Критериальное моделирование в задачах управления

Светлана Бевз, Виктория Войтко, Сергей Бурбело, Инна Кручок

Аннотация – **В статье предложено использование средств критериального моделирования для решения задач оптимального управления динамическими системами и разработана методика определения матрицы критериев подобия закона управления. Разработан комплексный подход к снижению степени сложности задачи оптимального управления, представленной в виде задачи оптимизации нелинейного программирования при использовании матричного метода пересчета коэффициентов и уточнения математической модели. Формирование матрицы оптимальных критериев подобия осуществляется при помощи математических моделей транзитивной системы относительных единиц.**

Ключевые слова – **критериальное моделирование, критерии подобия, нелинейная оптимизация, оптимальное управление, теория подобия, система относительных единиц.**

I. Введение

В сложных динамических системах прослеживается тенденция перехода от задач естественного функционирования динамических систем к более сложным задачам оптимального управления [1], решение которых стало технически реальным благодаря возрастающим возможностям вычислительной и микропроцессорной техники, которой оснащаются системы управления.

Эффективность оптимального управления, как известно, зависит от точности и адекватности математических моделей. Процесс автоматизации оптимального управления динамическими системами в общем характеризуется многоплановыми подходами к формированию математического аппарата. Повысить эффективность функционирования систем оптимального управления представляется возможным путём использования системного подхода и единой методологической базы на всех этапах решения задачи оптимального управления, начиная с формирования математической модели и заканчивая анализом оптимального решения и его практической реализацией. Высокопродуктивным в этом плане является использование обобщённых методов теории подобия и моделирования [2], в частности критериального метода [3], который базируется на их основе и может быть использован на всех уровнях решения данной задачи. Такие модели дают возможность обобщить результаты оптимального управления и расширить их на ряд подобных явлений.

Бевз С.В., кандидат технических наук, зам. директора Института магистратуры, аспирантуры и докторантуры (ИнМАД) ВНТУ. Доцент кафедры электрических станций и систем (e-mail: svbevz@rambler.ru).

Войтко Виктория Владимировна – кандидат технических наук, доцент, декан факультета компьютерного интеллекта, доцент кафедры программного обеспечения.

Бурбело С.М., ведущий инженер ИнМАД ВНТУ, начальник бюро САСК ПАО "Винницаоблэнерго", аспирант кафедры моделирования и мониторинга сложных систем по специальности 05.13.06 - "Информационные технологии" (корреспондирующий автор, тел.: +380953693973; e-mail: sburbelo@rambler.ru).

Кручок Инна Викторовна – инженер ИнМАД ВНТУ. В 2010 году закончила магистратуру ВНТУ.

II. Формирование цели и постановка задачи

Объектом исследования в данной работе выступает процесс оптимального управления динамическими системами. Предметом – критериальное моделирование в задачах оптимального управления.

Цель исследований состоит в повышении эффективности оптимального управления путём разработки и использования средств теории подобия и критериального моделирования.

Для достижения поставленных целей в статье решаются следующие задачи:

1. Анализ возможностей использования теории подобия и критериального моделирования в задачах синтеза законов управления и оптимизации.
2. Разработка критериальных моделей оптимального управления динамических систем.
3. Разработка методов и программных средств функционирования критериальных моделей в оптимальном управлении.

Реализация поставленных задач позволит сформировать научно-системное понятие сущности критериального моделирования для задач оптимального управления. Разработка критериальных моделей при использовании обобщающих методов теории подобия и моделирования, безусловно, актуальна в оптимальном управлении динамическими системами.

В общем виде задача оптимального управления динамическим процессом состоит в определении управляющей функции, которая минимизирует функцию потерь, представленной в виде некоторого критерия качества при соответствующих ограничениях [4]. При этом управляющая функция системы должна формировать такое управляющее воздействие, при котором обеспечивается переход системы в её оптимальное состояние, сопровождающееся минимальными потерями ресурсов, энергии или времени.

Для такого типа задач необходимые условия экстремума были сформулированы Л. С. Понтрягиным в виде непрерывного и дискретного "принципа максимума" [5], который в общем виде состоит в приведении задачи оптимального управления к вычислению максимума функции Гамильтона [4].

Учитывая дальнейшую возможность практической реализации оптимального решения в системе автоматического управления в терминах теории подобия и критериального моделирования, закон оптимального управления может быть сформулирован в виде [3]:

$$U(t) = -\pi\, x(t),$$

где $U(t)$, $x(t)$ – соответственно вектора управляющих и управляемых параметров; π – матрица коэффициентов обратной связи, представленная в форме матрицы критериев подобия.

Критериальная обработка процесса оптимального управления обеспечивает возможность представления математических моделей процесса в критериальной форме записи в системах относительных единиц (СОЕ), что позволяет установить математическую связь между переменными задачи оптимального управления и критериями подобия, которые, в свою очередь, определяют вес соответствующих параметров математической модели в критерии оптимальности, а также обобщить результаты исследований и расширить их на класс подобных явлений. Кроме того, критериальная безразмерная форма записи закона управления (1) даёт возможность проанализировать полученный результат на чувствительность и соразмерность, используя при этом математический аппарат критериального анализа [6, 7], а также позволяет спрогнозировать динамику технологического процесса, используя средства критериального прогнозирования [8] и нечёткой логики [9].

Таким образом, использование обобщённых методов теории подобия и моделирования, в частности – критериального метода, в оптимальном управлении динамическими системами является достаточно эффективным.

III. Разработка математического аппарата исследуемой задачи

На этапах формирования математической модели, проведения расчетов и практической реализации полученного решения – закона оптимального управления раскрывается фундаментальная особенность задач оптимального управления: необходимость использования СОЕ. Критериальный метод предоставляет возможность использования различных СОЕ в теории управления: эвристическую, деривативную, транзитивную, критериальную, диференциальную, семиотическую и сигномиальную, что существенно расширяет возможности критериального метода и область практической реализации оптимального решения [3, 10].

Использование критериальных моделей в оптимальном управлении позволяет отслеживать аналитические связи между параметрами процесса управления и параметрами элементов системы, в которой этот процесс протекает. При этом исследуются не только отдельные характеристики и свойства системы, но и синтез её вариантов.

В этом случае задача оптимального управления сводится к решению задачи нелинейной оптимизации вида:

$$y = \sum_{i=1}^{m_1} A_i \prod_{j=1}^{n} x_j^{\alpha_{ji}} \to \min\,; \qquad (1)$$

$$g_k = \sum_{i=m_k+1}^{m_{k+1}} A_i \prod_{j=1}^{n} x_j^{\alpha_{ji}} \le 1\,;$$

$$k = \overline{1,\, p}\,; \quad x_j > 0\,,$$

где $y(x)$ – обобщённый технико-экономический показатель; x_j – переменные параметры системы; n – количество переменных; m – общее количество слагаемых математической модели; p – количество ограничений; A_i, α_{ij} – постоянные коэффициенты, определяющиеся свойствами системы.

При переходе к переменным двойственной задачи критериального моделирования [3] с использованием транзитивной СОЕ получим систему уравнений для слагаемых целевой функции и ограничений (2):

$$\prod_{j=1}^{n} x_j^{\alpha_{ji}} = \frac{\pi_i \cdot y_{\min}}{A_i}\,,\ i = \overline{1,\, m_1}\,;$$

$$\prod_{j=1}^{n} x_j^{\alpha_{ji}} = \frac{\pi_i}{A_i \sum_{r=m_k+1}^{m_{k+1}} \pi_r}\,, \quad .$$

$$i = \overline{m_k+1,\, m_{k+1}}\,,\ k = \overline{1,\, p}$$

В общем случае исследуемая задача оптимального управления сложными динамическими системами имеет высокую степень сложности, что определяет пути её решения. В критериальном моделировании задачи такого типа решаются с использованием итерационных методов последовательного поиска экстремума в различных СОЕ [3], что соответственно приводит к накоплению вычислительной погрешности. В данной статье предложен подход приведения задачи высокой степени сложности к каноническому виду в транзитивной СОЕ и решение её средствами критериального моделирования.

Степень сложности задачи критериального моделирования зависит от количества слагаемых целевой функции и количества переменных, то есть $s = m - n - 1$, что оказывает влияние на формирование векторов зависимых и независимых двойственных переменных задачи критериального моделирования.

После логарифмирования система уравнений (3) в матричной форме запишется:

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{n1} & -1 & \gamma_{11} & \dots & \gamma_{1s} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{1m_1} & \dots & \alpha_{nm_1} & -1 & \gamma_{m_1 1} & \dots & \gamma_{m_1 s} \\ \alpha_{1m_1+1} & \dots & \alpha_{n(m_1+1)} & 0 & \gamma_{(m_1+1)1} & \dots & \gamma_{(m_1+1)s} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{1m} & \dots & \alpha_{nm} & 0 & \gamma_{m1} & \dots & \gamma_{ms} \end{vmatrix} \times,$$

$$\cdot\begin{vmatrix} \ln(x_1)\\ \dots\\ \ln(x_n)\\ \ln(y_{\min})\\ \ln(\pi_1)\\ \dots\\ \ln(\pi_s)\end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \ln(\pi'_1/A_1)\\ \dots \\ \ln(\pi'_{m_1}/A_{m_1})\\ \ln\left(\pi'_{m_1+1}\Big/ A_{m_1+1}\cdot \sum\limits_{r=m_1+1}^{m_2}(\pi_r)\right)\\ \dots\\ \ln\left(\pi'_m\Big/A_m\cdot\sum\limits_{r=m_p+1}^{m}(\pi_r)\right)\end{vmatrix}$$

где $\begin{cases}\gamma_{ij}=-1,\ i=j;\\ \gamma_{ij}=0,\ i\neq j;\end{cases}$ $\begin{cases}\pi'_i=1,\, i\le s;\\ \pi'_i=\pi_i,\, i>s.\end{cases}$

Разделение критериев подобия на зависимые $\pi_1\dots\pi_s$ и независимые $\pi_{s+1}\dots\pi_m$ используется в случае положительной степени сложности $s>0$ задачи.

Взаимосвязь параметров прямой и двойственных задач критериального моделирования устанавливается с использованием обратной матрицы коэффициентов системы (4). При условии положительной степени сложности задачи используется метод дополнения элементов обратной матрицы целевой функции $d(B)$ и уточнения предложенной модели:

$$B=\begin{vmatrix}\beta_{11} & \dots & \beta_{1m}\\ \dots & \dots & \dots\\ \beta_{n1} & \dots & \beta_{nm}\\ \beta_{p_01} & \dots & \beta_{p_0m}\\ \beta_{p_11} & \dots & \beta_{p_1m}\\ \dots & \dots & \dots\\ \beta_{p_s1} & \dots & \beta_{p_sm}\end{vmatrix} \xrightarrow{d(B)} B'=\begin{vmatrix}\beta_{11} & \dots & \beta_{1m}\\ \dots & \dots & \dots\\ \beta_{n1} & \dots & \beta_{nm}\\ \beta'_{p_01} & \dots & \beta'_{p_0m}\\ \beta_{p_11} & \dots & \beta_{p_1m}\\ \dots & \dots & \dots\\ \beta_{p_s1} & \dots & \beta_{p_sm}\end{vmatrix}.$$

Метод перехода $d(B)$ заключается в определении коэффициентов $c_i,\ i=\overline{1,s}$, удовлетворяющих условия:

$$\prod_{j=1}^{m}\left(\frac{-\beta_{p_0j}-c_i\cdot\beta_{p_ij}}{A_j}\right)^{\beta_{p_ij}}=1,\quad i=\overline{1,s},$$

и определении значений критериев подобия, соотносящихся с минимальным значением целевой функции

$$y_{\min}:\ \beta'_{p_0j}=-\beta_{p_0j}-\sum_{i=1}^{s}c_i\cdot\beta_{p_ij},\ j=\overline{1,m}.$$

Значение минимума целевой функции и соответствующие значения аргументов определяются из следующего:

$$y_{\min}=\prod_{j=1}^{m}\left(\frac{\beta'_{p_0j}}{A_j}\right)^{\beta'_{p_0j}}\cdot\prod_{k=1}^{p}\left(\sum_{r=m_k+1}^{m_{k+1}}(\beta'_{p_0r})\right)^{\sum\limits_{r=m_k+1}^{m_{k+1}}(\beta'_{p_0r})},$$

$$x_i=\prod_{j=1}^{m}\left(\frac{\beta'_{p_0j}}{A_j}\right)^{\beta_{ij}}\cdot\prod_{k=1}^{p}\left(\sum_{r=m_k+1}^{m_{k+1}}(\beta'_{p_0r})\right)^{\sum\limits_{r=m_k+1}^{m_{k+1}}(\beta'_{ir})},\quad i=\overline{1,n}$$

.

Снижения степени сложности достигается благодаря введению дополнительных коэффициентов $c_i,\ \ i=\overline{1,s}$ в строку $\begin{vmatrix}\beta_{p_01} & \dots & \beta_{p_0m}\end{vmatrix}$ матрицы B. Вектор оптимальных критериев подобия определяется выражением: (4)

$$\pi=-\begin{vmatrix}\beta'_{p_01} & \dots & \beta'_{p_0m}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-\beta'_{p_01} & \dots & -\beta'_{p_0m}\end{vmatrix}.$$

Преобразованная целевая функция математической модели нулевой степени сложности определяется из обратной матрицы: $A'=(B')^{-1}$. При этом коэффициенты γ_{ij} матрицы A' будут такими:

$$\begin{cases}\gamma_{ij}=\gamma_{ij}+c_i,\ j\le n+1;\\ \gamma_{ij}=0,\ j>n.\end{cases}$$

Таким образом, сформированная каноническая задача оптимального управления имеет вид:

$$y=\sum_{i=1}^{m_1}A_i\prod_{j=1}^{n}x_j^{\alpha_{ji}}\prod_{q=1}^{s}x_{n+q}^{\gamma_{qi}+c_q}\to\min;$$

$$g_k=\sum_{i=m_k+1}^{m_{k+1}}A_i\prod_{j=1}^{n}x_j^{\alpha_{ji}},\ k=\overline{1,p};\quad x_j>0;\quad x_{n+q}>0.$$

При этом количество переменных параметров модели на единицу меньше общего количества её слагаемых. Решение задач канонического вида в критериальном моделировании, как и задач высокой степени сложности, реализовано в программном комплексе "Поиск и анализ оптимальных решений", который интегрирует методы соответствующих СОЕ в оптимальном управлении.

IV. Выводы и перспективы дальнейшего использования результатов исследования

Таким образом, в статье рассмотрена возможность повышения эффективности оптимального управления путём его реализации в теории подобия и критериального моделирования. С этой целью в работе получены следующие результаты:

1. Разработана методика определения матрицы критериев подобия закона оптимального управления. При этом следует отметить некоторые преимущества использования критериального моделирования: возможность использования единой методологической базы и системного подхода к решению задачи; применение математических моделей различных СОЕ, благодаря которым устанавливаются непосредственные связи между переменными прямой и двойственной задачи критериального программирования; возможность решения задачи высокой степени сложности без применения итерационных методов последовательного поиска экстремума.
2. Для решения задач оптимального управления сложными динамическими системами разработан комплексный подход приведения задач высокой меры сложности к каноническому виду с использованием средств транзитивной СОЕ критериального моделирования путём логарифмирования. На основании

предложенных критериальных моделей транзитивной СОЕ разработан метод решения задачи нелинейного программирования высокой степени сложности путём пересчёта коэффициентов и уточнения математической модели матричным способом.

3. Разработано программное обеспечение поиска и анализа оптимальных решений, реализующее предложенные модели и методы критериального моделирования в оптимальном управлении.

Дальнейшие исследования данной проблематики будут направлены в область функции комплексной переменной для расширения области решений задач оптимального управления динамическими системами. Поскольку при поиске возможных решений экстремальных задач модели транзитивной СОЕ ограничиваются положительной областью определения параметров функции в связи с использованием операцией логарифмирования, будут проведены исследования по расширению практической области использования транзитивной СОЕ в классе задач полиномиального вида с отрицательными критериями подобия или отсутствующим в явном виде конкурирующим эффектом функции оптимального управления.

Литература

[1] Параев Ю.И. Теория оптимального управления. – Томск.: Изд-во ун-та им. В.В.Куйбышева, 1986. – 164 с.

[2] Веников В.А. Теория подобия и моделирования. – М.: Высшая школа, 1976. – 480 с.

[3] Лежнюк П.Д., Бевз С.В. Методи оптимізації в електроенергетиці. Критеріальний метод. Вінниця: ВДТУ, 1999. – 177 с.

[4] Основы теории оптимального управления / Под ред. Кротова. – М.: Высшая школа, 1990. – 429 с.

[5] Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкреладзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. – М.: Наука, 1983. – 392 с.

[6] Лежнюк П.Д. Аналіз чутливості оптимальних рішень в складних системах критеріальним методом. Монографія. – Вінниця: Універсум-Вінниця, 2003. - 131 с.

[7] Пєтух А.М., Войтко В.В., Бевз С.В. Особливості визначення межових змін параметрів системи та інтерпретація складових моделі чутливості як вагових коефіцієнтів // Вимірювальна та обчислювальна техніка в технологічних процесах. Вип. 8. — 2001. — № 2. – С. 402–408.

[8] Бевз С.В., Бурбело С.М. Критеріальне моделювання в задачах прогнозування // Наукові вісті Національного технічного університету України “Київський політехнічний інститут”. — 1998. — № 3. — С. 39–42.

[9] P. Lezhniuk, S. Bevz, A. Piskliarova Evaluation and Forecast of Electric Energy Losses in Distribution Networks Applying Fuzzy-Logic // Conversion and Delivery of Electrical Energy in the 21st century. IEEE Power & Energy Society 2008 General Meeting. – 20–24 July, 2008 – Pittsburgh, Pennsylvania USA. – ISBN: 978-1-4244-1906-7

[10] Бевз С.В. Системи відносних одиниць у критеріальному моделюванні // Придніпровський вісник. – 1999. – № 2. – С. 91–102.

Бевз Светлана Владимировна – кандидат технических наук, доцент, заместитель директора Института магистратуры, аспирантуры и докторантуры (ИнМАД) по магистратуре Винницкого национального технического университета (ВНТУ), доцент кафедры электрических станций и систем. В 1999 году защитила диссертацию на соискание степени кандидата технических наук. Автор 120 научных публикаций. Сфера научных интересов: математическое и критериальное моделирование в управлении; автоматизация оптимального управления нормальными режимами электроэнергетических систем; матричный анализ надёжности сложных систем; информационно-коммуникационные технологии в технических системах и управлении образованием.

Войтко Виктория Владимировна – кандидат технических наук, доцент, декан факультета компьютерного интеллекта, доцент кафедры программного обеспечения. В 1999 году защитила диссертацию на соискание степени кандидата технических наук. Автор 140 научных публикаций. Сфера научных интересов: математическое моделирование; автоматизация оптимального управления в технических системах; информационные технологии; проектирование и разработка программного обеспечения; организация учебного процесса и управление им.

Бурбело Сергей Михайлович – ведущий инженер ИнМАД ВНТУ, начальник бюро службы автоматизированных систем управления ПАО "Винницаоблэнерго", аспирант кафедры моделирования и мониторинга сложных систем по специальности 05.13.06 – "Информационные технологии". В 1997 году закончил магистратуру ВГТУ. Автор 45 научных публикаций. Руководил разработкой и внедрением более 10 научных проектов. Сфера научных интересов: математическое моделирование, информационные технологии мониторинга параметров технических систем, разработка программного обеспечения, автоматизация систем управления в энергетике.

Кручок Инна Викторовна – инженер ИнМАД ВНТУ. В 2010 году закончила магистратуру ВНТУ.