УДК 681.5:621.311.161

Лежнюк Петро Дем'янович, доктор технічних наук
Вінницький державний технічний університет
аспірант Бевз Світлана Володимирівна

СИСТЕМИ ВІДНОСНИХ ОДИНИЦЬ У КРИТЕРІАЛЬНОМУ МОДЕЛЮВАННІ

Вступ.

Використання відомих методів розрахунку і дослідження режимів електричної системи (ЕС) з метою оптимального керування пов`язане з низкою труднощів: нелінійністю цільової функції та обмежень, складністю математичної моделі та інш. Як відомо, для такого класу задач не існує універсальних методів розрахунку, оскільки кожна з них вимагає свого підходу.

Так, для спрощення розрахунку багатьох оптимізаційних задач досить ефективно використовується критеріальне моделювання (КМ), яке передбачає перетворення вихідної моделі до безрозмірної (критеріальної) форми запису, де всі величини, які беруть участь у процесі, мають зміст критеріїв подібності. На основі критеріальних моделей встановлюються аналітичні зв`язки між параметрами процесу та параметрами елементів системи, в якій цей процес проходить, досліджуються не лише окремі характеристики і властивості системи, а й синтез її варіантів.

Побудова таких критеріальних моделей стала можливою завдяки створенню системи відносних одиниць (СВО) [1]. Але в загальному випадку (за винятком канонічних функцій) у вищезгаданих моделях критерії подібності ідентифікуються за умови повноти інформації про об'єкт дослідження і можуть бути визначені методом інтегральних аналогів лише при відомих коефіцієнтах вихідної моделі. Тому необхідно застосувати такі СВО, при яких критерії подібності можна було б знайти без знання цих констант. У даній статті розглядаються підходи, які розширюють можливості КМ у цьому напрямку.

Постановка задачі.

Припустимо, що існуючі зв'язки між параметрами процесу і параметрами елементів системи, в якій цей процес протікає, можна представити у вигляді [2] :

$$y(x) = \sum_{i=1}^{m_1} a_i \prod_{j=1}^{n} x_j^{\alpha_{ji}} , \qquad (1)$$

де $y(x)$ — деякий узагальнений техніко-економічний показник; a_i, α_{ji} — сталі коефіцієнти, які визначаються властивостями системи; x_j — змінні параметри системи; m_1 — кількість членів цільової функції моделі; n— кількість змінних.

Для розв'язання таких оптимізаційних задач необхідно проводити порівняння варіантів і за визначеним критерієм вибирати кращий. Тому слід адаптувати його для такого класу задач. Порівняння варіантів треба проводити з базисними величинами $y_б$, $x_{jб}$. Будь-який варіант об'єкта можна виразити через ці величини:

$$y = y \times y_б \;, \qquad x_j = x_j \times x_{jб}, \tag{2}$$

де $y_* = y / y_б$, $x_{j*} = x_j / x_{jб}$.

Підставивши (2) в (1), отримаємо

$$y_* \cdot y_б = \sum_{i=1}^{m_1} a_i \prod_{j=1}^{n} x_{j*}^{\alpha_{ij}} x_{jб}^{\alpha_{ij}} \,.$$

Зробивши деякі перетворення і заміну

$$\pi_{iб} = \frac{a_i \prod_{j=1}^{n} x_{jб}^{\alpha_{ij}}}{y_б} \tag{3}$$

отримаємо критеріальну форму запису задачі :

$$y_* = \sum_{i=1}^{m_1} \pi_{iб} \prod_{j=1}^{n} x_{j*}^{\alpha_{ij}} \,. \tag{4}$$

За допомогою (4) можна розв'язувати задачу співрозмірності та чутливості.

При цьому існує реальна можливість вивчення поведінки позінома (1) в області характерної точки, прийнятої за базисне значення, при меншій інформації, аніж його аналіз в абсолютних одиницях. З цієї позиції розглянемо можливість запису математичної моделі в критеріальній (узагальненій) формі з використанням різних систем відносних одиниць.

Евристична система відносних одиниць.

Для отримання критеріального рівняння процесу, описаного (1), скористаємось методом відносних одиниць. Як відомо з [3], суть цього методу полягає у приведенні рівняння до безрозмірного вигляду діленням всіх його членів на один з них. Загалом вибір дільника довільний, проте найбільш інформативні змінні (критерії подібності) отримуються у випадку ділення на показник ефективності. Таке перетворення стало можливим завдяки використанню теореми Фур'є [4], згідно з якою всі члени рівнняння, що описує будь-яке фізичне явище і подане у вигляді суми однорідних функцій в абсолютній системі одиниць, повинні мати однакову розмірність. Таким чином, при переході від абсолютних характеристик до відносних отримуємо рівняння, репрезентоване залежністю між безрозмірними параметрами - критеріями подібності.

Розділивши обидві частини рівняння (1) на у, отримаємо

$$1 = \sum_{i=1}^{m_1} \frac{a_i}{y} \prod_{j=1}^{n} x_j^{\alpha_{ij}}, \qquad (5)$$

де згідно з методом інтегральних аналогів критеріями подібності є :

$$\pi_i = \frac{a_i \prod_{j=1}^{n} x_j^{\alpha_{ji}}}{y} \qquad (6)$$

З (5) випливає, що сума критеріїв подібності для цільової функції

$$\sum_{i=1}^{m_1} \pi_i = 1 \ . \qquad (7)$$

Останній вираз називається умовою нормування, тобто в ньому пронормовані критерії подібності цільової функції.

Дану систему відносних одиниць доцільно використовувати, якщо заданий інтервал x_j містить екстремум цільової функції, значення якого приймають за базову величину $y_б$, $x_{jб}$. Для виявлення впливу кожного доданку цільової функції на величину y, а також для визначення зміни y по відношенню до $y_б$ при зміні x_j від $x_{jб}$ використовують евристичну систему відносних одиниць. Її доцільно також використовувати при вивченні поліномів, в яких $m_1 = 1$, тоді $\pi_б = 1$. Критеріальна залежність (4) трансформується до вигляду :

$$y_* = \prod_{j=1}^{n} x_{j*}^{\alpha_{ij}}$$

У зазначеному випадку цільова функція має вигляд виробничої функції Кобба-Дугласа [5]:

$$y = A\, x_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{\alpha_n}$$

<u>Модифікована евристична система відносних одиниць.</u>

Більш широке поняття критеріїв подібності вводиться при нормуванні їх до довільного числа, тобто

$$\sum_{i=1}^{m_1} \pi_i = b,$$

де b - нормуючий коефіцієнт, введення якого визначає систему відносних одиниць, що слугує своєрідним доповненням до евристичної СВО.

Критерій подібності модифікованої евристичної системи відносних одиниць відрізняються від критеріїв самої евристичної системи (6) і визначаються:

$$\pi_i = \frac{a_i \prod_{j=1}^{n} x_j^{\alpha_{ji}}}{y_{\min}} b.$$

У даному випадку система відносних одиниць будується з урахуванням властивостей критеріїв подібності [3, 6, 7], а саме: критерії подібності будь-якого явища можуть перетворитися в критерії іншої форми, що отримуються множенням, діленням критеріїв, піднесенням до степеня чи домноженням на будь-який сталий коефіцієнт b. Скориставшись зазначеною властивістю, отримаємо $b \cdot \pi_i = idem$ для будь-якого значення $\pi_i = idem$. У результаті даного подібного перетворення основного розв'язку розглядається сукупність розв'язків, що визначає групу подібних явищ при всіх можливих значеннях множника b. Такі властивості є важливими для раціональної побудови критеріїв подібності при моделюванні процесів.

Вибір значення нормуючого коефіцієнта може відігравати роль засобу впливу на темп розвитку досліджуваного процесу. Так, швидкоплинне явище завдяки введенню коефіцієнта b може бути відтворене при моделюванні в уповільненому темпі, що дає можливість провести детальне спостереження. У протилежному випадку такий підхід дозволяє прискорити змодельоване явище у десятки, сотні і навіть тисячі разів.

Як бачимо, на вибір коефіцієнта b не накладається практично ніяких обмежень; для кожного конкретного випадку його значення визначається метою дослідження.

Крім того, на практиці досить часто доводиться вводити різні інтервали вимірювань для однієї і тієї ж величини чи будувати для кожного явища окрему систему вимірювань. У цьому випадку досить ефективним може бути застосування модифікованої евристичної СВО. Наприклад, для синхронної машини час відраховувати не в секундах, а в долях від синхронної швидкості [3]. Так, при вивченні коливань, можна ввести замість t величину $\tau = t\sqrt{F / \ M_J}$. Тоді $b = 1 / \ \sqrt{F / \ M_J}$.

<u>Критеріальна система відносних одиниць</u>.

При створенні цієї системи з множини базових величин виділяють незалежні та залежні величини. Як зазначає Ю.М.Астахов [1], число незалежних базисних одиниць і вигляд функціонального зв'язку виявляється на підставі аналізу індикаторів подібності. Останні визначають можливість існування групи подібних явищ. За першою теоремою подібності, для всіх подібних явищ індикатори рівні одиниці [8] і для (1) мають вигляд:

$$\frac{M_i}{M} \prod_{j=1}^{n} M_j^{\alpha_{ij}} = 1, \qquad i = \overline{1, m_1},$$

де M_j — масштаби x_j; M_i — масштаби a_i; M — масштаб y.

Прологарифмувавши попередній вираз, отримуємо систему лінійних рівнянь :

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} \ln M_j - \ln M = -\ln M_i, \qquad i = \overline{1, m_1}.$$

Розв'язком даної системи рівнянь (при $m1 = n + 1$) буде визначення невідомих M_j та M при незалежних масштабах M_i:

$$M_j = \prod_{i=1}^{m_1} M_i^{\frac{\Delta_{ij}}{\Delta_б}}, \qquad j = \overline{1, n},$$

де $\Delta_б$ — визначник системи рівнянь; Δ_{ij} — взяті з протилежним знаком алгебраїчні доповнення елементів α_{ij};

$$M = \prod_{j=1}^{m_1} M_i^{\frac{\Delta_{i,n+1}}{\Delta_б}},$$

де $\Delta_{i,n+1}$ — взяті з протилежним знаком алгебраїчні доповнення елементів, які знаходяться на перетині і-тої стрічки з (n+1)-м стовпцем. Вважається [1,2], що функціональний зв'язок між базисними величинами аналогічний функціональному зв'язку між відповідними масштабами в індикаторах подібності, тобто :

$$x_{jб} = \prod_{i=1}^{m_1} a_i^{\frac{\Delta_{ij}}{\Delta_б}}, \qquad j = \overline{1, n},$$

$$y_б = \prod_{i=1}^{m_1} a_i^{\frac{\Delta_{i,n+1}}{\Delta_б}}.$$

Отримані залежності слугують доповненням до визначення критеріїв подібності з (3)

$$\pi_{iб} = \frac{a_i \prod_{j=1}^{n} x_{jб}^{\alpha_{ij}}}{\prod_{i=1}^{m_1} a_i^{\frac{\Delta_{i,n+1}}{\Delta_б}}}.$$

Оскільки чисельник та знаменник цього виразу однакові, то $\pi_{iб} = 1$, $i = \overline{1, m_1}$. Вираз (4) в критеріальній системі відносних одиниць запишеться :

$$y_б = \sum_{i=1}^{m_1} \prod_{j=1}^{n} x_{jб}^{\alpha_{ij}}$$

На цій підставі також отримуємо :

$$\sum_{i=1}^{m_1} \pi_{i\text{б}} = m_1. \qquad (8)$$

Застосування критеріальної СВО суттєво зменшує складність математичного апарату дослідження, а також зменшує кількість змінних, у яких розглядається задача.

Диференційна система відносних одиниць.

Екстрактивною ознакою диференціної СВО може слугувати операція диференціювання, оскільки пошук екстремуму позінома можна сформулювати, спираючись саме на цю операцію. Виходячи з цієї засади, в основу диференційної системи відносних одиниць [1] може бути покладено співвідношення:

$$\frac{\partial y}{\partial x_s} = \sum_{i=1}^{m_1} \alpha_{is} a_i x_{s\text{б}}^{\alpha_{is}-1} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq s}}^{n} x_{j\text{б}}^{\alpha_{ij}} = k_j^{'}.$$

Враховуючи (3), попередній вираз можна переписати:

$$\frac{\partial y}{\partial x_s} = \frac{y_\text{б}}{x_\text{б}} \sum_{i=1}^{m_1} \alpha_{is} \pi_{i\text{б}} = k_j^{'}$$

Дане рівняння перетворюємо до вигляду умови ортогональності:

$$\sum_{i=1}^{m_1} \alpha_{ij} \pi_{i\text{б}} = k_j, \qquad j = \overline{1, n}, \qquad (9)$$

де

$$k_j = k'_j \cdot \frac{x_{j\text{б}}}{y_\text{б}} = \frac{\dfrac{\partial y}{\partial x}}{\dfrac{y_\text{б}}{x_{j\text{б}}}} = \frac{tg\,\beta}{tg\,\gamma};$$

β — кут нахилу дотичної до осі абсцис ; γ — кут нахилу променя, що з'єднує початок координат з точкою на кривій залежності (1), яка відповідає даному k, до осі абсцис (рис.1).

Встановлено [1], що область зміни k не може бути довільною, а лежить всередині області, обмеженої показниками степеня α. Для подальшого аналізу зручно записати наступним чином:

$$k_j = \frac{\partial y / y}{\partial x / x_j}; \qquad j = \overline{1, \; n}.$$

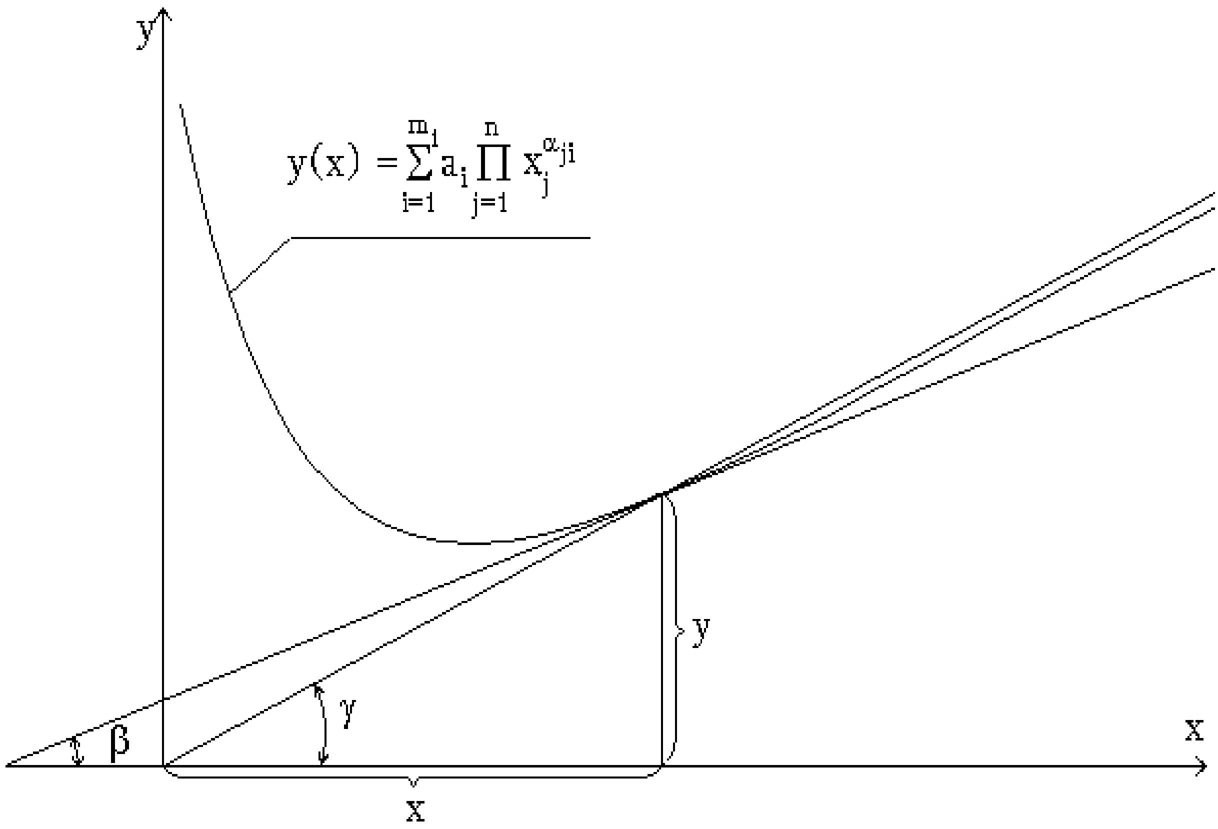

Рис. 1. Графічна інтерпретація коефіцієнта k.

Така форма представлення дозволяє зробити висновок, що коефіцієнт k_j показує вплив відносної похибки параметра y на відносну похибку параметра x_j. Загально прийняте наукове осмислення введеного коефіцієнта в роботах з автоматичного регулювання набуває змісту коефіцієнта впливу [9], у дослідженнях з економіки - коефіцієнта еластичності [10].

Оскільки величина допустимої відносної похибки поняття суб'єктивне [11], то це дозволяє інженеру прийняти на власний розсуд те чи інше значення k_j , $j = \overline{1, n}$, але обов'язково значення, яке лежить в області, обмеженій показниками степеня α.

Для критеріїв подібності, які визначаються методом інтегральних аналогів, виконується умова нормування (7), як і для евристичної системи відносних одиниць.

Остаточно запишемо систему лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{m_1} \alpha_{ij} \cdot \pi_{iб} = k_j \ ; \\ \sum_{i=1}^{m_1} \pi_{iб} = 1 \ . \end{cases} \qquad (10)$$

Представивши цю систему в матричній формі, при умові, що матриця α невироджена, міра складності цієї задачі $s = m - n - 1 = 0$ (m — сумарна кількість членів вихідної моделі), отримуємо єдиний розв'язок :

$$\pi = [\alpha]^{-1}\, k\ ,$$

де

$$\alpha = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \dots\ \alpha_{1m} \\ \dots\dots & \dots\dots \\ \alpha_{n1} & \dots\ \alpha_{nm} \\ 1 & \dots\ 1 \end{vmatrix}; \quad \pi = \begin{vmatrix} \pi_1 \\ \pi_2 \\ \dots \\ \pi_m \end{vmatrix}; \quad k = \begin{vmatrix} k_1 \\ \dots \\ k_n \\ 1 \end{vmatrix}.$$

Диференційна система відносних одиниць дає можливість знайти відносну зміну y при відхиленні x_j від характерної точки, в якій k_j — довільне число.

Дану систему доцільно використовувати у випадках, коли доводиться досліджувати математичну модель у точках, координати яких відрізняються на відому величину від координат стаціонарної точки.

Проте, якщо увагу дослідника привертає поведінка позінома саме в області його екстремуму, можна скористатись модифікацією даної СВО, в якій коефіцієнти k_j приймають нульові значення. Тоді система лінійних рівнянь (10) трансформується до вигляду ортонормованої системи [2].

Розглянута СВО побудована, спираючись на першу похідну. Тим часом в інженерній практиці досить часто виникає необхідність дослідження моделі в інших характерних точках. У таких випадках СВО необхідно будувати, виходячи з другої і третьої похідних.

Завершуючи огляд різних СВО в КМ, відзначимо парадигму екстрактивних особливостей у теорії відносних одиниць з позиції критеріального методу, а саме:

- формулювання правил відбору з множини можливих поєднань незалежних параметрів таких множин, які містять характерні величини;
- пошук операцій, котрі однозначно визначають базисне значення.

Висновки.

У статті показана доцільність використання СВО при розв'язанні задач критеріальним методом. Певна річ, просте зіставлення безрозмірних величин є більш інформативним щодо суті явищ, аніж аналіз розмірних. СВО містить набір безрозмірних коефіцієнтів, які характеризують об'єкт і спрощують порівняння. У всіх випадках величини для порівняння повинні мати однакові базисні значення, тобто бути виражені в одній СВО. Вибір найбільш доцільної з них залежить від задачі, яку ставить перед собою дослідник. Зокрема в електроенергетиці реалізація таких систем дозволяє розв'язати низку важливих задач, таких як визначення оптимальних параметрів режимів електричних систем, проведення аналізу оптимального розв'язку на чутливість і співрозмірність та інші.

Зазначимо, що безрозмірні параметри допомагають уникнути помилок у процесі перерахунку із одної системи одиниць в іншу. Необхідність у таких перерахунках може виникнути при проектуванні. Крім того, при зміні деяких параметрів режиму системи, коли змінюються величини коефіцієнтів вихідної моделі, але зберігаються їх співвідношення, результати попереднього аналізу можуть бути повністю використані в наступних рохрахунках.

Працездатність та ефективність запропонованих СВО підтверджується при розв'язанні конкретних електроенергетичних задач.

Література.

Астахов Ю.Н. Критериальный метод и его применение в энергетике. Дис. на соиск. учен. степ. доктора техн. наук. - М.: МЭИ, 1985. - 264 с.

Астахов Ю.Н., Лежнюк П.Д. Применение критериального метода в электроэнергетике. - К.: УМК ВО, 1989. - 140 с.

Веников В.А. Теория подобия и моделирования. - М.: Высшая школа, 1976.

4. Лоссиевский В.А. Применение теории подобия и динамических аналогий к задачам моделирования объектов и процессов регулирования. - М.-Л.: Госэнергоиздат, 1951. - 152 с.

5 Терехов Л.Л. Производственные функции. - М.: Статистика, 1974. - 128 с.

6. Резняков А.Б. Метод подобия. (Сущность и практическое применение.) - Алма-Ата: Изд-во АН Казах. ССР, 1959. - 152 с.

7. Гухман А.А. Введение в теорию подобия. - М.: Высшая школа, 1963. - 256 с.

8. Кирпичев М.В. Теория подобия. - М.: Из-во АН СССР, 1953. - 96 с.

9. Фролов А.А. Теоретические основы конструирования и надежности РЭА. - М.: Высшая школа, 1970. - 88 с.

10 Кобринский Н.Е., Майминас Е.З., Смирнов А.Д. Введение в экономическую кибернетику. - М.: Экономика, 1975. - 343 с.

11. Гастев Ю.А. Гомоморфизм и модели.- М.: Наука,1975.- 150 с.