

**МОДЕЛЮВАННЯ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ
ДВОМІРНИХ НЕОДНОРІДНИХ БАГАТОШАРОВИХ СЕРЕДОВИЩ**

В.І. Риндюк, А.М. Власенко, С.В. Риндюк

Вступ

Проблема енергозбереження в Україні з кожним роком в зв'язку з ростом цін на енергоресурси стає все гострішою. Настав той момент, коли під час будівництва житла необхідно значно зменшувати тепловитрати. Добре відомим фактором є той, що через стіни житлових будинків втрачається близько половини тепла.

Підвищення термічного опору повинно досягатися не за рахунок збільшення товщини стін, а через застосування теплоізоляційних стін такої товщини, що забезпечують їх міцність і довговічність без перевитрат будівельних матеріалів.

З метою економії тепла при зведенні зовнішніх стін поряд з кладкою з легких кам'яних матеріалів застосовують полегшені кладки, в яких частина каменів замінюються легким бетоном, засипками, теплозахисними вставками чи повітряними прошарками.

До таких кладок можна віднести полегшену чи колодязну кладки, що складаються з двох стінок товщиною в півцеглини і легкого теплозахисного матеріалу, що укладається між ними. Зв'язок між стінками виконується поперечними рядами цегли, що розташовані через деяку кількість ложкових рядів кладки. Поперечникові ряди розміщують в одній площині чи в шаховому порядку. Інколи для з'єднання внутрішніх та зовнішніх шарів використовують арматурні стержні. Найбільш суттєвим недоліком багатошарових стінових конструкцій є наявність зв'язків між шарами – „містків холоду”. В роботі [4] розглянуто методику теплотехнічного розрахунку багатошарового середовища в одномірному випадку. Разом з тим теплотехнічний розрахунок двомірних багатошарових середовищ потребує більш детального аналізу.

Постановка задачі, визначальні співвідношення

Для моделювання теплопровідності прийемо, що стіна буде являти собою неоднорідне середовище, яке складається з п'яти частин з різними коефіцієнтами теплопровідності, що сприймає змінні теплові потоки на зовнішніх межах і містить в собі джерела теплоти (рис. 1).

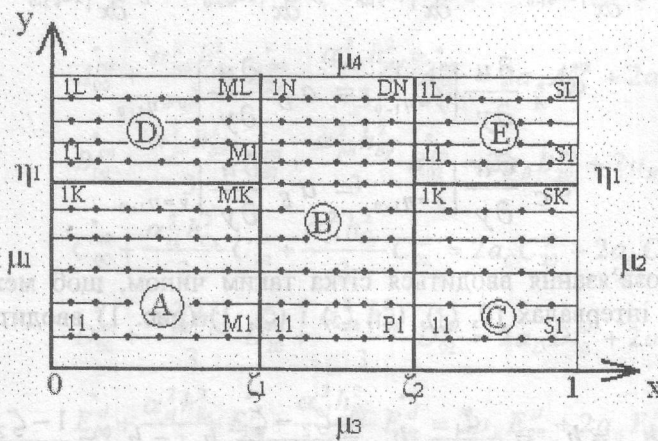


Рис. 1. Розрахункова схема теплопровідності стіни

Багатошаровість досліджуваного середовища (стіни), через яку проходить тепло, передбачає застосування математичної моделі теплопровідності.

Розглянемо розв'язок задачі, коли досліджувана область є неоднорідною і складається, наприклад, з п'яти елементів з різними коефіцієнтами теплопровідності.

Задача зводиться до розв'язання такого рівняння:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[a(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[a(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} \right] + f(x, y, t) \quad (1)$$

$$a(x, y) = \begin{cases} a_A, & x < \zeta_1, y < \eta_1; \\ a_B, & \zeta_1 < x < \zeta_2, 0 < y < 1; \\ a_C, & \zeta_2 < x < 1, 0 < y < \eta_1; \\ a_E, & \zeta_2 < x < 1, \eta_1 < y < 1; \\ a_D, & 0 < x < \zeta_1, \eta_1 < y < 1 \end{cases} \quad (2)$$

в області:

$$\{(x, y, t), 0 < x < 1, 0 < y < 1, x \neq \zeta_1, \zeta_2, y \neq \eta_1, t > 0\},$$

яке задовольняє початковій умові, умовам на границях

$$u(x, y, 0) = \varphi(x, y), \quad (3)$$

$$u(0, y, t) = \mu_1(t), \quad u(1, y, t) = \mu_2(t), \quad u(x, 0, t) = \mu_3(t), \quad u(x, 1, t) = \mu_4(t), \quad (4)$$

і умовам спряження

$$u \Big|_{x=\zeta_{1-0}} = u \Big|_{x=\zeta_{1+0}}; \quad u \Big|_{y=\eta_{1-0}} = u \Big|_{y=\eta_{1+0}} \quad (5)$$

$$u \Big|_{x=\zeta_{2-0}} = u \Big|_{x=\zeta_{2+0}}; \quad (6)$$

$$a_A \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=\zeta_{1-0}} = a_B \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=\zeta_{1+0}}; \quad a_B \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=\zeta_{2-0}} = a_C \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=\zeta_{2+0}} \quad (7)$$

$$a_D \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=\zeta_{1-0}} = a_B \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=\zeta_{1+0}}; \quad a_B \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=\zeta_{2-0}} = a_E \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=\zeta_{2+0}} \quad (8)$$

$$a_A \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=\eta_{1-0}} = a_D \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=\eta_{1+0}} \quad (9)$$

$$a_C \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=\eta_{1-0}} = a_E \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=\eta_{1+0}} \quad (10)$$

Для числового розв'язання вводиться сітка таким чином, щоб межі розриву ζ_1, ζ_2, η_1 попадали в її вузли. На інтервалах $(0, \zeta_1), (\zeta_1, \zeta_2)$ і $(\zeta_2, 1)$ (рис. 1) вводиться рівномірна сітка відповідно з кроком

$$h_{Ax} = h_{Dx} = \frac{\zeta_1}{M+1}, \quad h_{Bx} = \frac{\zeta_2 - \zeta_1}{P+1}, \quad h_{Cx} = h_{Ex} = \frac{1 - \zeta_2}{S+1}$$

Відносно осі y на інтервалах $(0, \eta_1)$ і $(\eta_1, 1)$ введемо сітку з кроком

$$h_{Cy} = h_{Ay} = \frac{\eta_1}{K+1}, \quad h_{Dy} = h_{Ey} = \frac{1 - \eta_1}{L+1}; \quad h_{By} = h_{Ay} \quad \text{- для інтервалу } (0, \eta_1);$$

$$h_{By} = h_{Dy} \quad \text{- для інтервалу } (\eta_1, 1).$$

Наближений розв'язок задачі (1-10) будемо шукати у вигляді квадратичного поліному

$$\begin{aligned}
 P_{mk}(x, x_m, y, y_k, t) &= \sum_{i,j=0}^2 A_{ij} (x - x_m)^i (y - y_k)^j, x \in [0, \zeta_1], y \in [0, \eta_1] \\
 P_{pn}(x, x_p, y, y_n, t) &= \sum_{i,j=0}^2 B_{ij} (x - x_p)^i (y - y_n)^j, x \in [\zeta_1, \zeta_2], y \in [0, 1] \\
 P_{sk}(x, x_s, y, y_k, t) &= \sum_{i,j=0}^2 C_{ij} (x - x_s)^i (y - y_k)^j, x \in [\zeta_2, 0], y \in [0, \eta_1] \\
 P_{ml}(x, x_m, y, y_l, t) &= \sum_{i,j=0}^2 D_{ij} (x - x_m)^i (y - y_l)^j, x \in [0, \zeta_1], y \in [\eta_1, 1] \\
 P_{sl}(x, x_s, y, y_l, t) &= \sum_{i,j=0}^2 E_{ij} (x - x_s)^i (y - y_l)^j, x \in [\zeta_2, 1], y \in [\eta_1, 1]
 \end{aligned}
 \tag{11}$$

де $k = \overline{1, K}, m = \overline{1, M}, l = \overline{1, L}, s = \overline{1, S}, p = \overline{1, P}$.

Проінтегруємо (1) на інтервалах

$$\begin{aligned}
 & [x_{mk} - \alpha_{mk} h_{Ax}, x_{mk} + \alpha_{mk} h_{Ax}] [y_{mk} - \alpha_{mk} h_{Ay}, y_{mk} + \alpha_{mk} h_{Ay}]; \\
 & [x_{pn} - \alpha_{pn} h_{Bx}, x_{pn} + \alpha_{pn} h_{Bx}] [y_{pn} - \alpha_{pn} h_{By}, y_{pn} + \alpha_{pn} h_{By}]; \\
 & [x_{sk} - \alpha_{sk} h_{Cx}, x_{sk} + \alpha_{sk} h_{Cx}] [y_{sk} - \alpha_{sk} h_{Cy}, y_{sk} + \alpha_{sk} h_{Cy}]; \\
 & [x_{ml} - \alpha_{ml} h_{Dx}, x_{ml} + \alpha_{ml} h_{Dx}] [y_{ml} - \alpha_{ml} h_{Dy}, y_{ml} + \alpha_{ml} h_{Dy}]; \\
 & [x_{sl} - \alpha_{sl} h_{Ex}, x_{sl} + \alpha_{sl} h_{Ex}] [y_{sl} - \alpha_{sl} h_{Ey}, y_{sl} + \alpha_{sl} h_{Ey}],
 \end{aligned}$$

з урахуванням наближеного розв'язку (11), де $\alpha_{mk}, \alpha_{pn}, \alpha_{sk}, \alpha_{ml}, \alpha_{sl}$ – числові коефіцієнти, отримаємо таку систему $M \times K + P \times N + S \times K + M \times L + S \times L$ лінійних звичайних диференціальних рівнянь відносно $A_{00}^{mk}, B_{00}^{pn}, C_{00}^{sk}, D_{00}^{ml}, E_{00}^{sl}$

$$\begin{aligned}
 \dot{A}_{00}^{mk} + \frac{\alpha_{mk}^2 h_{Ax}^2}{3} \dot{A}_{20}^{mk} + \frac{\alpha_{mk}^2 h_{Ay}^2}{3} \dot{A}_{02}^{mk} &= 2a_A A_{20}^{mk} + 2a_A A_{02}^{mk} + \Phi_A^{mk}; \\
 \dot{B}_{00}^{pn} + \frac{\alpha_{pn}^2 h_{Bx}^2}{3} \dot{B}_{20}^{pn} + \frac{\alpha_{pn}^2 h_{By}^2}{3} \dot{B}_{02}^{pn} &= 2a_B B_{20}^{pn} + 2a_B B_{02}^{pn} + \Phi_B^{pn}; \\
 \dot{C}_{00}^{sk} + \frac{\alpha_{sk}^2 h_{Cx}^2}{3} \dot{C}_{20}^{sk} + \frac{\alpha_{sk}^2 h_{Cy}^2}{3} \dot{C}_{02}^{sk} &= 2a_C C_{20}^{sk} + 2a_C C_{02}^{sk} + \Phi_C^{sk}; \\
 \dot{D}_{00}^{ml} + \frac{\alpha_{ml}^2 h_{Dx}^2}{3} \dot{D}_{20}^{ml} + \frac{\alpha_{ml}^2 h_{Dy}^2}{3} \dot{D}_{02}^{ml} &= 2a_D D_{20}^{ml} + 2a_D D_{02}^{ml} + \Phi_D^{ml}; \\
 \dot{E}_{00}^{sl} + \frac{\alpha_{sl}^2 h_{Ex}^2}{3} \dot{E}_{20}^{sl} + \frac{\alpha_{sl}^2 h_{Ey}^2}{3} \dot{E}_{02}^{sl} &= 2a_E E_{20}^{sl} + 2a_E E_{02}^{sl} + \Phi_E^{sl},
 \end{aligned}
 \tag{12}$$

де Φ – подвійний інтеграл від $f(x,y)$ на відповідному інтервалі інтегрування;

$$k = \overline{1, K}, m = \overline{1, M}, l = \overline{1, L}, s = \overline{1, S}, p = \overline{1, P}.$$

Для розв'язання отриманої системи перепишемо (3-10) з урахуванням (11). В результаті отримаємо таку систему алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{aligned}
 P_{mk}(x_m, x_m, y_k, y_k, 0) &= A_{00}^{mk}(0) = U(x_m, y_k, 0); \\
 P_{pn}(x_p, x_p, y_n, y_n, 0) &= B_{00}^{pn}(0) = U(x_p, y_n, 0); \\
 P_{sk}(x_s, x_s, y_k, y_k, 0) &= C_{00}^{sk}(0) = U(x_s, y_k, 0); \\
 P_{ml}(x_m, x_m, y_l, y_l, 0) &= D_{00}^{ml}(0) = U(x_m, y_l, 0); \\
 P_{sl}(x_s, x_s, y_l, y_l, 0) &= E_{00}^{sl}(0) = U(x_s, y_l, 0).
 \end{aligned}
 \tag{13}$$

$$\begin{aligned}
 A_{00}^{1k} - A_{10}^{1k} h_{Ax} + A_{20}^{1k} h_{Ax}^2 &= \mu_1, k = \overline{1, K}; \\
 D_{00}^{1l} - D_{10}^{1l} h_{Dx} + A_{20}^{1l} h_{Dx}^2 &= \mu_1, l = \overline{1, K}; \\
 C_{00}^{Sk} + C_{10}^{Sk} h_{Cx} + C_{20}^{Sk} h_{Cx}^2 &= \mu_2, k = \overline{1, K}; \\
 E_{00}^{Sl} + E_{10}^{Sl} h_{Ex} + E_{20}^{Sl} h_{Ex}^2 &= \mu_2, l = \overline{1, L}; \\
 A_{00}^{m1} - A_{01}^{m1} h_{Ay} + A_{02}^{m1} h_{Ay}^2 &= \mu_3, m = \overline{1, M}.
 \end{aligned}
 \tag{14}$$

$$\begin{aligned}
 B_{00}^{p1} - B_{01}^{p1} h_{By} + B_{02}^{p1} h_{By}^2 &= \mu_3, p = \overline{1, P}; \\
 C_{00}^{s1} - C_{01}^{s1} h_{Cy} + C_{02}^{s1} h_{Cy}^2 &= \mu_3, s = \overline{1, S}; \\
 D_{00}^{mL} + D_{01}^{mL} h_{Dy} + D_{02}^{mL} h_{Dy}^2 &= \mu_4, m = \overline{1, M}; \\
 B_{00}^{pN} + B_{01}^{pN} h_{By} + D_{02}^{pN} h_{By}^2 &= \mu_4, p = \overline{1, P}; \\
 E_{00}^{sL} + E_{01}^{sL} h_{Ey} + E_{02}^{sL} h_{Ey}^2 &= \mu_4, s = \overline{1, S}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A_{00}^{Mk} + A_{10}^{Mk} h_{Ax} + A_{20}^{Mk} h_{Ax}^2 &= B_{00}^{1n} - B_{10}^{1n} h_{Bx} + B_{20}^{1n} h_{Bx}^2, n = \overline{1, K}; k = \overline{1, K}; \\
 D_{00}^{Ml} + D_{10}^{Ml} h_{Dx} + D_{20}^{Ml} h_{Dx}^2 &= B_{00}^{1n} - B_{10}^{1n} h_{Bx} + B_{20}^{1n} h_{Bx}^2, n = \overline{K+2, N}; l = \overline{1, L}; \\
 B_{00}^{Pk} + B_{10}^{Pk} h_{Bx} + B_{20}^{Pk} h_{Bx}^2 &= C_{00}^{1k} - C_{10}^{1k} h_{Cx} + C_{20}^{1k} h_{Cx}^2, k = \overline{1, K}; \\
 C_{00}^{sK} + C_{01}^{sK} h_{Cy} + C_{02}^{sK} h_{Cy}^2 &= E_{00}^{s1} - E_{01}^{s1} h_{Ey} + E_{02}^{s1} h_{Ey}^2, s = \overline{1, S}; \\
 B_{00}^{Pn} + B_{10}^{Pn} h_{Bx} + B_{20}^{Pn} h_{Bx}^2 &= E_{00}^{l1} - E_{10}^{l1} h_{Ex} + E_{20}^{l1} h_{Ex}^2, n = \overline{K+2, N}; l = \overline{1, L}; \\
 A_{00}^{mK} + A_{01}^{mK} h_{Ay} + B_{02}^{mK} h_{Ay}^2 &= D_{00}^{m1} - D_{01}^{m1} h_{Dy} + D_{02}^{m1} h_{Dy}^2, m = \overline{1, M}.
 \end{aligned}
 \tag{15}$$

$$\begin{aligned}
 a_A (A_{10}^{Mk} + 2A_{20}^{Mk} h_{Ax}) &= a_B (B_{10}^{1n} - 2B_{20}^{1n} h_{Bx}), \begin{cases} k = \overline{1, K} \\ n = \overline{1, K} \end{cases} \\
 a_A (A_{01}^{mK} + 2A_{02}^{mK} h_{Ay}) &= a_D (D_{01}^{m1} - 2D_{02}^{m1} h_{Dy}), m = \overline{1, M} \\
 a_D (D_{10}^{Ml} + 2D_{20}^{Ml} h_{Dx}) &= a_B (B_{10}^{1n} - 2B_{20}^{1n} h_{Bx}), \begin{cases} l = \overline{1, L} \\ n = \overline{K+2, N} \end{cases} \\
 a_B (B_{10}^{Pn} + 2B_{20}^{Pn} h_{Bx}) &= a_E (E_{10}^{1n} - 2E_{20}^{1n} h_{Ex}), n = \overline{K+2, N} \\
 a_E (E_{01}^{s1} - 2E_{02}^{s1} h_{Ey}) &= a_C (C_{01}^{sK} + 2D_{02}^{sK} h_{Cy}), s = \overline{1, S} \\
 a_B (B_{10}^{Pn} + 2B_{20}^{Pn} h_{Bx}) &= a_C (C_{10}^{1n} - 2C_{20}^{1n} h_{Cx}), n = \overline{1, K}
 \end{aligned}
 \tag{16}$$

До рівнянь (13-16) необхідно додати умови неперервності температури на межах

інтервалів розбиття відповідно на $(0, \zeta_1) \times (0, \eta_1)$, $(\zeta_1, \zeta_2) \times (0, 1)$, $(\zeta_2, 1) \times (0, \eta_1)$, $(0, \zeta_1) \times (\eta_1, 1)$ і $(\zeta_1, 1) \times (\eta_1, 1)$.

$$A_{00}^{mk} + A_{10}^{mk} h_{Ax} + A_{20}^{mk} h_{Ax}^2 = A_{00}^{m+1,k}, \begin{cases} k = \overline{1, K} \\ m = \overline{1, M-1} \end{cases}$$

$$A_{00}^{mk} + A_{01}^{mk} h_{Ay} + A_{02}^{mk} h_{Ay}^2 = A_{00}^{m,k+1}, \begin{cases} k = \overline{1, K-1} \\ m = \overline{1, M} \end{cases}$$

$$A_{00}^{m,k+1} - A_{01}^{m,k+1} h_{Ay} + A_{02}^{m,k+1} h_{Ay}^2 = A_{00}^{m,k}, \begin{cases} m = \overline{1, M} \\ k = \overline{1, K-1} \end{cases}$$

$$A_{00}^{m+1,k} - A_{10}^{m+1,k} h_{Ax} + A_{20}^{m+1,k} h_{Ax}^2 = A_{00}^{m,k}, \begin{cases} m = \overline{1, M-1} \\ k = \overline{1, K} \end{cases}$$

$$B_{00}^{pn} + B_{10}^{pn} h_{Bx} + B_{20}^{pn} h_{Bx}^2 = B_{00}^{p+1,n}, \begin{cases} p = \overline{1, P-1} \\ n = \overline{1, N} \end{cases}$$

$$B_{00}^{pn} + B_{01}^{pn} h_{By} + B_{02}^{pn} h_{By}^2 = B_{00}^{p,n+1}, \begin{cases} p = \overline{1, P} \\ n = \overline{1, K} \end{cases}$$

$$B_{00}^{pn} - B_{01}^{pn} h_{By} + B_{02}^{pn} h_{By}^2 = B_{00}^{p,n-1}, \begin{cases} p = \overline{2, P} \\ n = \overline{2, M+1} \end{cases}$$

$$B_{00}^{p+1,n} - B_{10}^{p+1,n} h_{Bx} + B_{20}^{p+1,n} h_{Bx}^2 = B_{00}^{p,n}, \begin{cases} p = \overline{1, P-1} \\ n = \overline{1, N} \end{cases}$$

$$B_{00}^{pn} + B_{01}^{pn} h_{Dy} + B_{02}^{pn} h_{Dy}^2 = B_{00}^{p,n+1}, \begin{cases} p = \overline{1, P} \\ n = \overline{K+1, N-1} \end{cases}$$

$$B_{00}^{pn} - B_{01}^{pn} h_{Dy} + B_{02}^{pn} h_{Dy}^2 = B_{00}^{p,n-1}, \begin{cases} p = \overline{1, P} \\ n = \overline{K+2, N} \end{cases}$$

$$C_{00}^{sk} + C_{10}^{sk} h_{Cx} + C_{20}^{sk} h_{Cx}^2 = C_{00}^{s+1,k}, \begin{cases} s = \overline{S-1} \\ K = \overline{1, K} \end{cases} \quad (17)$$

$$C_{00}^{sk} + C_{01}^{sk} h_{Cy} + C_{02}^{sk} h_{Cy}^2 = C_{00}^{s,k+1}, \begin{cases} s = \overline{1, S} \\ k = \overline{1, K-1} \end{cases}$$

$$C_{00}^{sk} - C_{01}^{sk} h_{Cy} + C_{02}^{sk} h_{Cy}^2 = C_{00}^{s,k-1}, \begin{cases} s = \overline{1, S} \\ k = \overline{2, K} \end{cases}$$

$$C_{00}^{s+1,k} - C_{10}^{s+1,k} h_{Cx} + C_{20}^{s+1,k} h_{Cx}^2 = C_{00}^{s,k}, \begin{cases} s = \overline{1, S-1} \\ k = \overline{1, K} \end{cases}$$

$$D_{00}^{mk} + D_{10}^{mk} h_{Dx} + D_{20}^{mk} h_{Dx}^2 = D_{00}^{m+1,k}, \begin{cases} e = \overline{1, L} \\ m = \overline{1, M-1} \end{cases}$$

$$D_{00}^{ml} + D_{01}^{ml} h_{Dy} + D_{02}^{ml} h_{Dy}^2 = D_{00}^{m,l+1}, \begin{cases} m = \overline{1, M} \\ l = \overline{1, L-1} \end{cases}$$

$$D_{00}^{m,l+1} - D_{01}^{m,l+1} h_{Dy} + D_{02}^{m,l+1} h_{Dy}^2 = D_{00}^{m,l}, \begin{cases} m = \overline{1, M} \\ l = \overline{1, L-1} \end{cases}$$

$$D_{00}^{m+1,l} - D_{10}^{m+1,l} h_{Dx} + D_{20}^{m+1,l} h_{Dx}^2 = D_{00}^{m,l}, \begin{cases} m = \overline{1, m-1} \\ l = \overline{1, L} \end{cases} \quad (13)$$

$$E_{00}^{sl} + E_{10}^{sl} h_{Ex} + E_{20}^{sl} h_{Ex}^2 = E_{00}^{s+1,l}, \begin{cases} l = \overline{1, L} \\ s = \overline{1, S-1} \end{cases}$$

$$E_{00}^{sl} + E_{01}^{sl} h_{Ey} + E_{02}^{sl} h_{Ey}^2 = E_{00}^{s,l+1}, \begin{cases} s = \overline{1, S} \\ l = \overline{1, L-1} \end{cases} \quad (18)$$

$$E_{00}^{s+1,l} - E_{10}^{s+1,l} h_{Ex} + E_{20}^{s+1,l} h_{Ex}^2 = E_{00}^{s,l}, \begin{cases} s = \overline{1, S-1} \\ l = \overline{1, L} \end{cases}$$

$$E_{00}^{s,l+1} - E_{01}^{s,l+1} h_{Ey} + E_{02}^{s,l+1} h_{Ey}^2 = E_{00}^{s,l}, \begin{cases} s = \overline{1, S} \\ l = \overline{1, L-1} \end{cases}$$

Розв'язуючи системи (14-18), знаходимо вирази для коефіцієнтів $A_{20}^{mk}, A_{02}^{mk}, B_{20}^{pn}, B_{02}^{pn}, C_{20}^{sk}, C_{02}^{sk}, D_{20}^{ml}, D_{02}^{ml}, E_{20}^{sl}, E_{02}^{sl}$. Після цього знайдені коефіцієнти підставляємо в (12) та отримуємо систему $M \times K + P \times N + S \times K + M \times L + S \times L$ лінійних диференціальних рівнянь відносно коефіцієнтів $A_{00}^{mk}, B_{00}^{pn}, C_{00}^{sk}, D_{00}^{ml}, E_{00}^{sl}$, яку можна розв'язати різноманітними чисельними методами.

З врахуванням початкових умов (13) запишемо данну систему в такій матричній формі:

$$\dot{R}_{00} = \alpha R_{00} + \beta \psi + \gamma f, \quad (19)$$

де $\dot{R}_{00} = \left\{ \begin{matrix} \dot{A}_{00}^{m,k} & \dot{B}_{00}^{p,n} & \dot{C}_{00}^{s,k} & \dot{D}_{00}^{m,l} & \dot{E}_{00}^{s,l} \end{matrix} \right\}$, α, β, γ – відповідні матриці при стовпцях R_{00} , ψ і f .

Для поліпшення розв'язку числові коефіцієнти α знайдемо з умови того, що наближені розв'язки (11) при $t = 0$ із врахуванням початкових умов (3) задовольняли б рівняння (1).

$$\dot{A}_{00}^{m,k}(0) = \varphi_{xx}(x_m, y_k) + \varphi_{yy}(x_m, y_k) + f(x_m, y_k, 0), \quad m = \overline{1, M}; k = \overline{1, K}$$

$$\dot{B}_{00}^{p,k}(0) = \varphi_{xx}(x_p, y_k) + \varphi_{yy}(x_p, y_k) + f(x_p, y_k, 0), \quad p = \overline{1, P}; k = \overline{1, K}$$

$$\dot{C}_{00}^{s,k}(0) = \varphi_{xx}(x_s, y_k) + \varphi_{yy}(x_s, y_k) + f(x_s, y_k, 0), \quad s = \overline{1, S}; k = \overline{1, K}$$

$$\dot{D}_{00}^{m,l}(0) = \varphi_{xx}(x_m, y_l) + \varphi_{yy}(x_m, y_l) + f(x_m, y_l, 0), \quad m = \overline{1, M}; l = \overline{1, L}, \quad (20)$$

$$\dot{E}_{00}^{m,l}(0) = \varphi_{xx}(x_m, y_l) + \varphi_{yy}(x_m, y_l) + f(x_m, y_l, 0), \quad m = \overline{1, M}; l = \overline{1, L}$$

З урахуванням (19) і (20) отримаємо систему $M \times K + P \times N + S \times K + M \times L + S \times L$ незалежних алгебраїчних рівнянь відносно відповідних числових коефіцієнтів α . Підставивши їх у (19) знаходимо покращені розв'язки у відповідних вузлових точках розбиття інтервалів неоднорідного

На електронно-обчислювальній машині розв'язок системи рівнянь можна отримати за методом Рунге-Кутта. Зазначимо, що якщо $\alpha = 0$, то розв'язок аналогічний звичайному методу Ейлера, якщо $\alpha = 0,5$ – покращеному методу сіток, якщо $\alpha = 1$ – інтегральному методу [1].

З урахуванням різних значень α та отриманням відповідних розв'язків, можна робити висновки про їх достовірність, що особливо важливо у випадку осциляцій функцій. Практика свідчить, що з малим числом вузлів при $\alpha = 0$ розв'язок задачі отримуємо з великою похибкою.

Висновки

1. Запропонована методика дозволяє аналізувати та порівнювати розв'язки задачі з врахуванням значень коефіцієнта α і вибирати для дослідження структури, які є оптимальними з теплотехнічної точки зору для різноманітних технічних систем. Розглянутий чисельно-аналітичний розв'язок реалізується на ЕОМ, що полегшує інженерне дослідження конкретних задач з урахуванням різних матеріалів.
2. Алгоритм розв'язання задачі можна застосувати і для задач з врахуванням граничних умов другого та третього роду, що буде результатом наступних статей.

Список літератури

1. Риндюк В.И. Применение улучшенного интегрального метода прямых к решению задач теплопроводности с кусочно-постоянным коэффициентом // Ред. Инженерно-физический журнал. – Минск, 1989. – 9 с. ден. в ВИНТИ 30.02.89, №2069-В.
2. Еругин Н.П. Курс обыкновенных дифференциальных уравнений. – К.: Вища школа, 1974. – 471 с.
3. Дейнека В.С., Сергиенко Н.В., Скопецкий В.В: Модели и методы решения задач с условиями сопряжения. К.: Наукова думка, 1998. – 616 с.
4. Риндюк В.І. Прилипко Т.В. Методика теплотехнічного розрахунку багат шарового середовища // Вісник ВПІ. – 2003. – №3. – С. 35-38.
5. Булавацький В.М., Кривонос Ю.Г., Скопецкий В.В. Некласичні математичні моделі процесів тепло- та масопереносу. – К.: Наукова думка, 2005. – 283 с.

Риндюк Володимир Іванович – к.т.н., доцент кафедри теплогазопостачання і вентиляції Вінницького національного технічного університету.

Власенко Анатолій Миколайович – к.т.н., доцент кафедри теплогазопостачання і вентиляції Вінницького національного технічного університету.

Риндюк Світлана Володимирівна – студентка Вінницького національного технічного університету.