УДК 681.325.5

О. І. Черняк
Вінницький державний технічний університет
Хмельницьке шосе, 95, 21021 Вінниця, Україна

Системи числення для конвеєрної порозрядної обробки послідовних кодів

Описано новий клас систем числення, що мають обмежену довжину перенесення в сторону старших розрядів. Використання таких систем числення при конвеєрній обробці множинних потоків числової інформації дозволяє значно зменшити кількість інформаційних зв'язків між модулями обробки даних.

Ключові слова: *порозрядна конвеєрна обробка, послідовний код, системи числення, арифметичні операції, перенесення в арифметичних операціях.*

Для організації конвеєрної обробки множинних потоків послідовних кодів використовуються позиційні надлишкові системи числення, що дозволяє виконувати всі операції обробки кодів чисел порозрядно, починаючи зі старших розрядів. Відомо ряд таких систем числення [1-5]. Основною перевагою цих систем числення є обмеженість довжини перенесення при виконанні арифметичних операцій, що визначає апаратні витрати при організації конвеєрної порозрядної обробки. Теоретично може існувати велика кількість таких систем числення, але не у всіх можливе обмеження довжини перенесення при виконанні арифметичних операцій.

Запропоновано клас надлишкових систем числення з адитивними та мультиплікативними співвідношеннями між вагами розрядів, що узагальнює відомі незнакорозрядні системи числення для порозрядної конвеєрної обробки та дозволяє створювати нові системи числення з можливістю порозрядного виконання операцій, починаючи зі старших розрядів.

Системи числення з адитивними та мультиплікативними співвідношеннями між вагами розрядів (*АМ*-системи числення) — це позиційні надлишкові зважені системи числення, у яких вага кожного розряду являє собою ступінь основи системи числення, а між вагами розрядів існує постійне адитивне співвідношення певного виду.

Будь-яка *АМ*-система числення може бути описана такою сукупністю параметрів

$$\begin{Bmatrix} C_k = \{0,1,\dots,c_{k-1}\}; \\ w; \\ {}^{t}A^{\tau,p} : w^{\tau p+t} = R^{\tau,p} \end{Bmatrix}, \tag{1}$$

де $k \geq 2$ — значність системи числення; C_k — множина цифр; w — основа системи числення; ${}^{t}A^{\tau,p}$ — адитивне співвідношення порядку (t, τ, p); t, τ, p — параметри адитивного співвідношення ($t > 0$, $\tau > 0$, $p \geq 0$ — цілі); $R^{\tau,p} = \sum_{i=0}^{p} r_i \cdot w^{\tau i}$ — граничне значення ($r \in C_k$).

На параметри *АМ*-системи числення при цьому накладаються обмеження:

$$\begin{aligned} &1 \leq w < c_{k-1} + 1; \\ &r_i \geq r_{i-1} > 0. \end{aligned} \tag{2}$$

Для представлення адитивного співвідношення i-го розряду використовується вираз (1) із параметром i:

$${}^{t}A_i^{\tau,p} : w^{i+t} = R_{i-\tau p}^{\tau,p}. \tag{3}$$

Вважається що

$$R_{i-\tau p}^{\tau,p} = w^{i-\tau p} \cdot R^{\tau,p}.$$

Між адитивним співвідношенням, основою системи числення й множиною цифр існує такий зв'язок: основа системи числення є додатним дійсним коренем адитивного співвідношення, в якому коефіцієнти при невідомому є цифрами. Виходячи з цього, *АМ*-система числення може бути однозначно заданою будь-якою парою з пар параметрів $\{C_k, {}^{t}A^{\tau,p}\}$ або $\{C_k, w\}$ згідно (1). Враховуючи необхідність дотримання обмежень, що накладаються на адитивне співвідношення в (2), найбільш просто задавати *АМ*-систему числення з допомогою параметрів $\{C_k, {}^{t}A^{\tau,p}\}$.

При такому представленні *АМ*-систем числення може виникнути необхідність визначення основи системи числення за заданим адитивним співвідношенням. Діапазон, в якому знаходиться значення основи системи числення визначається твердженням 1.

Твердження 1. Для *АМ*-системи числення, що задана адитивним співвідношенням (3)

$${}^{t}A^{\tau,p} : w^{t+p} = R^{\tau,p}$$

з параметрами, описаними в (1) і (2), значення основи системи числення знаходиться в межах

$$\sqrt[t]{r_p} \le w \le \sqrt[t]{c_{k-1}+1}\,.$$

Доведення твердження 1.

Доведення буде проведено методом підстановки границь і тотожних перетворень.

Перенесемо $R^{\tau,p}$ в ліву частину:

$$w^{tp+t} - R_0^{\tau,p} = 0\,.$$

Виділимо r_p і виконаємо перетворення :

$$w^{tp+t} - r_p \cdot w^{tp} - R^{\tau,p-1} =$$

$$(w^t - r_p)\cdot w^{tp} - \sum_{i=0}^{p-1} r_i \cdot w^{ti} = 0. \tag{4}$$

Підставимо нижню границю замість w^t:

$$w = \sqrt[t]{r_p}\,.$$

Тоді ліва частина виразу (4) буде мати від'ємне значення

$$-\sum_{i=0}^{p-1} r_i \cdot w^{ti} \le 0\,.$$

Виходячи з цього, при

$$w \le \sqrt[t]{r_p}$$

виконується

$$w^{tp+t} - R^{\tau,p} \le 0\,.$$

Підставимо у вираз (4) верхню границю замість w^t:

$$w^t = c_{k-1} + 1\,.$$

Тоді w^{tp} буде мати значення

$$w^{tp} = w^{t(p-1)}(c_{k-1}+1) =$$

$$
\begin{aligned}
&= w^{t(p-1)}c_{k-1} + w^{t(p-1)} = \\
&= w^{t(p-1)}c_{k-1} + w^{t(p-2)}(c_{k-1} + 1) = \\
&= w^{t(p-1)}c_{k-1} + w^{t(p-2)}c_{k-1} + w^{t(p-2)} = \\
&= w^{t(p-1)}c_{k-1} + w^{t(p-2)}c_{k-1} + \cdots + wc_{k-1} + \\
&+ c_{k-1} + 1 = 1 + c_{k-1}\sum_{i=0}^{p-1} w^{ti}.
\end{aligned}
$$

Виходячи з цього, ліва частина виразу (4) буде мати вигляд:

$$
\begin{aligned}
&(c_{k-1} + 1 - r_p)w^{tp} - \sum_{i=0}^{p-1} r_i w^{ti} = \\
&= (c_{k-1} - r_p)w^{tp} + 1 + \sum_{i=0}^{p-1} c_{k-1}w^{ti} - \sum_{i=0}^{p-1} r_i w^{ti} = \\
&= (c_{k-1} - r_p)w^{tp} + 1 + \sum_{i=0}^{p-1} (c_{k-1} - r_i)w^{ti} > 0,
\end{aligned}
$$

так як $r_i \le c_{k-1}$. Тому значення лівої частини виразу (4) додатне при

$$
w \ge \sqrt[tp]{c_{k-1} + 1}\,.
$$

Таким чином при зміні w від $\sqrt[tp]{r_p}$ до $\sqrt[tp]{c_{k-1} + 1}$ значення лівої частини виразу (4) змінює свій знак. Це означає, що дійсний корінь рівняння (4) знаходиться між указаними значеннями w. Твердження (1) доведено.

Як і в кожній зваженій позиційній системі числення, в *АМ*-системі числення будь-якому дійсному числу X з точністю до w можна поставити у відповідність поліном виду

$$
X = \sum_{i=0}^{n-1} x_i \cdot w^i \,.
$$

де: $x_i \in C_k$ — i-та цифра; w — основа *АМ*-системи числення; n — кількість членів поліному, що визначається за формулою $n \ge \log_w X + 1$.

Наявність адитивних співвідношень між розрядами в *АМ*-системах числення дозволяє ввести операції адитивного перетворення кодів чисел (*А*-перетворення), що полягають в зміні коду числа при збереженні його числового еквівалента. *А*-перетворення є особливим типом умовних числових операцій, що виконуються над частиною коду числа або над усім кодом. Будь-яке *А*-перетворення виконується відносно поточного i-го розряду, що ділить весь код числа на дві частини: старші розряди (від (i + 1)-го до n-го) і молодші розряди (від 0-го до i-го). Таке перетворення в подальшому буде називатись i-им. I-те A-перетворення збільшує або зменшує старші розряди на w^{i+t} і, відповідно, зменшує або збільшує молодші розряди на $R_{i-\tau p}^{\tau,p}$.

За напрямком перенесення адитивні (A) перетворення поділяються на перетворення з перенесенням вліво (AL) і перетворення з перенесенням вправо (AR) в залежності від того, над якою частиною коду виконується додавання при виконанні i-го A-перетворення. При i-му AL-перетворенні відбувається додавання w^{i+t} до старших розрядів і віднімання $R_{i-\tau p}^{\tau,p}$ від молодших, а при i-му AR-перетворенні — віднімання w^{i+t} від старших розрядів і додавання $R_{i-\tau p}^{\tau,p}$ до молодших.

${}^{t}AL^{\tau,p}$ -перетворення слідує з виразу (3) і основане на еквівалентній заміні частини коду

$$w^{\tau p+t} \leftarrow R^{\tau,p}.$$

Для i-го розряду коду числа X існує поняття i-го AL-перетворення, що полягає в зміні частин коду при незмінному значенні всього коду.

$${}^{t}AL_{i}^{\tau,p} : X + w^{i+t} - R_{i-\tau p}^{\tau,p}.$$

${}^{t}AR^{\tau,p}$ -перетворення слідує з виразу (3) і основане на еквівалентній заміні частини коду

$$w^{\tau p+t} \rightarrow R^{\tau,p}.$$

Для i-го розряду коду числа X існує поняття i-го AR-перетворення, що полягає в зміні частин коду при незмінному значенні всього коду

$${}^{t}AR_{i}^{\tau,p} : X - w^{i+t} + R_{i-\tau p}^{\tau,p}.$$

За типом умов виконання AL- і AR-перетворення поділяються на елементарні (E), універсальні (U) та повні (F).

Елементарне i-те AL-перетворення порядку (t, τ, p) (${}^{t}EAL_{i}^{\tau,p}$) коду X полягає в одночасному зменшенні розрядів коду від (i – τp)-го до i-го через кожних τ розрядів відповідно на величини від r_0 до r_p і збільшенні (i + t)-го розряду на одиницю за умов виконання $x_{i+t} < c_{k-1}$ і $\underset{0 \le j \le p}{\forall} (x_{i-\tau(p-j)} \ge r_j)$.

$$
{}^{t}EAL_i^{\tau,p}(X)=\begin{cases} X \text{ при } (x_{i+t}=c_{k-1}) \text{ або } \underset{0\le j\le p}{\exists}(x_{i-\tau(p-j)}<r_j); \\ X+w^{i+t}-R_{i-\tau p}^{\tau,p} \text{ при} \\ (x_{i+t}<c_{k-1}) \text{ і } \underset{0\le j\le p}{\forall}(x_{i-\tau(p-j)}\ge r_j). \end{cases} \tag{8}
$$

Елементарне i-те AR-перетворення порядку $(t,\ \tau,\ p)$ (${}^{t}EAR^{\tau,p}$) коду X полягає в одночасному збільшенні розрядів коду від $(i-\tau p)$-го до i-го через кожних τ розрядів відповідно на величини від r_0 до r_p і зменшенні $(i+t)$-го розряду на одиницю за умов виконання $x_{i+t}>0$ і $\underset{0\le j\le p}{\forall}(x_{i-\tau(p-j)}+r_j\le c_{k-1})x_{i+t}>0$:

$$
{}^{t}EAR_i^{\tau,p}(X)=\begin{cases} X \text{ при } (x_{i+t}=0) \text{ або } \underset{0\le j\le p}{\exists}(x_{i-\tau(p-j)}+r_j>c_{k-1}); \\ X-w^{i+t}+R_{i-\tau p}^{\tau,p} \text{ при} \\ (x_{i+t}>0) \text{ і } \underset{0\le j\le p}{\forall}(x_{i-\tau(p-j)}+r_j\le c_{k-1}). \end{cases} \tag{9}
$$

Універсальне i-те ${}^{t}AL^{\tau,p}$ перетворення порядку $(t,\ \tau,\ p)$ частини коду X від $(i-\tau b)$-го до $(i+t)$-го розрядів (${}^{t}UAL_i^{\tau,p}(X_{i-\tau b}^{\tau b})$) полягає в одночасному зменшенні розрядів коду від $(i-\tau b)$-го до i-го на величину $R^{\tau,p}\cdot w^{i-\tau p}$ і збільшенні $(i+t)$-го розряду на одиницю за умов виконання $x_{i+t}<c_{k-1}$ і $X_{i-\tau b}^{\tau b}\ge R_{i-\tau p}^{\tau,p}$:

$$
{}^{t}UAL_i^{\tau,p}(X_{i-\tau b}^{\tau b})=\begin{cases} X_{i-\tau b}^{\tau b} \text{ при } (x_{i+t}=c_{k-1}) \text{ або } X_{i-\tau b}^{\tau b}<R_{i-\tau p}^{\tau,p}; \\ X_{i-\tau b}^{\tau b}+w^{i+t}-R_{i-\tau p}^{\tau,p} \text{ при} \\ (x_{i+t}<c_{k-1}) \text{ і } X_{i-\tau b}^{\tau b}\ge R_{i-\tau p}^{\tau,p}. \end{cases} \tag{10}
$$

Універсальне i-те ${}^{t}AR^{\tau,p}$-перетворення порядку $(t,\ \tau,\ p)$ частини коду X від $(i-\tau b)$-го до $(i+t)$-го розрядів (${}^{t}UAR_i^{\tau,p}(X_{i-\tau b}^{\tau b})$) полягає в одночасному збільшенні розрядів коду від $(i-\tau b)$-го до i-го через кожних τ розрядів відповідно на величину $R^{\tau,p}\cdot w^{i-\tau p}$ і зменшенні $(i+t)$-го розряду на одиницю за умов виконання $x_{i+t}>0$ і $X_{i-\tau b}^{\tau b}+R_{i-\tau p}^{\tau,p}\le c_{k-1}\sum_{j=i-\tau b}^{i} w^j$:

$$
{}^{t}UAR_i^{\tau,p}(X_{i-\tau b}^{\tau b})=\begin{cases} X_{i-\tau b}^{\tau b} \text{ при} \\ (x_{i+t}=0) \text{ або } X_{i-\tau b}^{\tau b}+R_{i-\tau p}^{\tau,p}>c_{k-1}\sum_{j=i-\tau b}^{i} w^j; \\ X_{i-\tau b}^{\tau b}-w^{i+t}+R_{i-\tau p}^{\tau,p} \text{ при} \\ (x_{i+t}>0) \text{ і } (X_{i-\tau b}^{\tau b}+R_{i-\tau p}^{\tau,p}\le c_{k-1}\sum_{j=i-\tau b}^{i} w^j. \end{cases} \tag{11}
$$

При універсальних A-перетвореннях перевіряється сумарне значення розрядів перетворюваного коду. Така перевірка здійснюється за допомогою порозрядного, починаючи від i-го розряду, порівняння перетворюваної частини коду $X^{\tau,b}_{i-\tau b}$ і граничного значення $R^{\tau,p}_{i-\tau p}$. Це порівняння подібне до порівняння при елементарному A-перетворенні.

Перевірка умов і виконання UA-перетворень у загальному випадку може виявитись досить складною операцією. Тому простіше виконувати ці перетворення, як послідовність елементарних перетворень за певними правилами.

Слід відзначити, що виконання універсального перетворення одного типу (UAL або UAR) може вимагати елементарних перетворень обох типів (як EAL, так і EAR).

Алгоритм виконання ${}'UAL^{\tau,p}_i(X^{\tau b}_{i-\tau b})$-перетворення на основі елементарних AL- і AR-перетворень може мати такий вигляд.

п. 1. Початок.
п. 2. Якщо $x_{i+\tau} = c_{k-1}$, то перейти до п. 15.
п. 3. Поточному номеру j присвоїти значення 0.
п. 4. Якщо $j > b$, то перейти до п. 15.
п. 5. Номеру k розряду, що перевіряється, присвоїти значення 0.
п. 6. Якщо $k \le p$, то перейти до п. 8.
п. 7. Виконати ${}'EAL^{\tau,p}_{i-\tau j}$-перетворення і перейти до п. 3.
п. 8. Якщо $x_{i-\tau(j+k)} < r_{p-b}$, то перейти до п. 10.
п. 9. Значення k збільшити на τ. Перейти до п. 6.
п. 10. Якщо $k > 0$, то перейти до п. 12.
п. 11. Значення j збільшити на τ. Перейти до п. 4.
п. 12. Якщо $x_{i-\tau(j+k)} \le r_{p-k}$, то перейти до п. 14.
п. 13. Виконати ${}'EAR^{\tau,p}_{i-\tau(j+k)}$ -перетворення і перейти до п. 3.
п. 14. Значення k зменшити на Δ. Перейти до п. 10.
п. 15. Кінець.

Алгоритм виконання ${}'UAR^{\tau,p}_i(X^{\tau p}_{i-\tau p})$-перетворення на основі елементарних AR- і AL-перетворень може мати такий вигляд:

п. 1. Початок.
п. 2. Якщо $x_{i+\tau} = 0$, то перейти до п. 15.
п. 3. Поточному номеру j присвоїти значення 0.
п. 4. Якщо $j > b$, то перейти до п. 15.
п. 5. Номеру k розряду, що перевіряється, присвоїти значення 0.
п. 6. Якщо $k \le p$, то перейти до п. 8.
п. 7. Виконати ${}'EAR^{\tau,p}_{i-\tau j}$-перетворення і перейти до п. 3.
п. 8. Якщо $x_{i-\tau(j+k)} \ge c_{k-1} - r_{p-k}$, то перейти до п. 10.
п. 9. Значення k збільшити на τ. Перейти до п. 6.
п. 10. Якщо $k > 0$, то перейти до п. 12.
п. 11. Значення j збільшити на τ. Перейти до п. 4.

п. 12. Якщо $x_{i-\tau(j+k)} < c_{k-1} - r_{p-k}$, то перейти до п. 14.

п. 13. Виконати ${}^{t}EAL^{\tau,p}_{i-\tau(j+k)}$-перетворення і перейти до п. 3.

п. 14. Значення k зменшити на Δ. Перейти до п. 10.

п. 15. Кінець.

В обох алгоритмах використовується величина кроку Δ, що визначається за допомогою виразу

$$\Delta = \begin{cases} t \text{ при } \tau_{\bmod t} = 0, \\ \tau \text{ при } \tau_{\bmod t} \neq 0. \end{cases}$$

Як видно з даних алгоритмів, для виконання універсальних перетворень на основі елементарних перевіряється можливість виконання елементарних A-перетворень, починаючи зі старших розрядів. Це виключає розповсюдження перенесення в сторону старших розрядів. Одразу ж після виконання будь-якого елементарного A-перетворення знову відбувається перевірка, починаючи зі старших розрядів і так далі.

Повне i-те AL-перетворення порядку (τ, p) частини коду X від $(i - \tau b)$-го до $(i - \tau)$-го розрядів $({}^{t}FAR^{\tau,p}_{i}(X^{\tau b}_{i-\tau b}))$ полягає у виконанні всіх можливих UAL-перетворень у діапазоні номерів від $(i - \tau b)$-го до i-го. Алгоритм FAL-перетворення на основі UAL-перетворень випливає з визначення UAL-перетворення і являє собою послідовне, починаючи зі старших розрядів, виконання UAL-перетворення спочатку над розрядами з $(i - \tau b)$-го до i-го, потім із $(i - \tau b)$-го до $(i - 1)$-го, і так далі до останнього UAL-перетворення над i-им розрядом.

Повне i-те AR-перетворення порядку (τ, p) частини коду X від $(i - \tau b)$-го до $(i - \tau)$-го розрядів ${}^{t}FAR^{\tau,p}_{i}(X^{\tau b}_{i-\tau b})$ полягає у виконанні всіх можливих UAR-перетворень у діапазоні номерів від $(i - \tau b)$-го до i-го. Алгоритм FAR-перетворення на основі UAR-перетворень випливає з визначення UAR-перетворення і являє собою послідовне, починаючи зі старших розрядів, виконання UAR-перетворення спочатку над розрядами з $(i - \tau b)$-го до i-го, потім з $(i - \tau b)$-го до $(i - 1)$-го, і так далі до останнього UAR-перетворення над i-им розрядом.

Результатом повного A-перетворення є код, в якого для жодного з розрядів від $(i - \tau b)$-го до i-го не виконується умова універсального A-перетворення того самого типу.

Повні UAL- і UAR-перетворення є узагальненням відомих операцій перенесення і заєму при виконанні арифметичних операцій додавання й віднімання. Але на відміну від перенесення і заєму універсальні адитивні перетворення в AM-системах числення можуть виконуватись не тільки тоді, коли значення розряду стає більшим максимальної цифри або меншим нуля, але й тоді, коли деяка група розрядів досягає граничного значення, вираженого певним кодом.

FAL-перетворення в AM-системах числення використовуються для порозрядного додавання кодів. Віднімання в цих системах числення здійснюється на основі FAR-перетворення та віднімання в кожному окремому розряді або, як додавання обернених кодів.

Висновки

1. Системи числення з адитивними та мультиплікативними співвідношеннями між вагами розрядів за рахунок обмеженої довжини перенесення дозволяють виконувати арифметичні операції порозрядно, починаючи зі старших розрядів.

2. Операції адитивного перетворення являють собою умовні арифметичні операції еквівалентної зміни коду, що збільшують одну частину коду та зменшують іншу на одну і ту ж величину. Ці операції є узагальненням перенесення при виконанні додавання та віднімання.

1. *Avizenis A.* Binary-compatible signet-digit arithmetic // AFIPS Conf. Proc. — Vol. 26. — Part 1. — 1964. — P. 663.

2. *Рабинович З.Л., Раманаускас В.А.* Типовые операции в вычислительных машинах. — К.: Техніка, 1980. — 264 с.

3. *Самофалов К.Г., Луцкий Г.М.* Основы построения конвейерных ЭВМ. — К.: Вища школа, 1981. — 234 с.

4. *Каляев А.В.* Многопроцессорные системы с программируемой архитектурой. — М.: Радио и связь, 1984. — 240 с.

5. Методи конвеєрної порозрядної обробки послідовних кодів золотої пропорції / *О.І. Черняк, О.Д. Азаров* // Вісник ВПІ. — 1996. — № 1. — С. 14-17.

Надійшла до редакції 16.11.2000