УДК 691.31.536.21

ЧИСЕЛЬНО-АНАЛІТИЧНИЙ РОЗВ'ЯЗОК ОДНОМІРНОЇ ЗАДАЧІ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ В НЕОДНОРІДНИХ СЕРЕДОВИЩАХ

Риндюк В.І., к.ф.м.н., Прилипко Т.В., асист., Риндюк В.В., інж.
Вінницький державний технічний університет

Останнім часом спостерігається підвищений інтерес до зведення стін малоповерхових будинків із дрібнорозмірних бетонних блоків, які виготовлені із місцевої сировини. Цей інтерес викликаний розширенням індивідуального будівництва.

Для підвищення теплопровідності таких стін, їх потрібно оштукатурювати зовні і усередині. Тоді, для розрахунку теплопровідності, стіна буде являти собою неоднорідне середовище.

Розглянемо розв'язок задачі, коли досліджувана область є неоднорідною і складається, наприклад, з трьох частин з різними коефіцієнтами теплопровідності.

Задача зводиться до розв'язку наступного рівняння

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left[a(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right] + f(x,t), \tag{1}$$

$$a(x)\begin{cases} a_1, x < \xi_1, \\ a_2, \xi_1 < x < \xi_2, \\ a_3, \xi_2 < x, \end{cases} \tag{2}$$

в області : $\{(x,\ t),\ \ 0\ \ x < l,\ x \neq \xi_1,\ \xi_2,\ t > 0\}$, яке задовільняє початковій умові, умовам на межах

$$u\,(x,\,0) = \varphi(x), \tag{3}$$

$$[\beta_1 u_x + \gamma_1 u]_{x=0} = \psi_1(t), \qquad [\beta_2 u_x + \gamma_2 u]_{x=l} = \psi_2(t), \tag{4}$$

і умовам спряження

$$U|_{x=\xi_{1-0}} = U|_{x=\xi_{1+0}} = U|_{x=\xi_{2-0}} = U|_{x=\xi_{2+0}}, \tag{5}$$

$$a_1 \frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=\xi_{1-0}} = a_2 \frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=\xi_{1+0}} = a_2 \frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=\xi_{2-0}} = a_3 \frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=\xi_{2+0}}. \qquad (6)$$

Для чисельного розв'язку вводиться сітка таким чином, щоб точки розриву ξ_1 і ξ_2 попадали в її вузли. Наближений розв'язок задачі (1-6) будемо шукати у вигляді квадратичного поліному

$$\left.\begin{aligned} P_k(x,x_k,t) &= \sum_{i=0}^{2} A_i^K (x-x_k)^i, \quad x \in [0,\xi_1], \\ P_l(x,x_l,t) &= \sum_{i=0}^{2} B_i^l (x-x_l)^i, \quad x \in [\xi_1,\xi_2], \\ P_m(x,x_m,t) &= \sum_{i=0}^{2} C_i^m (x-x_m)^i, \quad x \in [\xi_2, 1]. \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

побудованого на інтервалах рівномірного розбиття відповідно областей $[0,\xi_1]$ з кроком $h_1 = \xi_1/(n_1+1)$, $[\xi_1,\xi_2]$ з кроком $h_2 = (\xi_2-\xi_1)/(n_2+1)$ і $[\xi_2, 1]$ з кроком $h_3 = (1-\xi_2)/(n_3+1)$, де $n_{1\text{-}3}$ – число внутрішніх вузлових точок.

Проінтегруємо (1) на інтервалах $[x_k - \alpha_k h_1,\ x_k + \alpha_k h_1]$, $[x_l - \alpha_l h_2,\ x_l + \alpha_l h_2]$ і $[x_m - \alpha_m h_3,\ x_m + \alpha_m h_3]$ з урахуванням наближеного розв'язку (7), де α_k, α_l, α_m числові коефіцієнти, отримаємо наступну систему К + L + М лінійних звичайних диференційних рівнянь відносно A_0^k, A_2^k, B_0^l, B_2^l, C_0^m, C_2^m

$$\left.\begin{aligned} \dot{A}_0^k + \frac{\alpha_k^2 h_1^2}{3}\dot{A}_2^k &= 2a_1 A_2^k + 1/(2\alpha_k h_1) \mathop{?}\limits_{x_k-\alpha_k h_1}^{x_k+\alpha_k h_1} f(x,t)dx, \\ \dot{B}_0^l + \frac{\alpha_l^2 h_2^2}{3}\dot{B}_2^l &= 2a_2 B_2^l + 1/(2\alpha_l h_2) \mathop{?}\limits_{x_l-\alpha_l h_2}^{x_l+\alpha_l h_2} f(x,t)dx, \\ \dot{C}_0^m + \frac{\alpha_m^2 h_3^2}{3}\dot{C}_2^m &= 2a_3 C_2^m + 1/(2\alpha_m h_3) \mathop{?}\limits_{x_m-\alpha_m h_3}^{x_m+\alpha_m h_3} f(x,t)dx, \end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

де $к = \overline{1,К}$, $l = \overline{1,L}$, $m = \overline{1,M}$.

Для розв'язання отриманої системи перепишемо (2-6) з урахуванням (7) у вигляді

$$\left.\begin{aligned} P_K(x_\kappa,x_\kappa,0) &= u(x_\kappa,0),\\ P_l(x_l,x_l,0) &= u(x_l,0),\\ P_m(x_m,x_m,0) &= u(x_m,0), \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

$$\left.\begin{aligned} \beta_1 P_\kappa x(0,x_l,t) + \gamma_1 P_\kappa(0,x_l,t) &= \psi_1,\\ \beta_2 P_m x(0,x_m,t) + \gamma_2 P_m(0,x_m,t) &= \psi_2 \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

$$\left.\begin{aligned} P_\kappa(\xi_1, \xi_1-h_1, t) &= P_\kappa(\xi_1, \xi_1+h_2, t),\\ P_l(\xi_2, \xi_2-h_2, t) &= P_l(\xi_2, \xi_2+h_3, t),\\ a_1 P_{\kappa x}(\xi_1, \xi_1-h_1, t) &= a_2\, P_{\kappa x}(\xi_1, \xi_1+h_2, t),\\ a_2 P_{lx}(\xi_2, \xi_2-h_2, t) &= a_2\, P_{lx}(\xi_2, \xi_2+h_3, t). \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

До рівнянь (9-11) необхідно додати умови неперервності температури на межах інтервалів розбиття відповідно на $[0, \xi_1]$, $[\xi_1, \xi_2]$ і $[\xi_3, 1]$

$$\left.\begin{aligned} P_K(x_\kappa \pm h_1,x_\kappa,t) &= P_K(x_\kappa, x_{\kappa\pm1},t), & \kappa &= \overline{1, K},\\ P_l(x_l \pm h_2,x_l,t) &= P_l(x_{l\pm1},x_{l\pm1},t), & l &= 1,L,\\ P_m(x_m \pm h_3,x_m,t) &= P_m(x_{m\pm1}, x_{m\pm1},t), & m &= 1,M. \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Підставляючи наближені розв'язки (7) у (11-12), отримуємо наступну систему алгебраїчних рівнянь

$$\left.\begin{aligned} &\beta_1(A_1^{\,1} - 2A_2^{\,1}h_1) + \gamma_1(A_0^{\,1} - A_1^{\,1}h_1 + A_2^{\,1}h_1^{\,2}) = \psi_1,\\ &\beta_2(C_1^{\,M} + 2C_2^{\,M}h_3) + \gamma_2(C_0^{\,M} + C_1^{\,M}h_3 + C_2^{\,M}h_3^{\,2}) = \psi_2,\\ &a_1(A_1^{\,N} + 2A_2^{\,N}h_1) = a_2(B_1^{\,1} - 2B_2^{\,1}h_2),\\ &a_2(B_1^{\,L} + 2B_2^{\,L}h_2) = a_3(C_1^{\,1} - 2C_2^{\,1}h_3),\\ &A_0^{\,K} + A_1^{\,K}h_1 + A_2^{\,K}h_1^{\,2} = B_0^{\,1} - B_1^{\,1}h_2 + B_2^{\,1}h_2^{\,2},\\ &B_0^{\,L} + B_1^{\,L}h_2 + B_2^{\,L}h_2^{\,2} = C_0^{\,1} - C_1^{\,1}h_3 + C_2^{\,1}h_3^{\,2},\\ &A_0^{\,k} + A_1^{\,k}h_1 + A_2^{\,k}h_1^{\,2} = A_0^{\,k+1},\ A_0^{\,k+1} - A_1^{\,k+1}h_1 + A_2^{\,k+1}h_1^{\,2} = A_0^{\,k},\ k = \overline{1, K-1},\\ &B_0^{\,l} + B_1^{\,l}h_2 + B_2^{\,l}h_2^{\,2} = B_0^{\,l+1},\ B_0^{\,l+1} - B_1^{\,l+1}h_2 + B_2^{\,l+1}h_2^{\,2} = B_0^{\,l},\ \ l = \overline{1, L-1},\\ &C_0^{\,m} + C_1^{\,m}h_3 + C_2^{\,m}h_3^{\,2} = C_0^{\,m+1},\ C_0^{\,m+1} - C_1^{\,m+1}h_3 + C_2^{\,m+1}h_3^{\,2} = C_0^{\,m},\ m = 1, M-1. \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

Розв'язуючи систему (13), знаходимо вирази для A_1^k, A_2^k, B_1^l, B_2^l, C_1^m, C_2^m через значення ψ_1, ψ_2, A_0^k, B_0^l, C_0^m. Через те, що коефіцієнти A_1^k, B_1^l, C_1^m не входять до рівняння (8), то приведемо рекурентні формули для A_2^k, B_2^l, C_2^m.

$$
\begin{cases}
A_2^1 = \dfrac{-A_0^1(+2\gamma_1 h_1) + A_0^2(\beta_1 - 2\gamma_1 h_1) - \psi h_1}{h_1^2(3\beta_1 - 2\gamma_1 h_1)}, \\[2ex]
A_2^k = \dfrac{A_0^{k-1} - 2A_0^k + A_0^{k+1}}{2h_1^2}, \quad k = \overline{2, K-1} \\[2ex]
A_2^K = \dfrac{-(2a_1h_2 + 6a_2h_1)A_0^K + (2a_1h_2 + 3a_2h_1)A_0^{K-1} + a_2h_1(4B_0^1 - B_0^2)}{6h_1^2(a_1h_2 + a_2h_1)}, \\[2ex]
B_2^1 = \dfrac{a_1h_2(4A_0^k - A_0^{k-1}) - (6a_1h_2 + 2a_1h_2 + 2a_2h_1)B_0^1 + (3a_1h_2 + 2a_2h_1)B_0^2}{6h_2^2(a_1h_2 + a_2h_1)} \\[2ex]
B_2^l = \dfrac{B_0^{l-1} - 2B_0^l + B_0^{l+1}}{2h_2^2}, \quad l = \overline{2, L-1} \\[2ex]
B_2^L = \dfrac{-(2a_2h_3 + 6a_3h_2)B_0^L + (2a_2h_3 + 3a_3h_2)B_0^{L-1} + a_3h_2(4C_0^1 - C_0^2)}{6h_2^2(a_2h_3 + a_3h_2)}, \\[2ex]
C_2^1 = \dfrac{a_2h_3(4B_0^L - B_0^{L-1}) - (6a_2h_3 + 2a_3h_2)C_0^1 + (3a_2h_3 + 2a_3h_2)C_0^2}{6h}, \\[2ex]
C_2^m = \dfrac{B_0^{m-1} - 2B_0^m - B_0^{m+1}}{2h_3^2}, \quad m = \overline{2, M-1} \\[2ex]
C_2^M = \dfrac{C_0^{M-1}(\beta_2 + \gamma_2 h_3) - C_0^M(\beta_2 + 2\gamma_2 h_3) + \psi_2 h_3}{h_2^2(3\beta_2 + 2\gamma_2 h_3)}.
\end{cases}
\tag{14}
$$

З урахуванням (14) рівняння (8) після відповідних перетворювань приймають вигляд матричного рівняння K + L + M – го порядку

$$\dot{R}_0 = CR_0 + D\dot{\Psi} + E\Psi + \Phi f$$

де $\dot{R}_0 = \{\dot{A}_0^{\,1}, \dot{A}_0^{\,2}, \ldots, \dot{A}_0^{\,K}, \dot{B}_0^{\,1}, \ldots, \dot{B}_0^{\,L}, \dot{C}_0^{\,1}, \ldots, \dot{C}_0^{\,M}\}^T$, (15)

C, D, E, Φ – змінні матриці по t.

Аналітичний розв'язок (15) з урахуванням (9) записується у вигляді

$$R_0 = R\sim(t,0)\,\bar{\varphi} + \overset{t}{\underset{0}{?}}R?\,(t,0)R^{-1}(\tau,0)\,(D\Psi + E\Psi + \Phi f)d\tau, \quad (16)$$

Для покращення розв'язку (16) числові коефіцієнти α знайдемо з умови того, що наближені розв'язки (7) при t = 0 із урахуванням початкових умов (3) задовільняли б рівняння (1)

$$\left.\begin{aligned} \dot{A}_0^{\,k}(0) &= \varphi_{xx}(x_k) + f(x_k, 0), & k &= \overline{1,K} \\ \dot{B}_0^{\,l}(0) &= \varphi_{xx}(x_l) + f(x_l, 0), & l &= \overline{1,L} \\ \dot{C}_0^{\,m}(0) &= \varphi_{xx}(x_m) + f(x_m, 0), & m &= \overline{1,M} \end{aligned}\right\} \quad (17)$$

З урахуванням (17) і (15) отримуємо K + L + M незалежних алгебраїчних рівнянь відносно відповідних числових коефіцієнтів α. Підставивши їх у (16) знаходимо розв'язки у відповідних вузлових точках розбиття інтервалів неоднорідного середовища.

На електронно-обчислювальній машині розв'язок системи рівнянь можна отримати за методом Рунге-Кутта.

Розглянутий алгоритм розв'язку при $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$ визначає розв'язок другої крайової задачі, при $\beta_1 = \beta_2 = 0$ - розв'язок першої задачі теплопровідності.

Зазначимо, що при $\alpha = 0$ розв'язок задачі (1) аналогічний звичайному методу прямих, при $\alpha^2 = 0{,}5$ – покращеному методу прямих, при $\alpha = 1$ – інтегральному методу прямих.

З урахуванням різних значень α та отриманням відповідних розв'язків, можна робити висновок про їх достовірність, що особливо важливо у випадку осциляцій функцій.

Практика показує, що при малому числі вузлів по методу прямих ($\alpha = 0$) розв'язок задачі отримуємо з великою похибкою.

Розглянутий чисельно-аналітичний розв'язок реалізовується на ЕОМ, що полегшує інженерне дослідження конкретних задач і урахуванням різних матеріалів.

Такий розв'язок дозволяє аналізувати різноманітні рішення і вибирати для досліджень структури, які є найкращими з теплотехнічної точки зору для різноманітних систем, а також матеріали, які використовуються.

ЛІТЕРАТУРА

1. Рындюк В.И. Применение улучшенного интегрального метода прямых к решению задач теплопроводности с кусочно-постоянным коэффициентом. //Ред. инженерно-физический журнал.- Минск, 1989.- 9 с. Деп. в ВИНИТИ 30.03.89, №2069 – В.
2. Еругин Н.П. Курс обыкновенных дифференциальных уравнений.- К.:Вища школа, 1974.- 471 с.