УДК 681.31

О.Н.Романюк, Ю.Л.Ляшенко, О.Н.Мельников, Л.А.Савицька

НОВА ФОРМУЛА ДЛЯ РОЗРАХУНКУ ДИСТРИБУТИВНОЇ ФУНКЦІЇ ВІДБИВНОЇ ЗДАТНОСТІ ПОВЕРХНІ

Вступ

На сучасному етапі розвитку комп'ютерної графіки особливу увагу приділяють формуванню реалістичних зображень, які найбільш точно відтворюють об'єкти реального світу. Важливим при цьому є достовірна передача кольору, що передбачає використання при зафарбовуванні тривимірних графічних об'єктів спеціальних методів, серед яких найбільш поширеним є метод Фонга [1,2]. У методі Фонга розраховуються значення векторів нормалей у вершинах полігону, які потім у процесі растеризації лінійно інтерполюються вздовж ребер і рядків сканування. Нормалізовані вектори нормалей використовуються у функції тонування для обчислення інтенсивності кольору кожного елемента зображення. Метод Фонга враховує кривизну поверхонь, і , як наслідок, забезпечує формування реалістичних зображень.

Враховуючи, що зафарбовування за методом Фонга є достатньо трудомістким, то актуальними є питанням розробки нових підходів до підвищення його продуктивності .

Аналіз існуючих підходів та постановка задачі

Метод Фонга відтворює спекулярну складову кольору у вигляді відблисків на поверхні. Інтенсивність спекулярної складової кольору при використанні моделі освітлення Бліна [1] розраховується за формулою:

$$I_S = I_l^{вх} k_S \cos^n \gamma ,$$

де $I_l^{вх}$ - інтенсивність зовнішнього джерела світла; k_S - коефіцієнт спекулярного відбиття; γ - кут між вектором нормалі $\vec{N}$ до поверхні та вектором $\vec{H}$, який отримують шляхом додавання вектора напрямку світла $\vec{L}$ та вектора спостереження $\vec{V}$; n - коефіцієнт спекулярності поверхні.

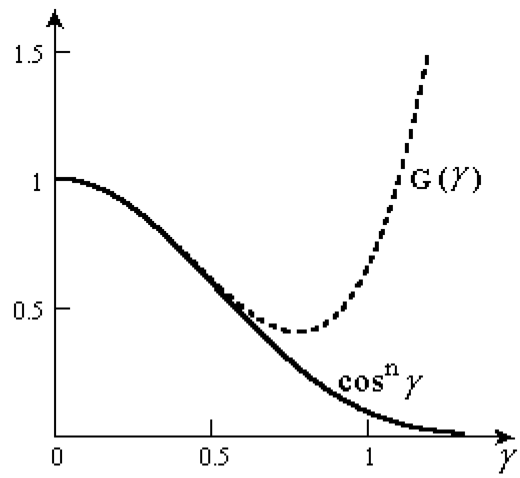

Рис.1. Приклад апроксимації функції $\cos^n \gamma$ рядом Тейлора

Функцію $\cos^n \gamma$ називають дистрибутивною функцією відбивної здатності поверхні (ДФВЗ). Вона визначає, яка частина світла відбивається, коли потік світла контактує з матеріалом у конкретній точці поверхні. Визначення ДФВЗ є достатньо трудомісткою процедурою при розрахунку спекулярної складової кольору.

Дистрибутивну функцію можна розкласти у ряд Тейлора, однак при цьому у подальшому оперують із кутом, у той час, як по нормованих векторах нормалей $\vec{H}, \vec{N}$ легко визначити $\cos\gamma$. Слід зазначити, що при розкладі у ряд Тейлора отримуємо апроксимувальну функцію $G(\gamma)$, яка артефактно відображає зону затухання відблиску. З рис. 1 видно, що з деякого значення аргументу замість затухання апроксимувальна функція зростає.

На практиці часто ДФВЗ апроксимують поліномами Чебишева, які, на жаль, хоч і забезпечують достатньо високу точність, однак є трудомісткими.

У методі [3], якій запропонував Р.Ф. Ліон, функцію $\cos^n \gamma$ розкладають у ряд Тейлора і замість кута λ між відбитим напрямком світла та спостерігачем використовують довжину хорди між зазначеними векторами. Заміна кута на довжину хорди не сильно позначається на точності розрахунків тільки для невеликих значень кутів, а використання обмеженої кількості членів ряда Тейлора не дозволяє з достатньою точністю виконати нормалізацію векторів нормалей та апроксимувати функцію $\cos^n \lambda$.

Достатньо високу точність апроксимації досягнуто за рахунок апроксимації функції $\cos^n \lambda$ функцією $\cos^k(\sqrt{n/k} \cdot \lambda)$ [4], де $k = 2,4,8,\ldots$ і вибирається у залежності від діапазону n. На жаль, для такого підходу необхідно визначити кут λ, що передбачає використання трудомісткої функції arccos.

Згідно з одним із підходів [5] значення ДФВЗ зберігають у таблиці . Для зберігання значень функції $\cos^n \gamma$ $(\mathrm{n} = 1, 256)$ необхідно використовувати двовимірні таблиці загальним обсягом більшим, ніж 8 Мбайтів .

К. Шлік [6] запропонував апроксимувати функцію $\cos^{\mathrm{n}} \gamma$, яку використовують для розрахунку інтенсивності дзеркальної складової кольору в моделі освітлення Бліна, функцією $H(\gamma) = \dfrac{\cos\gamma}{n - n\cos\gamma + \cos\gamma}$. Характерна особливість такого підходу полягає у тому, що вона визначається через $\cos\gamma$ та значення коефіцієнта спекулярності n, а не через кут γ, що притаманно практично всім відомих дистрибутивних функцій. Функція Шліка є монотонно спадною, що відповідає характеру зміни спекулярної складової кольору. На рис 2. для прикладу зображено апроксимацію функції $\cos^{\mathrm{n}} \gamma$ функцією Шліка. З рисунка видно, що такий підхід забезпечує задовільну якість відображення тільки для епіцентру відблиску. За цією областю спостерігається суттєве розходження з результатами, отриманими згідно з моделлю освітлення Бліна. На рис. 3 зображено залежність максимальної відносної похибки апроксимації функції $\cos^{\mathrm{n}} \gamma$ функцією Шліка за умови, що для відображення епіцентру відблиску взято інтервал зміни функції від 1 до 0,6.

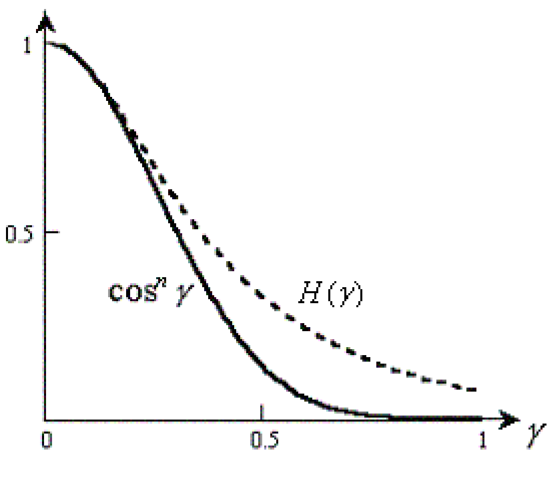

Рис.2 Апроксимація функції $\cos^{\mathrm{n}} \gamma$ функцією Шліка

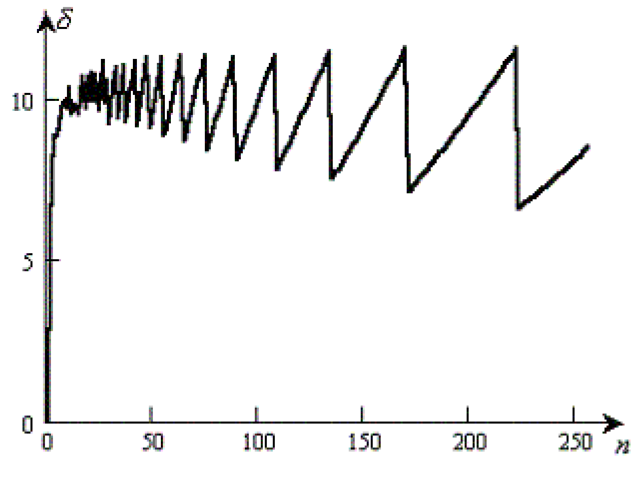

Рис.3. Максимальна відносна похибка апроксимації функції $\cos^{\mathrm{n}} \gamma$ функцією Шліка

Низька точність апроксимувальної формули Шліка обумовила мету статті, яка полягає в її модифікації для більш реалістичного відтворення відблисків на поверхні тривимірних графічних об’єктів.

Виклад основного матеріалу

При апроксимації ДФВЗ слід враховувати, що жорсткі вимоги до точності пред’являються при відображенні тільки епіцентру відблиску [6]. Для периферійних областей, які характеризують затухання інтенсивності світла до мінімального значення, необхідно забезпечити монотонність зміни інтенсивності кольору, яка виключає появу артефактів [6,7]. При цьому, вимог до точності визначення інтенсивності кольору, як правило, не пред’являють [9].

За епіцентр відблиску вибирають інтервал зміни ДФВЗ від одиниці до точки перегину [4]. Згідно теоремою про існування точки перегину , функція $\cos^n\gamma$ має точку перегину з абсцисою $\gamma = a$, якщо $f''(a)=0$ або $f''(a)$ не існує при умові, що при переході через значення $\gamma = a$ похідна $f''(\gamma)$ змінює знак на протилежний.

Візьмемо другу похідну від функції $\cos^n\gamma$ та прирівняємо її до нуля.

$$(\cos^n\gamma)'' = n^2\cdot\sin^2\gamma\cdot\cos^{n-2}\gamma - n\cdot\cos^n\gamma - n\cdot\sin^2\gamma\cdot\cos^{n-2}\gamma .$$

$$n^2\cdot\sin^2\gamma\cdot\cos^{n-2}\gamma - n\cdot\cos^n\gamma - n\cdot\sin^2\gamma\cdot\cos^{n-2}\gamma = 0.$$

З останнього рівняння знаходимо, що при $\gamma > 0$ абсциса точки перегину ДФВЗ дорівнює

$$\gamma = \mathrm{arctg}\left(1/\sqrt{n-1}\right).$$

Визначимо граничне значення ординати точок перегину при різних значень коефіцієнта спекулярності n. Шуканій ординаті відповідає значення γ ДФВЗ в абсцисі цієї точки. Врахуємо те, що $\gamma = \mathrm{arctg}\left(1/\sqrt{n-1}\right)$, тобто аргумент функції ДФВЗ перебуває у функціональній залежності від n. Функція $y=\cos^n(\gamma)$ є спадною при $n>0$. Дослідимо поведінку функції $\gamma = arctg\left(1/\sqrt{n-1}\right)$ на проміжку $n\in(1;+\infty)$. Для цього продиференціюємо вираз (1) і дослідимо першу похідну :

$$\gamma' = \frac{-1}{2\sqrt{(n-1)^3}\,(1+\frac{1}{n-1})} . \qquad (2)$$

На проміжку $n\in(1;+\infty)$:

$$2\sqrt{(n-1)^3} > 0 \text{ і } 1+\frac{1}{n-1} > 0 .$$

Оскільки чисельник дробу (2) від'ємний, то $\gamma' < 0$, тобто, на досліджуваному проміжку функція $\gamma = \mathrm{arctg}\left(1/\sqrt{n-1}\right)$ спадна.

На рис.4 зображено графік функції $y=\cos^n(\mathrm{arctg}\left(1/\sqrt{n-1}\right))$. Так як функція $y=\cos^n(\gamma)$ є монотонно зростаючою, то це означає, що ордината точки перегину

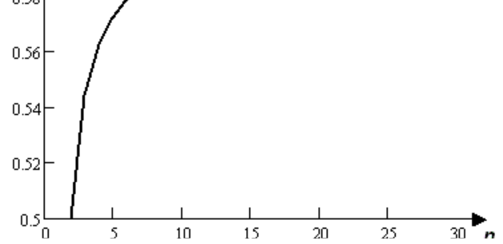

Рис. 4 Графік функції $y=\cos^n(\mathrm{arctg}\left(1/\sqrt{n-1}\right))$

збільшується. З графіка видно, що при $n > 23$ ордината точки перегину більша 0.6. Для визначення ординати решти точок дослідимо окіл точки (0;0.6). Так як $y(10) = 0{,}59$, а $y(6) = 0{,}57$, то враховуючи, що функція y зростає, можна стверджувати, що $y(n) \in [0.6 - \varepsilon; 0.6 + \varepsilon]$, причому $\varepsilon = 0.01$ для $\forall n \in [10,23)$ і $\varepsilon = 0.03$ для $\forall n \in [6,10)$.

Звідси випливає, що епіцентру відблиску, до відображення якого висуваються підвищені вимоги по точності, відповідає інтервал зміни функції ДФВЗ від 1 до 0,6.

Оскільки апроксимація функції $y = \cos^n(\gamma)$ формулою Шліка не забезпечує задовільної точності, то актуальним питанням є її модифікація з метою більш адекватного відтворення відблисків на поверхні. Дослідження показали, що можливо суттєво підвищити точність апроксимації ДФВЗ за рахунок використання функції виду:

$$f(\gamma) = \frac{\cos^a(\gamma)}{n - n \cdot \cos(\gamma) + \cos(\gamma)}, \tag{3}$$

де $a \ll n$ і вибирається залежно від значення коефіцієнта спекулярності. На рис. 5 зображено залежність параметру a від n, при якому досягається мінімальне відхилення апроксимувальної функції від ДФВЗ на інтервалі $0.6 \le \cos^n(\gamma) \le 1$. Експериментальні дослідження показали, що при такому підході на зазначеному інтервалі максимальна відносна похибка апроксимації не перевищує 2%, що є цілком прийнятним для процедури зафарбовування. Обчислювальну складність формули (3) можна суттєво зменшити, якщо в якості параметру a вибрати число, яке дорівнює степені двійки. Дослідження показали, що найбільшу точність забезпечує така форма ДФВЗ :

$$f(\gamma) = \frac{\cos^{2^{\lfloor \log_2 n - 2 \rfloor}}(\gamma)}{n - n \cdot \cos(\gamma) + \cos(\gamma)}.$$

У цьому випадку максимальна відносна похибка апроксимації не більша 3,2%.

Вибір у якості a степені двійки зменшує кількість операцій множення по визначенню ДФВЗ. На рис. 7 зображено залежність a від n, із якої видно, що для $n \in [1;256]$ $\max(a) = 32$. У найгіршому випадку кількість операцій множення, яка необхідна для розрахунку дистрибутивної функції за новою апроксимувальною формулою, дорівнює шести, що менше порівняно з апроксимацією Чебишева.

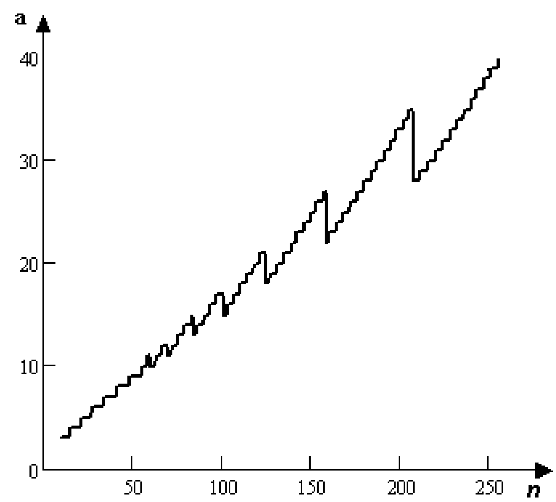

Рис.6. Залежність параметра a від коефіцієнта спекулярності n

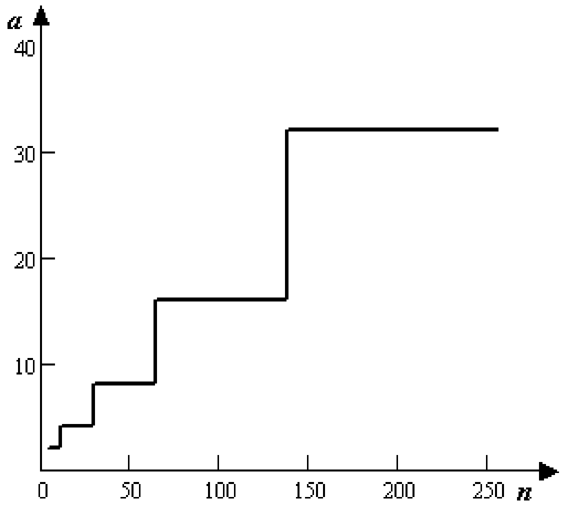

Рис.7. Залежність параметра a від коефіцієнта спекулярності n, за умови, що $a = 2^t, t \in Z^+$

Висновки.

У запропонованій формулі для розрахунку ДФВЗ використовується косинус кута між вектором нормалі до точки поверхні та вектором $\vec{H}$. Значення косинуса кута легко знайти через скалярний добуток векторів. Порівняно з апроксимувальною формулою Шліка відносна похибка апроксимації зменшено в 7-8 разів.

Отримані у роботі результати можуть бути використані для побудови високореалістичних засобів комп'ютерної графіки.

ЛІТЕРАТУРА:

1. Херн Д., Павлин Бейкер М. Компьютерная графика и стандарт OpenGL. -М. : Издательский дом «Вильямс».2005.-1168 с.

2. Роджерс Д. Алгоритмические основы машинной графики: Пер. с англ. - М.: Мир, 1989. - 512 с.

3.Lyon R.F. Phong Shading Reformulation for Hardware Renderer Simplification // Apple Technical Report №43. - 1993.

4.Романюк О.Н, Чорний А.В. Новий підхід до визначення спекулярної складової кольору // Оптико – електронні інформаційно – енергетичні технології. – 2004. - С. 85-92.

5.Shin H., Lee J., Kim L. A Hardware Cost Minimized Fast Phong Shader // IEEE Transactions on VLSI System. - April 2000. - pp. 310-333

6. Chrictophe Schlick A Fast Alternative to Phong's Specular Model // Graphics Gems IV. Academic Press. - 1994. - pp. 404-409.

7.Chang C.F., Bishop G., Lastra A. LDI Tree: A Hierarchical Representation for Image-Based Rendering // In Computer Graphics, SIGGRAPH '99 Proceedings. - 1999. - pp. 291-298

8.Cook R. L., Torrance K.E. A reflectance model for computer graphics // ACM Trans. on Grsphics. - Vol. 1. - 1982. - pp. 1-33.

9.Foley, Van Dam, Feiner, and Hughes Computer Graphics // Principles and Practice. Addison Wesley. - Ch. 16. - 1996. - pp. 800-870.