УДК 621.643.25.002.2

Дудар І.Н. д.т.н., проф.; Швець В.В. асп.

ДОСЛІДЖЕННЯ ПРОЦЕСУ ПОШИРЕННЯ ТИСКУ В БЕТОННІЙ СУМІШІ ПРИ СИЛОВИХ ВПЛИВАХ

Статичне пресування бетонних сумішей в основному провадиться при відносно високих тисках (понад 2,5-3,0 МПа), наприклад, при виробництві залізобетонних труб. Реалізація такого виду пресування вимагає наявності потужного силового устаткування, що зв'язано з певними технічними труднощами.

Перспективними, з погляду підвищення продуктивності і якості ущільнення є комбіновані способи з використанням динамічного силового впливу тиску (СВТ). У результаті дії перемінної об'ємної сили в десятки разів знижується в'язкість суміші і підвищується її текучість. Однак, застосування нових високопродуктивних методів виготовлення ЗБК на основі динамічного пресування обмежено в даний час, тому що причиною є недостатньо чітке теоретичне й експериментальне обґрунтування. Іншою причиною, що стримує розвиток прогресивної технології, є відсутність механізмів для реалізації методу динамічного силового ущільнення бетонних сумішей.

Відомо [1], що фундаментальним рішенням рівняння поширення тиску $\frac{\partial P}{\partial t} = a^2 \cdot \frac{\partial^2 P}{\partial x^2}$ в бетонній суміші є функція $\varphi_\xi(x, t)$:

$$\varphi_{\xi(x,\, t)} = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \cdot e^{\frac{-(x-\xi)^2}{4a^2 t}} . \tag{1}$$

Якщо ми розглянемо фіксований момент часу t > 0, то максимальний тиск буде обернено пропорційний коефіцієнту

$$a = \sqrt{\frac{K_\phi}{\rho \cdot \left(\Pi \cdot \alpha - \frac{\beta}{E_б} \right)}} .$$

Функція $\varphi_\xi(x,t)$ має важливий фізичний смисл, що може бути зв'язаний з поняттям механічного імпульсу тиску пресування.

Фізичним імпульсом тиску будемо називати наступний (початковий) розподіл тиску:

$$f_\xi = \begin{cases} P_0, & \text{якщо} \quad |x - x_0| < \xi, \\ 0 & \phantom{\text{якщо}} \quad |x - x_0| > \xi \end{cases}$$

де P_o – постійна і $\xi > 0$.

Такий початковий розподіл тиску виникає, якщо в стовп бетонної суміші, тиск у якому у кожній точці спочатку дорівнює нулю, у момент часу $t = 0$, на відрізку від $x_0 - \xi$ до $x_0 + \xi$ раптово введена деяка кількість імпульсу (тиск прикладений) так, що тиск підскакує до значення P_o.

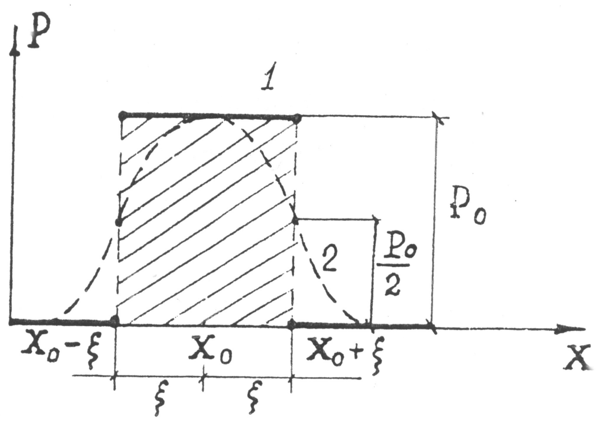
Кількість енергії θ_0 пропорційно заштрихованій площі $2 \cdot \xi \cdot P_0$, а саме, якщо S – площа перетину, те $2 \cdot \xi \cdot S$ – є об'єм відрізка тіла, а $2 \cdot \xi \cdot S \cdot \gamma$ - його маса, тоді $\theta = 2 \cdot \xi \cdot S \cdot \gamma \cdot P_0 \varepsilon$, де ε - деформація стиску.

Практично тиск не може представляти розривної функції $f_\xi(\chi)$, але графік тиску буде дуже близький до графіка $f_\xi(\chi)$, (він буде мати вид пунктирної лінії на рис. 1) і буде тим менше відрізнятися від графіка $f_\xi(\chi)$, чим різкіше і коротше буде удар [1].

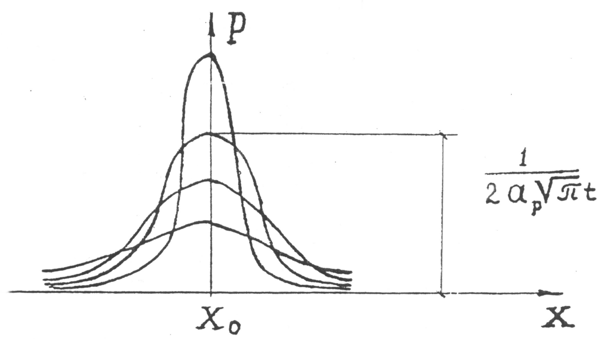
Той факт, що на графіку функція $f_\xi(\chi)$ тиску в точках $(x_0 – \xi)$ і $(x_0 + \xi)$ не визначена не має значення (якщо розривну функцію $f_\xi(\chi)$ представити інтегралом Фурьє, те його значення в цих точках буде дорівнювати $P_{0/2}$, тому можна вважати, що і тиск дорівнює $P_{0/2}$).

При такому імпульсі тиску рішення задачі, що характеризує процес поширення в масиві впливу, що пресує, буде мати вигляд:

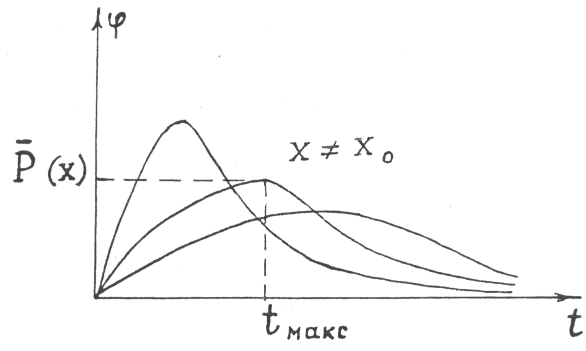
$$P_{(x,\,t)} = \frac{P_0}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{x-\xi}^{x+\xi} e^{\frac{-(x-\xi)^2}{4a^2 t}} \cdot d\xi \qquad (2)$$



а)



б)



в)

Рис. 1. Зміна тиску при імпульсному пресуванні:

а) 1- графік імпульсного впливу;

2- графічне зображення апроксимації імпульсного пресування функцією $\varphi_{Xo}(x,t)$.

б) зміна в часі імпульсу тиску в точці $x=x_0$.

в) характер поширення імпульсу тиску в околицях точки x_0 ($x\neq x_0$).

По теорії про середнє інтегральне числення

$$\int_{-x_0-\xi}^{x_0+\xi} e^{\frac{-(x-\xi)^2}{4a^2t}} \cdot d\xi = 2\xi e^{\frac{-\left(x-\bar{\xi}\right)^2}{4a^2t}},$$

де $\bar{\xi}^{x_0-\xi}$ - точка, що лежить в середині інтервалу інтегрування:

$$(x-\xi) < \xi < (x_0+\xi).$$

Тоді рішення (2) можна записати у вигляді:

$$P_{(x,t)} = \frac{2\varepsilon P_0}{2a\sqrt{\pi t}} \cdot e^{\frac{-\left(x-\bar{\xi}\right)^2}{4a^2t}} = 2\xi\sqrt{\frac{Q_0E_бA}{h}}\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \cdot e^{\frac{-\left(x-\bar{\xi}\right)^2}{4a^2t}}.$$

Тому що , $2\xi P_0 = 2\xi\sqrt{\frac{Q_0 E_б A}{h}}$ припустимо, що кількість енергії

$Q_0 = \frac{h}{4E_б A\xi^2}$ (щоб виключити фізичні параметри тіла). Тоді ми одержимо рішення у випадку фізичного імпульсу тиску у вигляді:

$$P_{(x,\,t)} = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \cdot e^{\frac{-\left(x-\bar{\xi}\right)^2}{4a^2 t}}, \qquad (3)$$

$$P_{(x,\,t)} = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \cdot e^{\frac{-\left(x-x_э\right)^2}{4a^2 t}} = \varphi_{x_0}(x,t) \cdot \qquad (4)$$

Розглянемо як поширюється тиск у тілі після точкового імпульсу. Для цього досліджуємо графіки фундаментального рішення $\varphi_{Xo}(x,t)$ для різних значень часу $t>0$ [1].

1. Графік функції $\varphi_{Xo}(x,t)$ при будь-якому значенні t симетричний відносно прямої $x = x_0$. Максимум тиску досягається при $x=x_0$ і він дорівнює $\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}$ (у кожен момент часу максимальний тиск буде в тій точці тіла, де був прикладений імпульс).

Якщо розглянемо момент часу $t > 0$, то максимальний тиск буде обернено пропорційний a_p.

2. Площа під кожною кривою дорівнює 1. Фізично це означає, що кількість механічної енергії, повідомлена тілу в початковий момент часу $t = 0$ у результаті імпульсу залишається незмінною з часом.

3. У кожній точці $x \neq x_0$ функція $\varphi_{Xo}(x,t)$, як функція часу t, спочатку зростає від 0 (при $t = 0$) до деякого максимального значення U(x), і потім монотонно убуває, прагнучи до 0 при $t\to\infty$.

При $t = 0$ функція $\varphi_{Xo}(x,t)$ не визначена і ми маємо її межу при $t\to 0$:

$$\lim \varphi_{x_0}(x,t) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \cdot e^{\frac{-\left(x-x_0\right)^2}{4a^2 t}} \qquad (5)$$

Знайдемо максимальне значення U(x) узявши похідну функцію $\varphi_{Xo}(x,t)$ по t [1]:

$$\frac{\partial \varphi_{x_0}}{\partial t} = \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \cdot \left[-\frac{1}{2t\sqrt{t}} \cdot e^{\frac{-(x-x_0)^2}{4a^2 \cdot t}} + \frac{(x-x_0)^2}{4a^2 \cdot t^2 \sqrt{t}} \cdot e^{\frac{-(x-x_0)^2}{4a^2 \cdot t}} \right] =$$

$$= \frac{1}{4a \cdot t\sqrt{\pi t}} \cdot e^{\frac{-(x-x_0)^2}{4a^2 \cdot t}} \left[\frac{(x-x_0)^2}{2a^2 \cdot t} - 1 \right]. \tag{6}$$

Прирівняємо вираз в квадратних дужках до “0”, знайдемо те значення $t = t_{max}$, при якому $\varphi = U$.

$$t_{макс} = \frac{(x-x_0)^2}{2a^2} \tag{7}$$

Отже:

$$\overline{P}(x) = \varphi_{x_0}(x, t_{макс}) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi \frac{(x-x_0)^2}{2a^2}}} \cdot e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4a^2 \frac{(x-x_0)^2}{2a^2}}} =$$

$$= \frac{1}{2(x-x_0) \cdot \sqrt{\frac{\pi}{2}}} \cdot e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi e} \cdot |x-x_0|}. \tag{8}$$

Таким чином, тиск у будь-якій точці $x \neq x_0$ спочатку підвищується до значення $\overline{P}(x)$, а потім убуває і прагне до “0”. Максимальне значення $\overline{P}(x)$ в точці $x \neq x_0$ тіла обернено пропорційно при цьому відстані цієї точки від точки прикладання імпульсу, а час, необхідний для досягнення цього максимального тиску, прямо пропорційний квадрату зазначеної відстані.

Рішення (2) при початковій умові (2) можна розглядати як результат накладення тисків, що виникають у той момент часу t внаслідок безупинно розподілених по тілу імпульсів тисків інтенсивності $f(\xi)$ у точці ξ, прикладених у момент t = 0. Такий імпульс можна приблизно реалізувати у вигляді великого числа ударів різної інтенсивності, прикладених у момент t=0, на дуже короткий проміжок часу до плити, так що в кожній точці ξ миттєво виникає тиск $P(\xi)$.

Нехай початковий розподіл тиску

$$f(x) = \begin{cases} P_0 & \text{при} \quad x_1 < x < x_2 \\ 0 & \text{при} \quad x < x_1 \quad \text{или} \quad x > x_2 \end{cases} . \tag{9}$$

Тоді в якості рішення по формулі (1) ми одержимо функцію:

$$P_{(x,\, t)} = \frac{P_0}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} d\xi \tag{10}$$

При розробці теоретичних основ ущільнення бетонної суміші за допомогою статико-динамічного пресування авторами використані дослідження в області гідродинаміки [2,3], теорії руху ґрунтових вод [4–8] і теорії фільтраційної консолідації ґрунтів [9, 10].

Рівняння руху води, що віджимається за допомогою тиску, з бетонної суміші, можна вивести, використовуючи відомий принцип збереження імпульсу (теорему кількості руху). Даний принцип у загальному вигляді записується:

Чистий приплив імпульсу в систему	+	Сума всіх поверхневих сил, що діють на систему	+	Сума всіх об'ємних сил	=	Швидкість зростання імпульсу системи

$$\overline{W}_p + \iint_V \overline{P} dS + \iiint_V \overline{F} \rho dV = \frac{d}{dt} \iiint_V \overline{W} \cdot \rho \, dV \tag{11}$$

Перетворимо інтеграл поверхневих сил, узятий по поверхні в потрійний інтеграл по об'єму, використовуючи формулу Остроградського:

$$\iint_V \overline{P} dS = \iiint_V \operatorname{div} \overline{P} dV \tag{12}$$

Підставивши отриманий вираз в (11), одержимо:

$$\iiint_V \operatorname{div} \overline{P} dV + \iiint_V \overline{F} \rho dV = \frac{d}{dt} \iiint_V \overline{W} \rho dV \tag{13}$$

Дане рівняння перетворимо до виду:

$$\iiint_V \left(\operatorname{div} \overline{P} + \overline{F} \rho - \frac{d\left(\overline{W} \rho\right)}{dt} \right) dV = 0 \tag{14}$$

Тому що об'єм V узятий довільно, то випливає:

$$\operatorname{div}\overline{P} + \rho\overline{F} = \frac{d\left(\overline{W}\rho\right)}{dt} \qquad (15)$$

Масові (об'ємні) сили можна визначити, використовуючи залежність [4]:

$$\overline{F} = \frac{\mu \cdot \overline{W}}{k \cdot \rho} = \frac{\overline{W}}{\frac{k}{\mu} \cdot \rho} = \frac{\overline{W}}{\frac{k_{\phi}}{\rho} \cdot \rho} = \frac{\overline{W}}{k_{\phi}}, \qquad (16)$$

де μ, до - в'язкість води і коефіцієнт теоретичної проникності;

ρ - об'ємна маса рідкої фази;

$к_{ф}$ - коефіцієнт фільтрації бетонної суміші.

Відповідно до закону фільтрації Дарсі:

$$\overline{W} = -\frac{k}{\mu} \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad}}\, P = -\frac{k_{\phi}}{\rho} \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad}}\, P\ .$$

Рівняння руху води відповідно до принципу збереження імпульсу остаточно можна представити у вигляді:

$$\operatorname{div}\overline{P} + \frac{\rho \cdot \overline{W}}{k_{\phi}} = \frac{d\left(\overline{W}\rho\right)}{dt}\ . \qquad (17)$$

Виведемо диференціальне рівняння ущільнення (консолідації) бетонної суміші в часі при впливі суцільної рівномірно розподіленого навантаження в умовах фільтрації води, думаючи, що зміна витрати води, що видавлюється з пор бетону, з достатньою точністю описується законом фільтрації, а зміна пористості - законом ущільнення [10].

Для елементарного шару на глибині по товщині виробу в бетонній суміші зменшення кількості води (стиск) наближено дорівнює зменшенню пористості бетону.

$$\iint_S \rho \cdot \overline{W} dS \approx -\frac{\partial(\rho\Pi)}{\partial t}, \qquad (18)$$

$$\operatorname{div}\left(\rho\overline{W}\right) + \frac{\partial(\rho\Pi)}{\partial t} = 0. \qquad (19)$$

Запишемо рівняння нерозривності в наступному вигляді:

$$\mathrm{div}\left(\rho\overline{W}\right)+\Pi\frac{\partial\rho}{\partial t}+\rho\frac{\partial\Pi}{\partial t}=0 \qquad (20)$$

З огляду на, що пористість П бетонної суміші зв'язана з коефіцієнтом ε залежністю $\Pi=\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}$ і зневажаючи в знаменнику цього виразу зміною коефіцієнта пористості порівняно з одиницею, узявши деяке середнє значення $\varepsilon_{порівн}$, одержимо:

$$\frac{\partial\Pi}{\partial t}\approx\frac{1}{1+\varepsilon_{ср}}\cdot\frac{\partial\varepsilon}{\partial t}\ . \qquad (21)$$

За законом ущільнення ґрунтів [10]:

$$\frac{\partial\varepsilon}{\partial t}=-m_0\frac{\partial Px}{\partial t}\ , \qquad (22)$$

де m_0 - коефіцієнт стискальності бетону, дорівнює відношенню зміни коефіцієнта пористості до величини діючого тиску:

$$m_0=\left(\varepsilon_1-\varepsilon_2\right)/\left(P_2-P_1\right)$$

Для правої частини рівняння (21), одержимо:

$$\frac{\partial\Pi}{\partial t}=-\frac{m_0\partial Px}{(1+\varepsilon_{ср})\partial t}=-m_v\frac{\partial Px}{\partial t}\ . \qquad (23)$$

Вираз m_0 назвемо коефіцієнтом відносної стискальності бетонної суміші. Підставимо в (20) $\frac{\partial\Pi}{\partial t}=-m_v\frac{\partial P_x}{\partial t}$ і $\frac{\partial P}{\partial t}=\frac{\partial P}{\partial P}\frac{\partial P}{\partial t}$, тоді одержимо

$$\mathrm{div}\left(\rho\overline{W}\right)+\left(\Pi\frac{\partial P}{\partial P}-\rho_{m\,v}\right)\frac{\partial P_x}{\partial t} \qquad (24)$$

Тиск, внаслідок малої стискальності рідини, незначно впливає на зміну її щільності ρ, тому можна з достатньою для практики точністю записати:

$$\frac{\rho-\rho_0}{P-P_0}=\alpha_ж\rho_0\ , \qquad (25)$$

де $\alpha_ж$ - коефіцієнт об'ємної пружності (стискальності) рідини, І/МПа;

Диференціюючи ρ по Р в рівнянні (25) одержимо:

$$\frac{\partial\rho}{\partial P}\approx\rho_0\alpha_ж\ . \qquad (26)$$

З огляду на незначну стискальність рідкої фази в бетонній суміші, запишемо:

$$\alpha_{жер} \approx \alpha_{ж}\rho_0 \tag{27}$$

Підставимо вираз (25, 26) у рівняння (23) одержимо:

$$\operatorname{div}\left(\rho\overline{W}\right) + \left(\Pi\rho_0\alpha_{ж} - \rho_0 m_v\right)\frac{\partial Px}{\partial t} = 0$$

чи

$$\operatorname{div}\left(\rho\overline{W}\right) + \rho_0\left(\Pi\alpha_{ж} - \rho_0 m_v\right)\frac{\partial Px}{\partial t} = 0 \tag{28}$$

Нехтуємо інерційними силами і визначимо з рівняння (17) div($\rho\overline{W}$):

$$\frac{\rho\overline{W}}{k_{ф}} + \operatorname{div}\overline{P} = 0$$

Звідки

$$\operatorname{div}\left(\rho\overline{W}\right) = -\operatorname{div}\left[k_{ф}\cdot\operatorname{div}\overline{P}\right] \tag{29}$$

Підставимо вираз (29) у (28):

$$-k_{ф}\cdot\operatorname{div}\left(\operatorname{div}P\right) + \rho_0\left(\Pi\alpha_{ж} - m_v\right)\frac{Px}{\partial t} = 0\,, \tag{30}$$

$$\nabla^2 P = \frac{\rho_0}{k_{ф}}\left(\Pi\alpha_{ж} - m_v\right)\frac{\partial Px}{\partial t} \tag{31}$$

Вираз (31) можна записати у вигляді:

$$\frac{\partial Px}{\partial t} = \frac{k_{ф}}{\rho_0\left(\Pi\alpha_{ж} - m_v\right)}\nabla^2 P \tag{32}$$

Якщо позначити вираз при $\nabla^2 P$ через ар, то одержимо:

$$\frac{\partial Px}{\partial t} = a_p\nabla^2 P \tag{33}$$

Дане рівняння аналогічне рівнянню теплопровідності, яке можна вирішувати, використовуючи задані початкові і граничні умови і тим самим визначити задачу пресування бетонної суміші [11, 12].

Відносну стискальність бетонної суміші m_v можна визначити з виразу:

$$m_v = \frac{\Delta h}{h\left(P_2 - P_1\right)} = \frac{\varepsilon}{\Delta P} = \frac{\sigma}{E\cdot\Delta P} \tag{34}$$

Але тому що σ=ΔP, то остаточно одержимо і за умови обмеження стиску

$$m_v = \frac{\beta}{E_{б.см.}}, \tag{35}$$

де $E_{б\cdot см.}$ - початковий модуль пружності бетонної суміші; β=0,71 - коефіцієнт об'ємного стиску.

Підставивши (35) у (32), остаточно одержимо:

$$\frac{\partial Px}{\partial t} = \frac{K_ф}{\beta\left(П\alpha_ж - \frac{\beta}{E_{б.см.}}\right)}\nabla^2 P = a_p \nabla^2 P \tag{36}$$

Коефіцієнт a_p у рівнянні (33) назвемо коефіцієнтом провідності тиску в бетонній суміші чи баропровідності. В даний час немає робіт, у яких би розглядалися питання, що зв'язані з визначенням швидкості поширення тиску в масиві виробу. Тому питання про оцінку впливу властивостей бетонної суміші чи інших факторів на характер зміни коефіцієнта баропровідності a_p взагалі не ставився, порядок і абсолютні значення коефіцієнта до дійсного часу залишалися невідомими.

Тому доцільно, використовуючи вираз (32), визначити порядок і абсолютне значення коефіцієнта баропровідності a_p для бетонної суміші за таких умов:

- коефіцієнт фільтрації приймаємо рівним $K_ф$=0,00063 см/с;
- пористість П=0,2;
- коефіцієнт об'ємного стиску води $\alpha_{же}=4 \cdot 10^{-4}\ \frac{I}{МПа}$; β=0,71;
- модуль об'ємної деформації бетонної суміші Е=20 МПа.

Підставимо значення всіх показників у формулу для перебування a_p:

$$a_p = \frac{K_ф}{\rho\left(П\alpha_ж - \frac{\beta}{E_{б.см.}}\right)} = \frac{0{,}00063}{0{,}001 \cdot (0{,}2 \cdot 4 \cdot 10^{-5} - \frac{0{,}71}{200})} = 175 \ \frac{cm^2}{c}.$$

Прийнявши значення коефіцієнта фільтрації для бетонної суміші даного складу на початку процесу силової обробки тиском (при В/Ц=0,375) $K_{фн}$=0,00063 см/с і в кінці (при В/Ц=0,29) $K_{фк}$=0,00005 см/с [6] одержимо середнє значення коефіцієнта фільтрації:

$$К_ф^{ср} = \frac{0,00063 + 0,00005}{2} = 0,00034 \ см/с \ .$$

Тоді значення коефіцієнта баропровідності для даних умов пресування бетонної суміші дорівнює:

$$a_р^{ср} = \frac{0,00034}{0,001 \cdot 0,00183} = \frac{34 \cdot 10^{-5}}{0,183 \cdot 10^{-5}} = 186 \ см^2/с \ .$$

У зв'язку з тим, що коефіцієнти фільтрації $К_ф$ і відносної стискальності залежать від питомого тиску пресування, тобто $К_ф=f(P)$ $m_v=f(P)$, те значення коефіцієнта баропровідності $a_р$ у процесі пресування також буде змінюватися. Визначимо значення $a_р$ на початку пресування бетонної суміші з $(В/Ц)_н$=0,375. Визначимо значення $m_v^н$ при зростанні тиску до 1,0 МПа:

$$m_v^н = \frac{\varepsilon^н}{P_{прес}^н} = \frac{0,43}{10} = 0,0043 \ \frac{1}{кгс/см^2} = 0,00043 \ МПа \ .$$

При $К_ф$=0,00063 см/с бетонної суміші на початку процесу визначимо $a_р$:

$$a_р^н = К_ф^н / \gamma \cdot m_v^н = 0,00063 / 0,001 \cdot 0,0043 = 146,5 \ см^2/с \ .$$

Визначимо значення $a_р$ на етапі пресування при збільшенні навантаження з 1,0 до 3,0 МПа. Для цього обчислимо $m_v^k = \varepsilon^k - \varepsilon^н / P_к - P_н = 0,012/2 = 0,006 \ \frac{1}{МПа}$.

Приймаємо $К_ф$=0,00005 см/с, тоді $a_р$ дорівнює:

$$a_р^к = \frac{K_ф}{\gamma \cdot m_v^k} = \frac{0.00005}{0,001 \cdot 0,0006} = 83,3 \ \frac{см^2}{с} \ .$$

ВИСНОВОК

Досліджено процес поширення тиску в бетонній суміші під дією динамічного пресування. Розроблено математичну модель поширення імпульсів тиску в шарі бетону від дії органа, що пресує під час ущільнення виробів динамічним пресуванням. Використовуючи принцип збереження імпульсу виведено рівняння руху води, що віджимається пресуванням.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Абраманович И.Г., Левин В.И. Уравнения математики и физики. - М.: Наука, 1969. - 286 с.

2. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. - М.: Наука, 1973. - 848 с.

3. Кочин Н.Е., Нибель И.А., Роззе Н.В. Теоретическая гидромеханика. Часть I- М.: Гос. изд. физмат, лит-ры. 1963. - 583с.

4. Лейбензон Л.С. Движение природных жидкостей и газов в пористой среде. - М.-Л.: Госгехиздат, 1947. - 224 с.

5. Щелкачев В.Н. Основные уравнения движения упругой жидкости в упругой пористой среде. -Докл. АН СССР, 1946, т. 52, № 2.- С. 103-106.

6. Щелкачев В.Н. Исследование одноразмерного движения упругой жидкости в упругой пористой среде. - Докл, 1946, т. 52, № 3.- с. 203-210.

7. Щелкачев В.Н., Лапук Б.Б. Подземная гидравлика. - М.-Л.: Гостоптехиздат, 1949. - 524 с.

8. Чарный М.А. Основы подземной гидравлики. - М.: Гостехиздат, 1956. - 260 с.

9. Прогноз скорости осадок, оснований сооружений. /Под. ред. Н.А. Цитовича.- М.: Стройиздат, 1967.-239с.

10. Цытович Н.А. Механика грунтов. - М.: Госстр. изд., 1963. -636 с.

11. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. - М.: Наука, 1972. - 736 с.

12. Кошляков Н.С., Глинер У.В., Смирнов М.Н. Уравнения в частных производных математической физики. - М.: Высшая школа, 1970. - 712 с