УДК 621.391

А. О. Семенов[1]
А. В. Гончарук[1]
О. М. Дурицький [1]
В. В. Чорний [1]

ДОСЛІДЖЕННЯ ХАОТИЧНОЇ ДИНАМІКИ НЕЛІНІЙНОЇ СИСТЕМИ ЛОРЕНЦА

[1]Вінницький національний технічний університет

Анотація

Досліджено хаотичну динаміку нелінійної системи Лоренца. Визначено особливі точки нелінійної системи Лоренца для яких обчислено власні числа матриці Якобі. Обчислено старші показники Ляпунова та ентропію нелінійної системи Лоренца. Побудовано часові діаграми, амплітудно-частотні та фазочастотні спектри хаотичних коливань динамічних змінних нелінійної системи Лоренца.

Ключові слова: детермінований хаос, система Лоренца, математична модель, фазовий портрет.

Abstract

The chaotic dynamics of the nonlinear Lorentz system is investigated. Specific points of the non-linear Lorentz system are defined for which the eigenvalues of the Jacobi matrix are calculated. The older Lyapunov exponents and the entropy of the Lorentz nonlinear system are calculated. The time diagrams, amplitude-frequency and phase-frequency spectra of chaotic oscillations of dynamic variables of the Lorentz nonlinear system are constructed.

Keywords: deterministic chaos, Lorenz system, mathematical model, phase portrait.

Вступ

Знання, інформація завжди грали і будуть відігравати виняткову роль в житті людства, його розвитку, багато в чому визначати соціальне і економічне становище людини в суспільстві [1]. Тому дуже важливо вирішувати проблеми зі зберіганням інформації, її передачею і безпекою [1]. Динамічний хаос - перспективна основа побудови принципово нових систем обробки та зберігання інформації [1]. Найбільш відомою та найкращі інформаційні властивості має нелінійна система Лоренца [2]. Метою роботи є дослідження хаотичної динаміки нелінійної системи Лоренца.

Результати дослідження

Нелінійна динамічна система Лоренца описуються такою системою диференційних рівнянь [1, 2]:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \sigma\left(x_2 - x_1\right), \\ \dot{x}_2 = \rho x_1 - x_2 - x_1 x_3, . \\ \dot{x}_3 = x_1 x_2 - \beta x_3. \end{cases} \tag{1}$$

Розглянемо якісні характеристики нелінійної динамічної системи Лоренца з наступними значеннями параметрів [1, 2]

$$\sigma = 10,\ \beta = 8/3,\ \rho = 28. \tag{2}$$

Особливі точки знаходимо за формулою $f(x) = 0$. У результаті отримаємо [2]

$$\begin{gathered} x_0^{(1)} = (0;0;0); \\ x_0^{(2)} = \left(\sqrt{\beta(\rho-1)}; \sqrt{\beta(\rho-1)}; \rho-1\right); \\ x_0^{(3)} = \left(-\sqrt{\beta(\rho-1)}; -\sqrt{\beta(\rho-1)}; \rho-1\right). \end{gathered} \tag{3}$$

Таким чином, маємо такі особливі точки [2]

$$O=(0;0;0),P^{+}(8.485;8.485;27),P^{-}(-8.485;-8.485;27). \tag{4}$$

Для визначення виду особливих точок необхідно знайти власні значення матриці Якобі, яка для нелінійної динамічної системи Лоренца має вигляд [2]

$$J=\begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ \rho-x_3 & -1 & -x_1 \\ x_2 & x_1 & -\beta \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Отже, власні числа матриці Якобі для точки O будуть дорівнювати [2]

$$J_1=15,2473,\ J_2=-2,67,\ J_3=4,2473. \tag{6}$$

Власні числа матриці Якобі для точок P^{+}, P^{-} будуть дорівнювати [2]

$$J_1=-13,58,\ J_{2,3}=-0,045\pm 10,367i. \tag{7}$$

Таким чином, особлива точка O є стійким сідло-вузлом, оскільки усі корені характеристичного багатогочлена є дійсними, з яких два кореня є від'ємні, що свідчить про стійкість, і один корінь додатній, що характеризує напрямок, в якому зростає початкове збурення [2].

Інші дві особливі точки P^{+}, P^{-} характеризуються одним дійсним від'ємним власним числом, що характеризує напрямок, в якому фазова траєкторія наближається до особливої точки, і двома комплексно зв'язаними власними числами з від'ємною дійсною частиною, що говорить про наявність обертального руху і скручування траєкторії до особливої точки в площині обертання [2].

Характеристичний показник Ляпунова n-го порядку для довільної неперервної системи визначається за допомогою такої формули [2]:

$$\Lambda_n(x)=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i=\overline{trA}, \tag{8}$$

де A – лінеаризація системи нелінійних диференційних рівнянь, λ_i – характеристичний показник Ляпунова безперервної системи визначається як [2]

$$\lambda_i(u)=\lim_{t\to\infty}\left(t^{-1}\ln\left|u_i(t)\right|\right), \tag{9}$$

де $u_i(t)$ – i-та компонента рішення системи $u(t)$, що описує стан системи в момент часу t.

Знайдемо характеристичні показники Ляпунова за допомогою програми DEREK 3.0 [3]:

$$\lambda_1=9,0667727\cdot 10^{-1},\ \lambda_2=2,5316095\cdot 10^{-3},\ \lambda_3=-1,4477100\cdot 10^{1}. \tag{10}$$

Таким чином, показник Ляпунова n-го порядку буде дорівнювати

$$\Lambda_n=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i=-13,5679104.$$

Ентропія системи характеризує швидкість втрати інформації про систему. Формула для ентропії динамічної системи має вигляд [2]

$$H=\int_{\Lambda}\left[\sum_{\lambda_i(x)>0}\lambda_i(x)\right]dA=\sum_{\lambda_i(x)>0}\lambda_i(x). \tag{11}$$

Таким чином, ентропія нелінійної динамічної системи Лоренца дорівнює

$$H=\lambda_i=0,90667727.$$

На рис. 1 – рис. 4 наведені графіки результатів математичного моделювання нелінійної динамічної

системи Лоренца в пакетів програм MathCad 15.0.

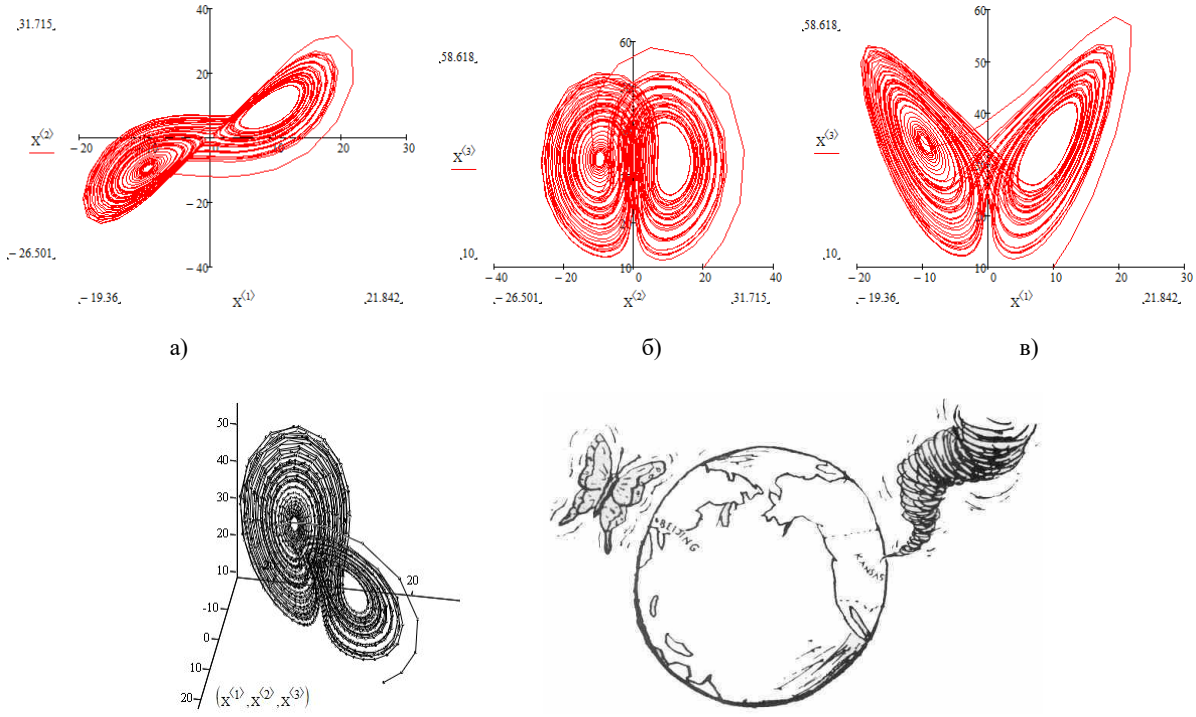


Рис. 1. Фазові портрети нелінійної системи Лоренца в площинах динамічних змінних x_1-x_2 (а), x_2-x_3 (б), x_1-x_3 (в), у просторі динамічних змінних x_1-x_2-x_3 (г) та ілюстрація до пояснення «ефекту метелика» (д)

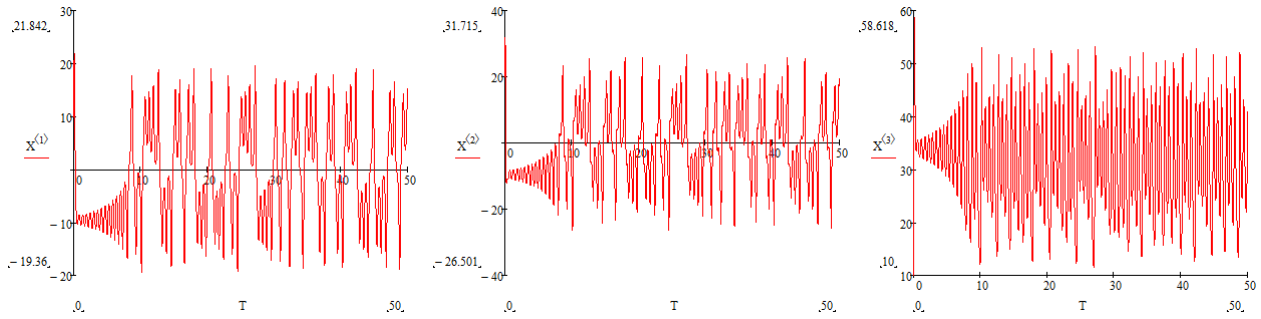


Рис. 2. Часові діаграми хаотичних коливань динамічних змінних x_1 (а), x_2 (б), x_3 (в)

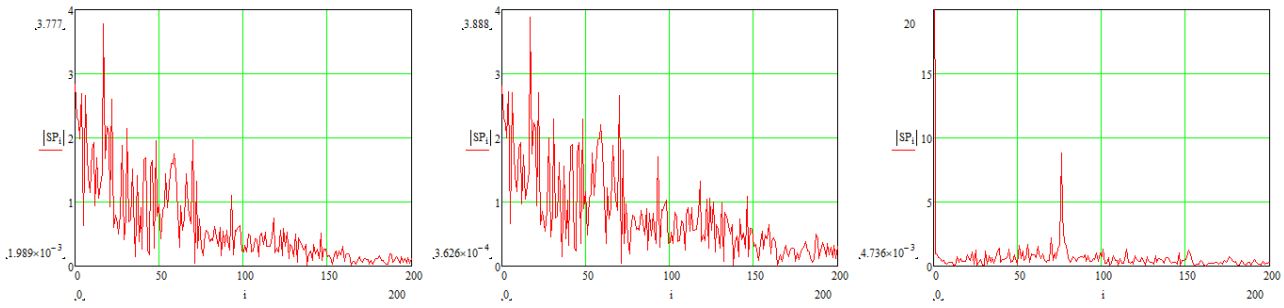
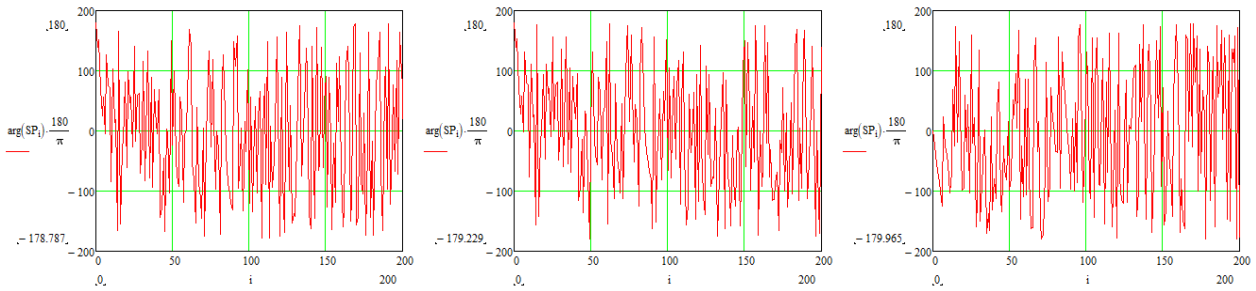


Рис. 3. Амплітудно-частотні спектри хаотичних коливань динамічних змінних x_1 (а), x_2 (б), x_3 (в)



а) б) в)

Рис. 4. Фазочастотні спектри хаотичних коливань динамічних змінних x_1 (а), x_2 (б), x_3 (в)

Висновки

У роботі наведено результати дослідження хаотичної динаміки нелінійної динамічної системи Лоренца. Старший показник Ляпунова, що визначає вид системи і характеризує швидкість зміни з часом фазового обсягу, характеризує ступінь експоненціальної розбіжності близьких траєкторій. Від'ємний характеристичний показник третього порядку свідчить про те, що фазовий об'єм стискається. Це означає, що розглянута динамічна система дисипативна. Наявність у системи додатних показників Ляпунова говорить про те, що дві будь-які близькі фазові траєкторії швидко з плином часу розходяться, отже, є чутливість до зміни значень початкових умов. Також з отриманих значень показників Ляпунова можна зробити висновок, що при заданих параметрах в фазовому просторі є дивний атрактор, рух якого носить хаотичний характер, а також динамічна система Лоренца має найбільше значення ентропії серед хаотичних систем третього ступеня.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Шахтарин Б. И., Кобылкина П. И., Сидоркина Ю. А., Кондратьев А. В., Митин С. В. Генераторы хаотических колебаний : учебн. пособие. Москва: Гелиос АРВ, 2014. 248 с.

2. Шашихин В.Н. Хаос и нелинейная динамика. Регулярная и хаотиче-ская динамика: учеб. пособие. СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2010. 210 с.

3. DEREK-ODE - Исследование динамических систем. URL: http://derek-ode.sytto.com/

Семенов Андрій Олександрович — канд. техн. наук, доцент, професор кафедри радіотехніки, Вінницький національний технічний університет, Вінниця, e-mail: semenov.a.o@vntu.edu.ua

Гончарук Аліна Валеріївна — студент групи ТКР-17м, факультет інфокомунікацій, радіоелектроніки та наносистем, Вінницький національний технічний університет, Вінниця, e-mail: goncharuk_alina@rambler.ru

Дурицький Олексій Миколайович — студент групи ТКР-17м, факультет інфокомунікацій, радіоелектроніки та наносистем, Вінницький національний технічний університет, Вінниця, e-mail: raketa1717@yandex.ru

Чорний Валентин Володимирович — студент групи ТКР-17м, факультет інфокомунікацій, радіоелектроніки та наносистем, Вінницький національний технічний університет, Вінниця, e-mail: demabels@gmail.com

Semenov Andriy O. — Cand. Sc. (Eng), Professor of the Department of Radio-frequency Engineering, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia, e-mail: semenov.a.o@vntu.edu.ua

Honcharuk Alina V. — student of the Department of Radio-frequency Engineering, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia, e-mail: goncharuk_alina@rambler.ru

Durytskyi Oleksii M. — student of the Department of Radio-frequency Engineering, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia, e-mail: raketa1717@yandex.ru

Chornyi Valentyn V. — student of the Department of Radio-frequency Engineering, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia, e-mail: demabels@gmail.com