следует отметить, что поле перемещений точечной силы, действующей в точке (ξ, η, ζ), описывается формулой (5), но величина r в этом случае должна быть заменена на расстояние между источником и точкой наблюдения

$$x_1, x_2, x_3: \; \tilde{r} = \left[(x_1 - \xi)^2 + (x_2 - \eta)^2 + (x_3 - \zeta)^2\right]^{1/2}.$$

Если в области R трёхмерного пространства действуют непрерывно распределённые объёмные силы (по сути – это эластичный пригруз с распределённой по его поверхности внешней гармонической нагрузкой), характеризующиеся направлением $n_j\ (\xi, \eta, \zeta)$, интенсивностью $f(\xi, \eta, \zeta)$ (в практических случаях $f(\xi; \eta, \zeta) = const$) и одинаково зависящие от времени $\sim e^{i\omega t}$, то суммарное волновое поле даётся интегралом:

$$u_i = \iiint\limits_R f(\xi, \eta, \zeta) n_j(\xi, \eta, \zeta) G_{ij}(\tilde{r}, t) d\xi d\eta d\zeta, \qquad (10)$$

причём область R может быть как объёмом (эластичный пригруз имеет конечную толщину h), так и поверхностью (толщиной пригруза пренебрегаем). Тогда в последнем случае в (10) объёмный интеграл заменяется на поверхностный.

Таким образом, установленная динамическая функция Грина позволяет произвести количественную (аналитическую) оценку вклада упругих волновых полей различной поляризации (продольных/поперечных) как в дальней, так и в ближней зоне от источника возмущений, что в значительной степени предопределяет как качество конечного изделия (отформованного бетонного декоративного блочка), так и возможности управления процессом виброформования подобных изделий в целом.

Цитированная литература

1. **Жарий О.Ю., Улитко А.Ф.** Введение в механику нестационарных колебаний и волн.– К.: Выща школа. Головное изд-во, 1989.– 184с.
2. **Аки К., Ричард П.** Количественная сейсмология.– М.: Мир, 1983.– Т. 1.– 519с.
3. **Морс Ф.М., Фешбах Г.** Методы теоретической физики.– М.: Изд-во иностр. л-ры, 1960.– Т. 2.– 886с.
4. **Achenbach J.D.** Wave propagation in elastic solids.– Amsterdam: North-Holland Publ. Co., 1973.– 425p.
5. **Гринченко В.Т., Мелешко В.В.** Гармонические колебания и волны в упругих телах.– К.: Наукова думка, 1981.– 283с.
6. **Снеддон И.Н., Берри Д.С.** Классическая теория упругости.– М.: Физматгиз, 1961.– 219с.
7. **Улитко А.Ф.** Метод собственных векторных функций в пространственных задачах теории упругости. – К.: Наукова думка, 1979.– 261с.
8. **Pao Y.–H., Varatharajulu V.** Huygens' principle, radiation conditions and integral formulae for the scattering of elastic waves // Journal of Acoustical Society of America.– 1976.– V. 59.– P. 1361-1371.