УДК 621.77

В. А. Краевский, В. М. Михалевич (V. Kraevsky, V. Mikhalevich)

Винницкий национальный технический университет, г. Винница, Украина
Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia, Ukraine

ВАРИАЦИОННЫЕ ЗАДАЧИ В ТЕОРИИ ДЕФОРМИРУЕМОСТИ
VARIATIONAL PROBLEMS IN THE DEFORMABILITY THEORY

Для оптимизации процесса горячего деформирования сформулированы две вариационные задачи. Показано, что решения указанных задач принадлежат классу деформирования с переменной скоростью. Установлено, что для простого многоступенчатого горячего деформирования оптимальными являются схемы с понижением скорости.

Ключевые слова: горячее деформирование, оптимизация, вариационная задача, накопление повреждений, предельная деформация.

For optimization of hot deformation two variational problems are formulated. The decision of the formulated variational problems belongs to the class of deformation with variable velocity and for step deformation the schemes with strain rate lowering are optimum.

Keywords: hot deformation, optimization, variational problem, damage accumulation, ultimate strain.

При горячем деформировании на предельную деформацию, которую способный выдержать материал без разрушения, существенное влияние оказывает скорость деформирования [1, 2]. Этот параметр во многих процессах обработки металлов давлением можно варьировать в широких пределах. Учитывая, что поддержание необходимой температуры образца при горячем деформировании требует затрат энергии (если температуру не поддерживать, то с ее уменьшением будут изменяться пластические характеристики материала, что в результате опять приведет к увеличению работы деформирования), есть смысл в сокращении времени процесса деформирования. Очевидно при этом не должно пострадать качество изделия, соответственно поставленная задача должна решаться с учетом пластических возможностей материала.

Задачу минимизации времени процесса горячего деформирования можно сформулировать таким образом: определить закон изменения скорости деформации $\dot{\varepsilon}_u = \dot{\varepsilon}_u(t)$ при котором заданная накопленная деформация ε_* достигается за кратчайшее время t_*. Учитывая зависимость накопленной деформации ε_u от скорости деформации $\dot{\varepsilon}_u$

$$\varepsilon_u = \int_0^t \dot{\varepsilon}_u(\tau) \cdot d\tau \,. \tag{1}$$

и механизм накопления повреждений при горячем деформировании, который описывается моделью наследственного типа [1]

$$\psi(t) = \int_0^t \varphi(t-\tau; I(\tau)) \cdot f(\dot{\varepsilon}_u(\tau)) \cdot d\tau \,, \tag{2}$$

(где $0 \le \psi \le 1$, $\psi(0)=0$, $\psi(t_*)=1$; t_* – предельное время, которое соответствует разрушению образца; t, τ – время; $\varphi(t-\tau, I(\tau))$ – ядро наследственности; f – некоторая функция), математическая формализация сформулированной задачи принимает вид [3]

$$\varepsilon_* = \int_0^{t_*} \dot{\varepsilon}_u(\tau)\cdot d\tau,\ t_* = t_*(\dot{\varepsilon}_u(t)) \to \min,$$

$$\begin{cases} \int_0^{t_*} \varphi(t_* - \tau; I(\tau))\cdot f(\dot{\varepsilon}_u(\tau))\cdot d\tau = 1, \\ \int_0^{t} \varphi(t - \tau; I(\tau))\cdot f(\dot{\varepsilon}_u(\tau))\cdot d\tau \le 1,\ \forall t \in (0, t_*). \end{cases} \tag{3}$$

При поиске решения задачи (3) возникли трудности в связи с тем, что (3) не является классической вариационной задачей, так как значение определенного интеграла нам известно, а минимизируется верхняя граница определенного интеграла. В работе [4] для горячего деформирования была сформулирована другая вариационная задача: определить закон изменения скорости деформации $\dot{\varepsilon}_u = \dot{\varepsilon}_u(t)$ при котором за заданное время t_* материал приобретает наибольшую деформацию ε_*

$$\varepsilon_* = \int_0^{t_*} \dot{\varepsilon}_u(\tau)\cdot d\tau \to \max,$$

$$\begin{cases} \int_0^{t_*} \varphi(t - \tau; I(\tau))\cdot f(\dot{\varepsilon}_u(\tau))\cdot d\tau = 1, \\ \int_0^{t} \varphi(t - \tau; I(\tau))\cdot f(\dot{\varepsilon}_u(\tau))\cdot d\tau \le 1,\ \forall t \in (0, t_*). \end{cases} \tag{4}$$

Предпоследнее условие в задачах (3) и (4) показывает очевидный факт, что для обеспечения оптимального режима необходимо использовать весь ресурс пластичности материала, то есть в момент времени t_* состояние материала должно быть близким к разрушению. В то же время последнее условие исключает возможность преждевременного разрушения материала.

Если не учитывать неравенства задачи (4), то получим вариационную задачу изопериметрического типа

$$\begin{aligned} &\varepsilon_* = \int_0^{t_*} \dot{\varepsilon}_u(\tau)\cdot d\tau \to \max, \\ &\int_0^{t_*} \varphi(t - \tau; I(\tau))\cdot f(\dot{\varepsilon}_u(\tau))\cdot d\tau = 1. \end{aligned} \tag{5}$$

Вариационная задача в постановке (5) не имеет решения [5]. Соответственно оптимум задачи (4) может существовать только на границе области, которая определяется неравенствами

$$\int_0^{t} \varphi(t - \tau; I(\tau))\cdot f(\dot{\varepsilon}_u(\tau))\cdot d\tau \le 1,\ \forall t \in (0, t_*). \tag{6}$$

В общем случае (6) – это бесконечное количество неравенств, которые формируют область возможных значений параметров скоростного режима деформирования. Поэтому в дальнейшем решение задачи (4) искали для отдельных классов функций, для которых (6) определяет конечное число неравенств и вариационная задача (4) сводится к задаче нелинейного программирования. В этом направлении рассматривался класс кусочно-постоянных функций, что с технологической точки зрения эквивалентно простому многоступенчатому горячему деформированию (в пределах ступени материал деформируется с постоянной скоростью, а на границе ступеней происходит одномоментное изменение скорости) [6]

$$\dot{\varepsilon}_u = \begin{cases} \dot{\varepsilon}_{u1},\ 0 \le t \le t_1; \\ \dot{\varepsilon}_{u2},\ t_1 \le t \le t_2; \\ \dots \\ \dot{\varepsilon}_{uk},\ t_{k-1} \le t \le t_*, \end{cases} \tag{7}$$

где k – количество ступеней. Задачу (4) удалось решить для случаев двух- [7] и трехступенчатого [5] изменения скорости. На основе полученных результатов сделано обобщение для k-ступенчатого горячего деформирования (7). При этом вариационная задача (4) сводится к задаче нелинейного программирования

$$\varepsilon_* = \dot{\varepsilon}_{u1}t_1 + \dot{\varepsilon}_{u2}(t_2 - t_1) + \dots + \dot{\varepsilon}_{uk-1}(t_{k-1} - t_{k-2}) + \dot{\varepsilon}_{uk}(t_* - t_{k-1}) \to \max;$$
$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{k-1}\left[\dot{\varepsilon}_{ui}\left((t_* - t_{i-1})^n - (t_* - t_i)^n\right)\right] + \dot{\varepsilon}_{uk}(t_* - t_{k-1})^n = \gamma^n; \\ \dot{\varepsilon}_{u1}t_1^n \le \gamma^n; \\ \dot{\varepsilon}_{u1}\left(t_2^n - (t_2 - t_1)^n\right) + \dot{\varepsilon}_{u2}(t_2 - t_1)^n \le \gamma^n; \\ \dots\dots\dots\dots \\ \sum\limits_{i=1}^{k-2}\left[\dot{\varepsilon}_{ui}\left((t_{k-1} - t_{i-1})^n - (t_{k-1} - t_i)^n\right)\right] + \dot{\varepsilon}_{uk-1}(t_{k-1} - t_{k-2})^n \le \gamma^n, \end{cases} \tag{8}$$

в которой целевая функция зависит от $2k-1$ параметров: $\dot{\varepsilon}_{u1}$, $\dot{\varepsilon}_{u2}, \dots, \dot{\varepsilon}_{uk}$, t_1, t_2, …, t_{k-1}. Здесь γ, n – постоянные, которые характеризуют свойства материала.

Анализ двухступенчатого и трехступенчатого деформирования [5, 7] показал, что оптимальной является схема, при которой деформирование на каждой ступени происходит до момента, который предшествует разрушению. Тогда

$$\varepsilon_* = \dot{\varepsilon}_{u1}t_1 + \dot{\varepsilon}_{u2}(t_2 - t_1) + \dots + \dot{\varepsilon}_{uk-1}(t_{k-1} - t_{k-2}) + \dot{\varepsilon}_{uk}(t_* - t_{k-1}) \to \max,$$
$$\begin{cases} \dot{\varepsilon}_{u1} = \dfrac{\gamma^n}{t_1^n}; \\ \dot{\varepsilon}_{u2} = \dfrac{\gamma^n - \dot{\varepsilon}_{u1}\left(t_2^n - (t_2 - t_1)^n\right)}{(t_2 - t_1)^n}; \\ \dots\dots\dots\dots \\ \dot{\varepsilon}_{uk-1} = \dfrac{\gamma^n - \sum\limits_{i=1}^{k-2}\left[\dot{\varepsilon}_{ui}\left((t_{k-1} - t_{i-1})^n - (t_{k-1} - t_i)^n\right)\right]}{(t_{k-1} - t_{k-2})^n}; \\ \dot{\varepsilon}_{uk} = \dfrac{\gamma^n - \sum\limits_{i=1}^{k-1}\left[\dot{\varepsilon}_{ui}\left((t_* - t_{i-1})^n - (t_* - t_i)^n\right)\right]}{(t_* - t_{k-1})^n}. \end{cases} \tag{9}$$

После подстановки $\dot{\varepsilon}_{u1}, \dot{\varepsilon}_{u2}$, …, $\dot{\varepsilon}_{uk}$ в ε_* получим

$$\varepsilon_* = F(t_1, t_2, \dots, t_{k-1}) \to \max\ . \tag{10}$$

Следовательно, в результате задача нелинейного программирования (8) сведена к нахождению безусловного максимума функции $k-1$ переменной. Очевидно, что необходимые условия экстремума имеют вид

$$\frac{\partial F}{\partial t_i}=0,\ i=\overline{1,k-1}. \tag{11}$$

На основе анализа структуры (9) была создана Maple-программа, в которой реализовано автоматическое построение выражения для целевой функции и системы (9) в зависимости от количества ступеней k. Кроме того, возможности системы компьютерной алгебры Maple позволили реализовать автоматизированное формирование и решение системы уравнений (11). В результате были определены оптимальные схемы изменения скорости деформирования для двух-, трех- и шестиступенчатого кручения образцов из стали 14Х17Н2 при температуре 1150^0С [2]. При кручении с постоянной скоростью максимальная деформация, которую может выдержать материал до разрушения $\varepsilon_*=1.8$. При использовании двухступенчатой схемы деформирования, параметры которой определяются решением системы (11)

$$\dot{\varepsilon}_u(t)=\begin{cases}0.4329\ c^{-1}, 0\le t\le 3.4268;\\ 0.0164\ c^{-1}, 3.4268<t\le 30,\end{cases} \tag{12}$$

получим деформацию $\varepsilon_*=1.914$. Согласно расчетам оптимальная трехступенчатая схема имеет вид

$$\dot{\varepsilon}_u=\begin{cases}1.59\ c^{-1}, 0\le t\le 0.821;\\ 0.048\ c^{-1}, 0.821<t\le 9.713;\\ 0.01\ c^{-1}, 9.713<t\le 30.\end{cases} \tag{13}$$

Этой схеме соответствует $\varepsilon_*=1.939$. Решив задачу (9) для случая шести ступеней изменения скорости деформирования, получили максимальную накопленную деформацию $\varepsilon_*=1.948$ при

$$\dot{\varepsilon}_u=\begin{cases}13.4567\ c^{-1}, 0\le t\le 0.079;\\ 0.3824\ c^{-1}, 0.079<t\le 1.021;\\ 0.0633\ c^{-1}, 1.021<t\le 4.379;\\ 0.0216\ c^{-1}, 4.379<t\le 11.230;\\ 0.0107\ c^{-1}, 11.230<t\le 21.021;\\ 0.0069\ c^{-1}, 21.021<t\le 30.\end{cases} \tag{14}$$

Динамика изменения накопленной деформации в процессе деформирования при использовании разных режимов показана на рис. 1. Из полученных данных следует, что для ступенчатого деформирования оптимальными являются схемы со снижением скорости деформирования. При этом с увеличением количества ступеней ε_* также увеличивается.

Основная проблема при решении задачи нелинейного программирования (8) состоит в том, что целевая функция зависит от $2k-1$ параметров. При этом формируется k условий, одно из которых – строгое равенство, другие – неравенства, которые формируют область возможных значений параметров процесса деформирования. В общем случае для отыскания оптимального решения необходимо определить экстремумы на каждой поверхности (а также их пересечении) границы области ($2k-2$)-мерного пространства. Так при двухступенчатом деформировании для нахождения точек возможного оптимума необходимо решить две системы нелинейных уравнений, при трехступенчатом таких систем четыре, при k-ступенчатом деформировании – $1+\sum_{i=1}^{k-1}\frac{(k-1)!}{i!(k-i-1)!}=2^{k-1}$. Количество уравнений в каждой системе от $(k-1)$ до $2(k-1)$ с соответствующим количеством неизвестных. То есть сложность структуры полученной задачи, и, следовательно, сложность получения решения, однозначно определяется предварительно заданным количеством ступеней изменения скорости деформирования k. Даже с учетом гипотезы, что при k-ступенчатом деформировании, оптимальной будет схема, при которой деформирование на каждой ступени происходит до момента, предшествующего разрушению, возможности математических систем MathCad и Maple не позволяют решить задачу в постановке (9) для количества ступеней больше шести.

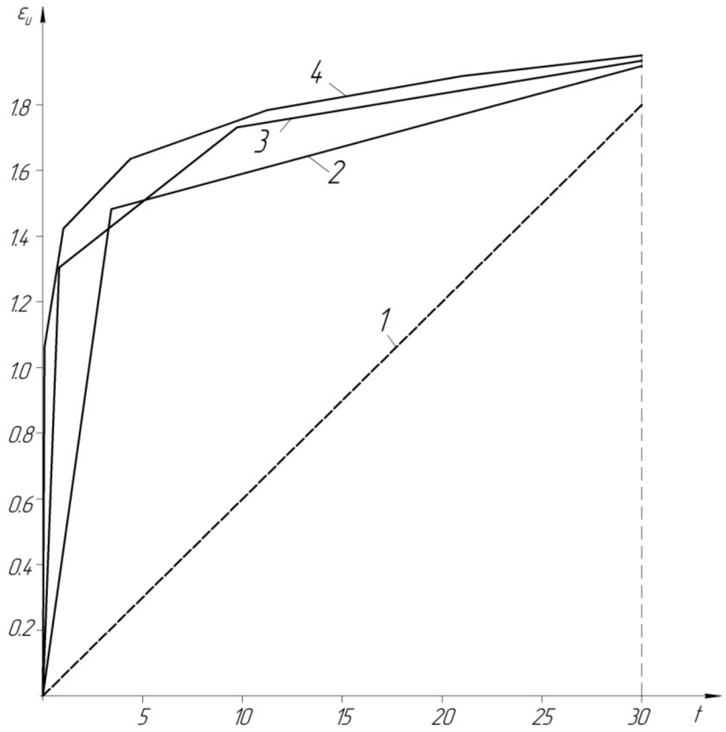

Рис. 1. Динамика изменения накопленной деформации:
1 – при деформировании с постоянной скоростью; 2 – при деформировании по схеме (12); 3 – при деформировании по схеме (13); 4 – при деформировании по схеме (14)

С целью уменьшения влияние количества ступеней на структуру задачи нелинейного программирования будем искать решение в виде многоступенчатого изменения скорости с одинаковой продолжительностью ступеней и с изменением скорости деформирования не произвольно, а по траектории, которая задается функцией $f(c_0,c_1,...,c_n,t)$, где $c_0,c_1,...,c_n$ –

параметры функции. Тогда изменение скорости деформирования будет происходить по закону (рис. 2)

$$\dot{\varepsilon}_u(t)=\begin{cases} f(c_0,c_1,...,c_n,0),\ 0\le t<\Delta t;\\ f(c_0,c_1,...,c_n,\Delta t),\ \Delta t\le t<2\Delta t;\\ ...\\ f(c_0,c_1,...,c_n,(i-1)\Delta t),\ (i-1)\Delta t\le t<i\cdot\Delta t;\\ ...\\ f(c_0,c_1,...,c_n,(k-1)\Delta t),\ (k-1)\Delta t\le t\le k\cdot\Delta t.\end{cases} \tag{15}$$

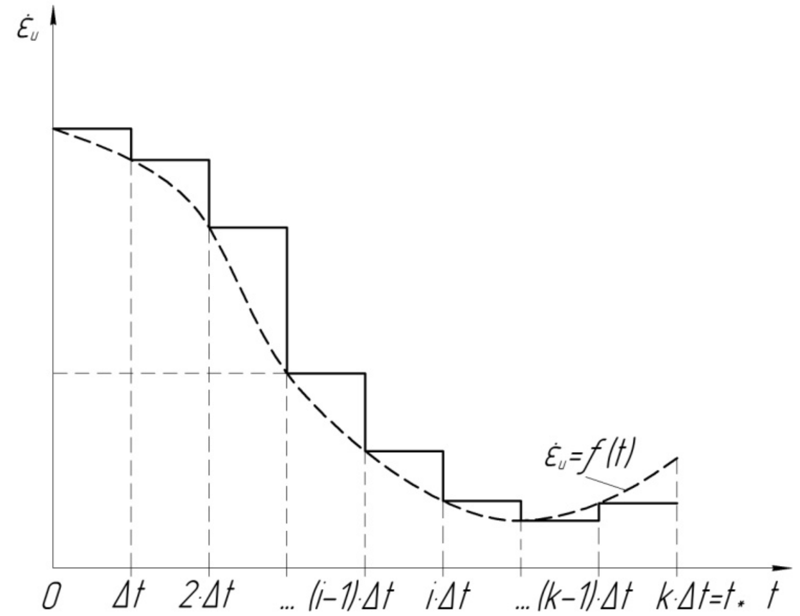

Рис. 2. Многоступенчатое деформирование по заданной траектории

С учетом (15) задача (4) приобретет вид

$$\varepsilon_u(c_0,c_1,...,c_n)=\Delta t\cdot\sum_{i=1}^{k} f(c_0,c_1,...,c_n,(i-1)\Delta t)\to\max,$$

$$\begin{cases} \dfrac{\Delta t^n}{\gamma^n}\sum\limits_{i=1}^{k}\left(c_0,c_1,...,c_n,(k-i+1)^n-(k-i)^n\right)f((i-1)\Delta t)=1,\\ \dfrac{\Delta t^n}{\gamma^n}\sum\limits_{i=1}^{q}\left(c_0,c_1,...,c_n,(q-i+1)^n-(q-i)^n\right)f((i-1)\Delta t)\le 1,\\ q=\overline{1,k-1}.\end{cases} \tag{16}$$

Анализ соотношения (16) показывает, что целевая функция зависит от параметров $c_0,c_1,...,c_n$, то есть от параметров функции. Соответственно количество неизвестных, значение которых мы ищем для максимизации целевой функции, не зависит от количества ступеней. Такой подход, однако, не полностью избавляет от влияния количества ступеней на сложность структуры задачи нелинейного программирования, так как при многоступенчатом изменении скорости деформирования на каждой ступени нужно проверять условие разрушения, а это свою очередь накладывает на искомые параметры условия, количество которых равняется количеству ступеней.

В работе [8] сформулирована и доказана теорема о взаимосвязи решений вариационных задач (3) и (4). Сформулированная теорема позволяет выводы, полученные на основе анализа решений задачи (4), распространить на задачу (3), а именно: решение задачи (3) относится к классу деформирования с переменной скоростью, уменьшить время деформирования возможно при использовании схем с постепенным уменьшением скорости деформирования.

В настоящее время проводится анализ задач, которые могут быть получены на основе (16) при использовании конкретных функций. Полученные данные позволяют предположить, что подход, изложенный в данной работе, может быть использован при постановке и решении оптимизационных задач в теории длительной прочности. Первые попытки формулировки таких задач были предприняты в работе [9].

Литература

1. Михалевич В.М. Тензорні моделі накопичення пошкоджень. – Вінниця: "УНІВЕРСУМ- Вінниця", 1998 – 195 с.

2. Богатов А. А., Смирнов М. В., Криницын В. А. Влияние горячей прерывистой деформации на пластичность металла // Изв. вузов. Черная металлургия. – 1981. – №12. – С. 37-40.

3. Mikhalevich V. M., Kraevsky V. O. Variational problems for damage accumulation models heritable type // The nonlinear analysis and application 2009: Materials of the international scientific conference (April 02-04th 2009, Kyiv). – Kyiv: NTUU "KPI", 2009. – p. 109-110.

4. Михалевич В. М., Краєвський В. О. Формулювання варіаційної задачі для моделі накопичення пошкоджень при гарячому деформуванні // Обработка материалов давлением. – Краматорск: ДГМА. – 2009. – №2(21). – С. 12-16.

5. Михалевич В. М., Краевский В. А. Поиск решения вариационной задачи при горячем деформировании // Обработка материалов давлением. – Краматорск: ДГМА. – 2010. – №1(22). – С. 38-43.

6. Михалевич В. М., Краевский В. А Определение оптимальных параметров многоступенчатой схемы изменения скорости деформаций // Обработка материалов давлением, №2(27) 2011, с. 10-13

7. Михалевич В. М., Краєвський В.О., Добранюк Ю. В. Вісесиметрична осадка циліндричних заготовок // Наукові нотатки. – Луцьк, 2009. – Випуск 25, частина 1. – С. 241-249.

8. Краєвський В. О. Взаємозв'язок розв'язків варіаційних задач, що побудовані на основі моделі накопичення пошкоджень спадкового типу // Теоретичні і прикладні задачі обробки металів тиском та автотехнічних експертиз. Збірник тез доповідей міжнародної науково-технічної конференції. – Вінниця: ВНТУ, 2011. – С. 196-198.

9. Михалевич В. М., Краевский В. А. Постановка и решение оптимизационных задач в теории деформируемости // Вісник національного технічного університету України "Київський політехнічний інститут". Серія машинобудування. – К.: НТУУ "КПІ", 2010. - С. 142-145.