УДК 681.5:621.311.161

АДАПТАЦІЯ КРИТЕРІАЛЬНОГО МЕТОДУ ДО РОЗВ'ЯЗАННЯ ПОЛІНОМІАЛЬНИХ ЗАДАЧ В ОПТИМАЛЬНОМУ КЕРУВАННІ

Світлана Бевз (Україна, Вінниця)

Вступ. В будь-якій складній технічній системі керування повинно сприяти більш ефективній роботі всіх її елементів. Тому в задачах оптимального керування значною мірою використовуються моделі, які досить повно описують функціонування гіперонімічних та гіпонімічних структур. Таким чином, не випадково задачі оптимального керування складних систем, як правило мають велику міру складності і описуються математичними моделями поліноміального типу. Крім того, задачі оптимального керування, що особливо характерно для електроенергетики, іноді мають глибоко латентну присутність конкуруючого ефекту за однією чи за декількома змінними.

Проте класично критеріальний метод дозволяє вирішувати задачі позиноміального типу (математична модель може містити лише додатні члени), причому двоїста задача повинна мати лише додатні критерії подібності [1]. Виходячи з цього, спробуємо адаптувати критеріальний метод до більш широкого кола оптимізаційних задач.

Дескрипція основних методів розв'язання поліноміальних задач. Розв'язання позиноміальних задач широко розглядається в критеріальному програмуванні (КП) [1] і в геометричному програмуванні [2]. У різних більш чи менш вагомих наукових публікаціях зроблені спроби розв'язання поліноміальних (в інших джерелах - сигноміальних) оптимізаційних задач.

Сигноміальна задача може бути подана у вигляді різниці двох позиномів [2, 3], а будь-яке обмеження з сигноміальною лівою частиною еквівалентне системі двох позиноміальних обмежень, одне з яких є оберненим до обмежень, які класично використовуються в КП, завдяки введенню додаткової змінної. Проте розрахунок за даним методом залежить від знака умовного екстремуму прямої задачі, що в свою чергу може призвести до необхідності повторного розв'язання задачі.

У [2] також пропонується здійснювати апроксимацію знакозмінного полінома позиномом. Однак у цьому випадку на похибку розв'язання задачі буде накладатися похибка апроксимації.

За даних обставин необхідно розробити новий ефективний метод розв'язання сигноміальних задач.

У [3] репрезентується метод розв'язання сигноміальних задач шляхом переходу від вихідної до спеціально сформованої двоїстої задачі. Проте він екстраполюється лише на масив канонічних задач та задач невисокої міри складності. Спробуємо уніфікувати запропонований підхід для задач, кількість адитивних членів m математичних моделей яких значно більша від кількості змінних n.

Дві останні проблеми розглядатимуться в даній статті.

Розв'язання задач з від'ємними критеріями подібності.

Від'ємні критерії подібності π_i іноді з'являються при розв'язанні поліноміальних задач (можуть бути присутні як додатні, так і від'ємні члени в математичній моделі) або ж задач з імпліцитним конкуруючим ефектом у його членованих конструкціях (показники степенів функціоналу однакові за знаком). Такі задачі вимагають спеціального підходу й аналізу.

Для визначення оптимальної множини π_{io}, $\left(i = \overline{1, n}\right)$ в поліноміальних задачах високої міри складності можемо скористатися методами послідовного пошуку екстремуму. Лінійні програми формулюємо з огляду на контрарну позицію методу по відношенню до відсутності умови невід'ємності змінних у розробленому нами методі. Для забезпечення позитивності змінних лінійних програм вводимо комплементарні змінні $\pi_s{}'$, $\pi_s{}''$:

мінімізувати

$$\delta' = y_* - 1 = \sum_{i=1}^{m_1} C_i\left(\pi_i{}' - \pi_s{}'\right) - 1$$

за умов

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{m_1} \left(\pi_i{}' - \pi_s{}'\right) = 1\ ; \\ \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ji}\left(\pi_i{}' - \pi_s{}'\right) = 0\ , \quad j = \overline{1\ , n}\ , \end{cases}$$

і мінімізувати

$$\delta'' = 1 - y_* = 1 - \sum_{i=1}^{m_1} C_i\left(\pi_i'' - \pi_s''\right)$$

за умов

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{m_1}\left(\pi_i'' - \pi_s''\right) = 1 ; \\ \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ji}\left(\pi_i'' - \pi_s''\right) = 0 , \quad j = \overline{1, n} . \end{cases}$$

В результаті розв'язання поставлених задач будуть визначені межі ОДР. Середнє значення лівої та правої меж ОДР у разі достатньо малого інтервалу $\left(\pi_i' - \pi_s'\right) - \left(\pi_i'' - \pi_s''\right)$ може бути прийнято за оптимальний розв'язок. В іншому разі слід скористатися методами послідовного пошуку екстремуму для уточнення отриманого розв'язку.

Для поліноміальних задач канонічного типу максимізуючий вектор критеріїв подібності визначається з ортонормованої системи рівнянь, що акцептується методами геометричного та критеріального програмування.

Зауважимо, що критерії подібності й коефіцієнти цільової функції можуть мати від'ємні значення, а двоїста задача критеріального програмування полягає в максимізації степеневої функції. За цих обставин при реалізації обчислювальних алгоритмів на ЕОМ виникають труднощі в процесі визначення величини двоїстої функції. Як уже відзначалося, основа степеневої функції не може бути від'ємною це призводить до непрацездатності алгоритмів. Для подолання цих труднощів можна користуватися штучним прийомом угрупувань степеневих значень при основі (-1). Проте така методологія має дещо спорадичний характер, що стає на заваді її ефективній алгоритмічній реалізації.

Виходячи з цієї засади, для спрощення знаходження оптимального розв'язку і для уникнення операції піднесення від'ємного числа до деякого дробового показника степеня пропонується двоїсту функцію подати у вигляді:

$$\left|d(\pi)\right| = \prod_{i=1}^{m}\left(\left|\frac{a_i}{\pi_i}\right|\right)^{\pi_i} \prod_{k=1}^{p}\left(\left|\lambda_k\right|\right)^{\lambda_k} ,$$

що уможливлює наступна математична закономірність:

$|x| \cdot |y| = |x \cdot y|$.

Згідно з теоремою двоїстості $y_{min} = d_{max}$. Звідси $y_{min} = \pm |d_{max}|$.

Встановлення реального знаку мінімуму цільової функції чималою мірою визначається запропонованою нижче семіотичною системою, яка також може прислужитися для перевірки знайденого розв'язку.

Виходячи з системи

$$\begin{cases} a_i \prod_{j=1}^{n} x_j^{\alpha_{ji}} = \pi_i \cdot y_{min}\,, \quad i = \overline{1\,,\, m_1}\ ; \\ a_r \prod_{j=1}^{n} x_j^{\alpha_{jr}} = \dfrac{\pi_r}{\sum_{i=m_k+1}^{m_{k+1}} \pi_i} = \dfrac{\pi_r}{\lambda_k}\,, \quad r = \overline{m_k + 1\,,\, m_{p+1}}\ ; \quad k = \overline{1\,,\, p}\,, \end{cases} \tag{1}$$

запишемо відповідну їй семіотичну систему. Для цього позначимо знак a_i через q_{a_i}, знак x_i - q_{x_i}, π_i - $q_{\pi\, i}$, y_{min} - $q_{y_{min}}$:

$$\begin{cases} q_{a_i} \prod_{j=1}^{n} \left(q_{x_j} \right)^{\alpha_{ji}} = q_{\pi_i} \cdot q_{y_{min}}\,, \quad i = \overline{1\,,\, m_1}\ ; \\ q_{a_r} \prod_{j=1}^{n} \left(q_{x_j} \right)^{\alpha_{jr}} = \dfrac{q_{\pi_r}}{q_{\lambda_k}}\,, \quad r = \overline{m_k + 1\,,\, m_{p+1}}\ ; \quad k = \overline{1\,,\, p}\,, \end{cases} \tag{2}$$

де

$$\begin{cases} q_h = 1\,, \quad при \quad h > 0\ ; \\ q_h = -1\,, \quad при \quad h < 0\ . \end{cases}$$

Тут h - будь-яка з величин, що використовується в системі (1).

У випадку відсутності розв'язку системи (2) отримане значення $|d(\pi)| \neq |y_{min}|$.

Екстраполяція методу визначення оптимального розв'язку знакозмінних поліноміальних програм на задачі оптимального керування. Як уже зазначалося, метод розв'язання сигноміальних задач, наведений в [3], пристосований для розв'язання задач нульової та невисокої міри складності. Між тим, в оптимальному керуванні складними технічними системами здебільшого трапляються задачі високої міри складності. Виходячи з цього, адаптуємо даний метод до розв'язання таких задач.

Поліноміальна (сигноміальна) задача може бути сформульована наступним чином:

мінімізувати

$$y(x) = \sum_{i=1}^{m_1} \varpi_i a_i \prod_{j=1}^{n} x_j^{\alpha_{ji}}\ , \tag{3}$$

за умов

$$g_k(x) = \sum_{i=m_k+1}^{m_{k+1}} \varpi_i a_i \prod_{j=1}^{n} x_j^{\alpha_{ji}} \le \Omega_k\ , \quad k = \overline{1,\ p},$$

де $\varpi_i = \pm 1,\ \ \Omega_k = \pm 1$ - сигноми-функції, величини яких визначаються з умови задачі.

Така постановка задачі інспірує подолання ще однієї важливої суміжної проблеми в оптимальному керуванні — вводить у задачу КП обмеження зі зворотним знаком.

На відміну від раніше поданого методу, даний підхід не порушує умови:

$$\pi_i \ge 0, \quad i = \overline{1,\ m}. \tag{4}$$

Його каузативами виступають знакові функції ϖ_i, $i = \overline{1,\ m}$, Ω, Ω_k, $k = \overline{1,\ p}$, які об'єктивно поповнюють сформовані в термінах КП умови нормування $\sum_{i=1}^{m_1} \omega_i \pi_i = \Omega$ і ортогональності $\sum_{i=1}^{m} \omega_i \alpha_{ji} \pi_i = 0$, $j = \overline{1,\ n}$ та двоїсту функцію:

$$d(\pi) = \Omega \left[\prod_{i=1}^{m} \left(\frac{a_i \lambda_i}{\pi_i} \right)^{\varpi_i \pi_i} \right]^{\Omega}$$

де λ_i - нормовані множники Лагранжа:

$$\lambda_i = \left| \begin{array}{l} 1\ , \qquad i = \overline{1,\ m_1}\ \ ; \\ \Omega_k \sum_{j=m_k+1}^{m_{k+1}} \varpi_i \pi_j\ , \quad k = \overline{1,\ p}, \quad i = \overline{m_1 + 1,\ m}. \end{array} \right.$$

Сигноматичну функцію Ω не слід сприймати константно. Її конвенційна величина визначається умовою невід'ємності критеріїв подібності. При порушенні умови (4) приймають контрарне значення сигном-функції Ω.

Сформуємо критеріальну модель поліноміальних задач, прийнявши за базисний оптимальний варіант системи - y_o, x_{jo}, $j = \overline{1,\ n}$, π_{io}, $i = \overline{1,\ m}$.

Для цього в (3) штучно введемо сигном-функцію Ω і проведемо наступну заміну змінних:

$$y = y_* \cdot y_o,\ x_j = x_{j^*} \cdot x_{jo},\ j = \overline{1,\ n}.$$

Оптимальні значення критеріїв подібності визначаємо за методом інтегральних аналогів:

$$\pi_{io} = \frac{a_i \prod\limits_{j=1}^{n} x_j^{\alpha_{ji}}}{\Omega \cdot y_o}\ . \qquad (5)$$

Користуючись (5) і перетвореним відповідно (3), отримуємо критеріальну програму сигноміальної задачі:

$$y_* = \Omega \left(\sum_{i=1}^{m_1} \varpi_i \cdot \pi_{io} \prod_{j=1}^{n} x_{j^*}^{\alpha_{ji}} \right),$$

за допомогою якої сформулюємо лінійні програми аналогічно [1] для визначення меж ОДР:

мінімізувати $\delta' = y_* - 1 = \Omega \sum\limits_{i=1}^{m_1} C_i \varpi_i \pi_i' - 1$

за умов $\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{m_1} \varpi_i \pi_i' = \Omega\ ; \\ \sum\limits_{i=1}^{m} \varpi_i \alpha_{ji} \pi_i' = 0\ , \quad j = \overline{1\ ,\ n}\ , \end{cases}$

і мінімізувати $\delta'' = 1 - y_* = 1 - \Omega \sum\limits_{i=1}^{m_1} C_i \varpi_i \pi_i''$

за умов $\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{m_1} \varpi_i \pi_i'' = \Omega\ ; \\ \sum\limits_{i=1}^{m} \varpi_i \alpha_{ji} \pi_i'' = 0\ , \quad j = \overline{1\ ,\ n}\ . \end{cases}$

Сформульовані задачі можуть бути розв’язані методами ЛП, наприклад, симплекс-методом, з подальшим уточненням розв’язку методами послідовного пошуку екстремуму [1]: дихотомії, золотого перерізу, квадратичної інтерполяції чи регуляризованими методами.

Задачі високої міри складності успішно розв’язуються за допомогою програмного комплексу знаходження оптимального розв’язку, який використовує розроблену тут методологію.

Підсумовуючи все вищесказане можна зробити наступні висновки щодо адаптації критеріального методу до розв’язання більш широкого кола задач оптимального керування.

Висновки.

1. Розроблено метод, який є досить універсальний, оскільки дозволяє розв’язувати не лише канонічні оптимізаційні задачі, а й задачі високої міри складності, математична модель яких виражена поліномом, задачі з відсутнім у явному вигляді конкуруючим ефектом та задачі з оберненим відносно класичної постановки задачі в КП обмеженнями. Зауважимо, що використання в запропонованому методі семіотичної системи дозволяє будувати критеріальні моделі з від’ємними критеріями подібності, які раніше не розглядалися ні в геометричному програмуванні [2], ні в критеріальному [1]. Зазначимо, що введення від’ємних критеріїв подібності до задач КП підтверджується на сигніфікативному рівні, слугує важливим доповненням і ні в якій мірі не суперечить загальноприйнятому науковому осмисленню поняттєвого аспекту критеріїв у теорії подібності.
2. Розширено сферу застосування методу, запропонованого в [3], на задачі великої розмірності, які досить часто виникають при оптимальному керуванні в складних технічних системах.

Література

1. Астахов Ю.Н., Лежнюк П.Д. Применение критериального метода в электроэнергетике. - К.: УМК ВО, 1989. - 137 с.
2. Даффин Р., Питерсон Э., Зенер К. Геометрическое программирование. Пер. с англ. - М.: Мир, 1972. — 312 с.
3. Wilde Douglass J., Beightle C. S. Foundation of optimization. - Englewood Cliffs: Prentice - Hall, 1967. - IX, 480p.: tig. - Bibliogr. V.Kinci rozd.