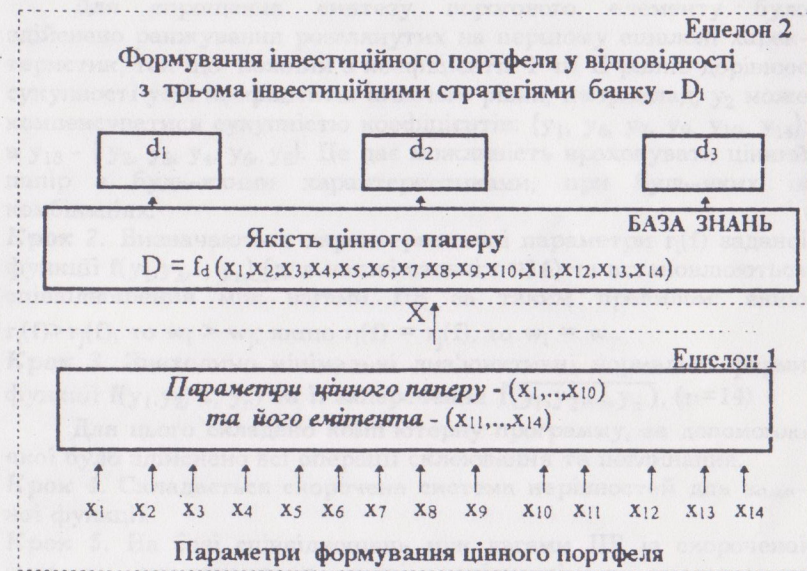


## РОЗРОБКА МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ ФОРМУВАННЯ ІНВЕСТИЦІЙНОГО ПОРТФЕЛЯ

Азарова А.О., Україна, м. Вінниця

Інвестування в цінні папери є одною з найприбутковіших операцій комерційного банку. У західних банках дохід від неї складає близько 80%. В нашій країні методики складання оптимального інвестиційного портфеля є не достатньо розробленими внаслідок того, що суттєвого використання інвестування здобуває лише на сучасному етапі. Виходячи з вищевикладеного, розробці методик, які дозволяють формувати та оптимізувати інвестиційний портфель повинна приділятися значна увага.

Автором запропоновано багатоваріантну багатоешелонну систему формування інвестиційного портфеля залежно від банківської стратегії. Розглянемо структурну схему формування інвестиційного портфеля, що зображена на рис.1.



**Рис.1 Структурна схема формування інвестиційного портфеля, виходячи з трьох банківських стратегій**  
Розроблена система прийняття ефективного інвестиційного рішення базується на класі багаторівневих багатоцільових



систем. На **першому рівні** з'ясовуються необхідні показники як цінного паперу -  $(x_1, \dots, x_{10})$ , так і його емітента -  $(x_{11}, \dots, x_{14})$ , що дає можливість охопити весь спектр впливаючих чинників. На **другому рівні** визначається належність цінного паперу до однієї з трьох інвестиційних стратегій банку:  $D = f_d(x_1, \dots, x_{14})$ .

У відповідності з існуючою банківською практикою будемо здійснювати сортування паперів по інвестиційних стратегіях  $\{d_1, \dots, d_3\}$  за такими правилами:  $d_1$  - цінний папір належить до портфеля з консервативною інвестиційною банківською політикою;  $d_2$  - цінний папір належить до портфеля з помірною інвестиційною політикою банку;  $d_3$  - цінний папір, що належить до портфеля з агресивною інвестиційною політикою.

Для згортання цієї моделі складено 2 методики які базуються:

- 1) на теорії синтезу схем на порогових елементах;
- 2) на теорії нечітких множин.

Розглянемо спершу формалізацію характеристик цінного паперу та його емітента, які були підраховані на першому ешелоні, за допомогою теорії синтезу логічних схем та автоматів на порогових елементах [1]. Нехай **пороговий елемент** (ПЕ) - це пристрій, що має  $n$  входів та один вихід. Входи ПЕ характеризуються вагами  $w_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ). На кожний вхід поступає сигнал  $y_i$ , що приймає значення  $a_i$ :

$$\begin{cases} a_i = 0, & \text{якщо } x_i \notin [x_{i\min} \dots x_{i\max}] \\ a_i = 1, & \text{якщо } x_i \in [x_{i\min} \dots x_{i\max}] \end{cases} \text{ - для кожної стратегії (2).}$$

де  $x_{i\min}$  ( $x_{i\max}$ ) - це мінімальне (максимальне) значення діапазону змінення  $x_i$  характеристики цінного паперу, у межах якого воно відповідає одній з трьох інвестиційних стратегій.

Сигнал на виході порогового елемента дорівнює одиниці, якщо

$$\sum_{i=1}^n w_i y_i > T, \quad (3)$$

де  $T$  - поріг ПЕ, тобто, якщо цей папір дійсно належить до визначеної інвестиційної банківської стратегії; та дорівнює нулю, якщо

$\sum_{i=1}^n w_i y_i \leq T$  (4), тобто, якщо цінний папір не належить до цієї інвестиційної стратегії банку.

Робота ПЕ  $[w_1, w_2, \dots, w_n; T]$  може бути описана перемикаючою функцією  $f(y_1, y_2, \dots, y_n)$ , що дорівнює одиниці на тих наборах аргументів  $y_i$ , для яких виконується нерівність (3), й дорівнює нулю на тих наборах, для яких виконується нерівність (4). Будь-який пороговий елемент реалізує тільки

одну порогову функцію. Таким чином, визначивши пороговий елемент та його ваги, ми підставимо отримані на першому ешелоні характеристики цінного паперу у вираз (2) й отримаємо для кожної інвестиційної стратегії  $n$ -мірний (в нашому випадку  $n=14$ ) вектор значень  $a_n$ , вектора  $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$  і, саме при цьому векторі  $Y$  для певної інвестиційної стратегії вираз (3) буде справедливим, якщо цінний папір належить до цієї певної інвестиційної стратегії. Якщо навпаки, то буде справедливим вираз (4). Розглянута задача є задачею аналізу ПЕ. Але спершу, необхідно вирішити зворотню задачу - задачу синтезу порогового елемента, що зводиться до визначення ваг  $w_i$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ) й порогу  $T$  порогового елемента, що реалізує задану перемикаючу функцію  $f(y_1, y_2, \dots, y_n)$ .

Таким чином, алгоритм формування інвестиційного портфеля у відповідності з трьома банківськими стратегіями базується на розв'язанні задач синтезу та аналізу порогового елемента та реалізується таким чином:

**Крок 1.** Визначається перемикаюча функція  $f(y_1, y_2, \dots, y_{14})$ , що задається у доконаній диз'юнктивній формі для якої й необхідно синтезувати ПЕ.

Для спрощення синтезу порогового елемента було здійснено ранжування розглянутих на першому ешелоні характеристик, так що кожний з коефіцієнтів I чи II рівнів дорівнює сукупності усіх коефіцієнтів нижчого рівня, наприклад,  $y_2$  може компенсуватися сукупністю коефіцієнтів:  $\{y_1, y_6, y_7, y_9, y_{10}, y_{14}\}$ ; а  $y_{13} - \{y_2, y_3, y_4, y_5, y_8\}$ . Це дає можливість враховувати цінний папір з будь-якими характеристиками, при будь-яких їх комбінаціях.

**Крок 2.** Визначаються характеристичні параметри  $r_i(f)$  заданої функції  $f(y_1, y_2, \dots, y_n)$  (для нашої задачі  $n=14$ ) та встановлюються співвідношення між вагами ПЕ за таким правилом: якщо  $r_i(f) > r_j(f)$ , то  $w_i > w_j$ ; якщо  $r_i(f) = r_j(f)$ , то  $w_i = w_j$ .

**Крок 3.** Знаходимо мінімальні диз'юнктивні нормальні форми функції  $f(y_1, y_2, \dots, y_n)$  та її заперечення  $\bar{f}(y_1, y_2, \dots, y_n)$ , ( $n=14$ )

Для цього складено комп'ютерну програму, за допомогою якої було здійснено всі операції склеювання та поглинання.

**Крок 4.** Складається скорочена система нерівностей для заданої функції.

**Крок 5.** На базі співвідношень між вагами ПЕ із скороченої системи виключаються зайві нерівності, з урахуванням ранжування.



**Крок 6.** Визначається така величина порогу  $T$  й такі значення  $w_i$ , які задовільняють системі нерівностей, що отримана на

кроці 5, й обертають в мінімум лінійну форму:  $R = T + \sum_{i=1}^n w_i$ .

При виконанні цих 6 кроків алгоритму, автором було визначено, що скорочена система нерівностей є сумісною при мінімальному порозі  $T_{\min} = 89$ . Таким чином, ваги всіх 14-ти коефіцієнтів будуть:

ПЕ [1,6,6,6,6,1,1,6,1,1,30,30,30,1; 89] є мінімальним.

**Крок 7.** Для аналізу ПЕ отримаємо для цінного паперу три 14-мірних набори аргументів  $a_i = (a_1, a_2, \dots, a_{14})$ , і підрахуємо

значення сум  $\sum_{i=1}^{14} w_i y_i$  для цих векторів (тобто для кожної інвес-

тиційної стратегії), порівняємо їх з порогом  $T = 89$ . Якщо

$\sum_{i=1}^{14} w_i y_i > 89$ , то функція при цьому векторі приймає значення, що

дорівнює одиниці, тобто цінний папір належить до тієї інвестиційної стратегії, що характеризується саме цим набором. В протилежному випадку значення функції при цьому векторі дорівнює нулю.

На прикладі 6 цінних паперів було виконано задачу аналізу ПЕ, в результаті чого було отримано таку таблицю 1:

Таблиця 1

Цінний папір	$\sum_{i=1}^{14} w_i y_i$ для кон-серватив. політ.	$\sum_{i=1}^{14} w_i y_i$ для по-мірної політ.	$\sum_{i=1}^{14} w_i y_i$ для аг-ресивної політ.
Цінний папір 1	126	66	28
Цінний папір 2	2	15	126
Цінний папір 3	33	95	58
Цінний папір 4	44	113	27
Цінний папір 5	59	119	66
Цінний папір 6	2	21	125

У стовпчиках 2-4 кольором виділені ті комірки, значення сум в

яких  $\sum_{i=1}^{14} w_i y_i$  перевищують мінімальний поріг 89.

Виходячи з таблиці, цінний папір 1 належить до того портфеля банку, який керується консервативною інвестиційною

стратегією, цінні папери 3-5 - помірною інвестиційною стратегією, цінні папери 2, 6 - агресивною інвестиційною стратегією.

Для визначення достовірності розробленої моделі створено методичку формалізації багатоваріантної багаторівневої системи формування інвестиційного портфеля у відповідності з трьома банківськими стратегіями на базі теорії нечітких множин Заде [2].

Нехай  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_{17}\}$  - вектор параметрів оцінювання належності паперу до певної стратегії, де  $x_i \in U_i$ ,  $i = \overline{1, n}$  ( $n=14$ );  $d_j$  - деякий вихідний параметр, значення якого визначає рішення про належність до відповідної інвестиційної стратегії  $j = \overline{1, 3}$ . Вектор рішень про належність до певної інвестиційної стратегії визначимо таким чином:

$$W = \{d_1, \dots, d_3\}, d_j \in W_j \quad (5),$$

де:

$$W_j = [d_j, \bar{d}_j] \quad (6),$$

причому  $d_j, (\bar{d}_j)$  - нижнє (верхнє) значення вихідного параметра  $d_j$ . Області змінювання кількісних параметрів задамо у вигляді діапазонів:

$$U_i = [x_i, \bar{x}_i] \quad i = \overline{1, n} \quad (n=14) \quad (7),$$

де:  $x_i, (\bar{x}_i)$  - нижнє (верхнє) значення вхідного параметра  $x_i$ . Необхідно на базі інформації про вектор  $X$  визначити рішення  $d_j$ ,  $j = \overline{1, 3}$  при цьому  $d_j = f_{d_j}(x_1, \dots, x_{14})$ , де  $f_{d_j}$  - деяка функція, яка встановлює зв'язок між змінними  $x_i$ ,  $i = \overline{1, n}$  та  $d_j$ . Будемо розглядати параметри  $x_i$ ,  $i = \overline{1, n}$  ( $n=14$ ) та рішення  $d_j$  як лінгвістичні змінні, що задані на універсальних множинах (5)-(7).

Відповідно загального підходу [3], алгоритм прийняття рішення щодо віднесення паперу до однієї з інвестиційних стратегій за допомогою запропонованої багаторівневої системи: на основі теорії нечіткої логіки реалізується таким чином:

**Крок 1.** Визначається можливий діапазон змінювання розглянутих параметрів, складається база знань з використанням експертних даних у галузі банківського менеджменту та виводиться система нечітких логічних рівнянь.

**Крок 2.** Задається вигляд функції належності нечітких термів при різних розглянутих параметрах.

**Крок 3.** Конкретизуються значення розглянутих параметрів оцінювання  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ , ( $n=14$ ).

**Крок 4.** Визначаються функції належності нечітких термів при конкретних значеннях параметрів  $x_i$ ,  $i = \overline{1, n}$ , ( $n=14$ ). Функція



алежності відображає елементи з множини  $X$  на множину чисел в інтервалі  $[0,1]$ , які вказують ступінь належності кожного елемента якісним термам (в нашому випадку їх три: високий, середній, низький).

**Крок 5.** Використовуючи виведені логічні рівняння, обчислюються значення багатопараметричних функцій належності  $\mu^d(x_1, x_2, \dots, x_n)$  ( $n=14$ ) при фіксованому векторі  $X=\{x_1, x_2, \dots, x_{14}\}$  для всіх інвестиційних стратегій банку  $\{d_1, \dots, d_j\}$  ( $j=3$ ). При цьому логічні операції  $\wedge$  та  $\vee$  над функціями належності замінюються на операції  $\min$  та  $\max$ .

**Крок 6.** Визначається належність паперу до певної стратегії  $d_j$  для якої:

$$\mu^{d_j}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \max[\mu^{d_j}(x_1, x_2, \dots, x_n)], j = \overline{1,3}.$$

На 1 кроці для оцінювання лінгвістичних змінних  $x_1, \dots, x_{14}$  використовувалася єдина шкала якісних термів: Н - низький, С - середній, В - високий. Складено відповідну матрицю знань, виходячи з отриманих експертних даних, що описують специфіку інвестиційного процесу. На базі матриці знань, було складено відповідні логічні рівняння.

На 2 кроці для побудови функцій належності трьох нечітких термів (Н, С, В) відобразимо діапазони  $[x_i, \bar{x}_i]$  змінення розглянутих параметрів  $x_i$ ,  $i = \overline{1, n}$  ( $n=14$ ) на єдину універсальну множину  $X = \{a, b\}$ .

Функції належності в результаті мають такий вигляд:

$$\mu^a(x) = \begin{cases} \left(\frac{x-a}{d-a}\right)^{1,35}, & x \in [a, d] \\ 1, & x \in (d, b) \end{cases} \quad \mu^h(x) = \begin{cases} 1, & x \in [a, c] \\ \left(\frac{b-x}{b-c}\right)^{1,35}, & x \in [c, b] \end{cases}$$

$$\mu^c(x) = \begin{cases} \left(\frac{x-a}{c_1-a}\right)^{1,35}, & x \in [a, c_1] \\ 1, & x \in (c_1, d_1) \\ \left(\frac{b-x}{b-d_1}\right)^{1,35}, & x \in [d_1, b] \end{cases}$$

Значення  $a, b, c_1, d_1, c, d$  визначено за допомогою матриці знань та визначеного діапазону змінювання параметрів

На кроці 3 були використані дані по цінному паперу 1, який було раніше розглянуто у першій методиці (у таблиці 1):  $x_1=0,3$ ;  $x_2=0,5$ ;  $x_3=0,35$ ;  $x_4=2,0$ ;  $x_5=0,5$ ;  $x_6=1,2$ ;  $x_7=2,0$ ;  $x_8=0,9$ ;  $x_9=0,6$ ;  $x_{10}=2,4$ ;  $x_{11}=0,15$ ;  $x_{12}=0,078$ ;  $x_{13}=0,9$ ;  $x_{14}=0,9$ . За допомогою виразів для функцій належності на кроці 4 було

знайдено значення функцій належності в точках  $x_i$  ( $i = \overline{1,14}$ ) для всіх нечітких термів.

На кроці 5, підставляючи отримані функції належності в логічні рівняння, що складені на кроці 1, та скорочуючи їх, отримані рівняння:

$$\mu^{d_1}(x_1..x_{14}) = 0,392 \vee 0,434 \vee 0,434 \vee 0,266 \vee 0,266 = 0,434;$$

$$\mu^{d_2}(x_1..x_{14}) = 0,227 \vee 0,227 \vee 0,227 \vee 0,227 \vee 0,227 = 0,227;$$

$$\mu^{d_3}(x_1..x_{14}) = 0,089 \vee 0,089 \vee 0,089 \vee 0,089 \vee 0,089 = 0,089.$$

**Крок 6.** У відповідності до алгоритму:  $\max \mu^{d_j} = \mu^{d_1}$ , тобто цінний папір належить до консервативної інвестиційної стратегії банку (як і при методиці, що побудована на базі теорії синтезу порогових елементів). Підставляючи на кроці 3 дані щодо інших 5-ти цінних паперів, які були розглянуті у таблиці 1, отримано один і той же результат, використовуючи цю методику і попередню.

**Висновки:** Таким чином, створено математичну модель формування інвестиційного портфеля у відповідності з 3 банківськими стратегіями, формалізація якої була здійснена за двома вищерозглянутими методиками. Крім того, порівнюючи отримані результати з банківською статистичною звітністю щодо цінних паперів, було з'ясовано, що вони є ідентичними, отриманим при розглянутій математичній моделі. Це дало можливість довести справедливості створеної багатошарової багатоваріантної системи формування інвестиційного портфеля та відповідних методик її формалізації.

За допомогою цієї системи стає можливим більш точно оцінювання якості цінних паперів на ринку, платоспроможності емітентів цінних паперів, а також визначення ризику окремого цінного паперу, а у подальшому й всього портфеля. Використовуючи розроблену систему можливо отримати оптимальний портфель цінних паперів з урахуванням банківської інвестиційної стратегії для бажаного очікуваного рівня прибутку при мінімальному ризику.

Створено відповідну експертну систему для комп'ютерної реалізації розробленої системи, що працює на комп'ютерах класу IBM та сумісних з ним.

#### Література

1. Ротштейн А.П. Медицинская диагностика на нечеткой логике. - Винница: Континент-ПРИМ, 1996. - 132 с.
2. Вавилов Е.Н., Егоров Б.М., Ланцев В.С., Тоценко В.Г. Синтез схем на пороговых элементах. М.: Советское радио. 1970.-с. 368.