УДК 621.3

Ю. Г. Ведміцький

ЧАСОВА МАТЕМАТИЧНА ФОРМА МЕТОДИЧНОЇ ПОХИБКИ В РОЗВ'ЯЗКУ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ СТАЦІОНАРНОГО ЕЛЕКТРИЧНОГО КОЛА ЗА ПРОСТИХ ПОЛЮСІВ ДРОБОВО-РАЦІОНАЛЬНОЇ ФУНКЦІЇ В ЗОБРАЖЕННІ ЗА ЛАПЛАСОМ

Вінницький національний технічний університет

Анотація

В роботі проведено математичну ідентифікацію фізичних процесів, що спостерігаються під час еволюції стаціонарного електричного кола за нульових та ненульових початкових умов в фундаментальній задачі Коші.

На підставі отриманої за інтегральним перетворенням Лапласа дробово-раціональної функції зображення методичної похибки, що з'являється в розв'язку диференціального рівняння у разі штучної тривіалізації ненульових за умовою задачі початкових умов, за наявності лише простих полюсів визначено в часовій математичній формі і саму функцію-оригінал.

Отримані результати створюють математичне підґрунтя для корегування відомих методів аналізу перехідних процесів як в стаціонарних електричних колах, так і в динамічних системах іншої фізичної природи.

Ключові слова: теоретична електротехніка, стаціонарне електричне коло, динамічна система, перехідний процес, диференціальне рівняння, задача Коші, нульові та ненульові початкові умови, інтегральне перетворення Лапласа, методична похибка, миттєві напруги, струми

Abstract

This paper provides a mathematical identification of the physical processes observed during the evolution of a time-invariant electrical circuit under both zero and non-zero initial conditions within the fundamental Cauchy problem.

Based on the rational fractional Laplace transform function obtained for the image of the methodological error—which arises in the differential equation solution when non-zero initial conditions are artificially trivialized—the original time-domain function itself has been determined under the assumption of simple poles only.

The obtained results establish a mathematical foundation for correcting existing methods used to analyze transients both in time-invariant electrical circuits and in dynamic systems of alternative physical nature.

Keywords: theoretical electrical engineering, stationary electrical circuit, dynamic system, transient process, differential equation, Cauchy problem, zero and non-zero initial conditions, Laplace integral transform, methodological error, voltages, currents

Теоретичні основи електротехніки є математично точною наукою і оперують не тільки поняттями, що наділені якісним змістом, але і його кількісними характеристиками [1-9].

Розв'яжемо задачу визначення *в часовій формі* функції-спотворення, яка з'являється повсякчас там і тоді, де і коли, застосовуючи операторний метод розрахунку перехідних процесів в стаціонарних електричних колах, керуються загальноприйнятими підходами та ігнорують ненульові початкові умови в фундаментальній задачі Коші навіть тоді, коли характер отримуваних результатів, як наслідок, починає набувати вже антагоністичного забарвлення у відносинах з логікою здорового глузду.

Задачу розв'яжемо в узагальненому вигляді, інваріантно відносно топологічної структури електричного кола, а також *за умови наявності в дробово-раціональної функції зображення методичної похибки лише простих полюсів*.

Отже, розглянемо довільне за топологічною структурою лінійне електричне коло з одним джерелом електричної енергії (е.р.с. або струму), яке і слугуватиме генератором збурення динамічної системи дією $x(t)$. Реакцією на таку дію слугуватиме функція $y(t)$ або струму в будь-якій вітці, або напруги на будь-якій ділянці зазначеного кола.

Кількісний зв'язок поміж дією та реакцією на неї встановлюється математичним оператором, що належить до класу лінійних звичайних диференціальних рівнянь:

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \frac{d^k y}{d t^k} = \sum_{s=0}^{m} b_s \frac{d^s x}{d t^s}, \tag{1}$$

отриманих на підставі фізичних законів, які підпорядковують собі силові та енергетичні процеси, що спостерігаються в технічній системі, а також математичних співвідношень, які виявляють основні властивості окремо узятих основних елементів, з яких складається система. У разі електричного кола із зосередженими параметрами такими фізичними законами слугують закони Кірхгофа, а математичними виразами – співвідношення, які в теоретичній електротехніці отримали назву "компонентних співвідношень".

По відношенню до лівої та правої частин диференціального рівняння (1) електричного кола скористаємося інтегральним перетворенням Лапласа і, врахувавши окремі властивості останнього, отримаємо алгебраїчне операторне рівняння, що встановлює математичний зв'язок поміж функціями зображень вхідної дії $X(p)$ та реакції на неї $Y(p)$. Отже,

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \left[p^k Y(p) - \sum_{v=0}^{k-1} p^v \, y^{(k-v-1)}(0_+) \right] = \sum_{s=0}^{m} b_s \left[p^s X(p) - \sum_{\tau=0}^{s-1} p^\tau \, x^{(k-\tau-1)}(0_+) \right]. \tag{2}$$

У разі примусового знулення ненульових за умовою задачі Коші початкових умов рівняння (2) вироджується в наближене рівняння з наближеним розв'язком

$$Y^*(p) \sum_{k=0}^{n} a_k p^k = X(p) \sum_{s=0}^{m} b_s p^s . \tag{3}$$

З рівнянь (2) та (3) неважко отримати дробово-раціональну функцію операторного зображення методичної похибки

$$\Delta Y(p) = Y(p) - Y^*(p), \tag{4}$$

для якої з урахуванням (2-4) маємо різницю:

$$\Delta Y(p) = \frac{\sum_{k=0}^{n} \sum_{v=0}^{k-1} a_k y^{(k-v-1)}(0_+) \, p^v}{\sum_{k=0}^{n} a_k p^k} - \frac{\sum_{s=0}^{m} \sum_{\tau=0}^{s-1} b_s \, x^{(k-\tau-1)}(0_+) \, p^\tau}{\sum_{k=0}^{n} a_k p^k}, \tag{5}$$

або

$$\Delta Y(p) = \frac{N_y(p)}{M(p)} - \frac{N_x(p)}{M(p)}, \tag{6}$$

де

$$\left.\begin{aligned} M(p) &= \sum_{k=0}^{n} a_k p^k; \\ N_y(p) &= \sum_{k=0}^{n} \sum_{v=0}^{k-1} a_k y^{(k-v-1)}(0_+) \, p^v; \\ N_x(p) &= \sum_{s=0}^{m} \sum_{\tau=0}^{s-1} b_s \, x^{(k-\tau-1)}(0_+) \, p^\tau, \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

є поліноміальними функціями комплексної змінної, порядок яких не перевищує n.

Часова математична форма методичної похибки

$$\Delta y(t) = y(t) - y^*(t) \tag{8}$$

є функцією-оригіналом дробово-раціональної функції (4) і відповідно до зворотного інтегрального перетворення Лапласа

$$\Delta y(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\zeta - j\infty}^{\zeta + j\infty} \Delta Y(p) e^{pt} \, dp. \tag{9}$$

Скористаємося відомою в теоретичній електротехніці *теоремою про розкладання* (зображення на прості дроби).

Відповідно до цієї теореми, у разі наявності з-поміж n полюсів $\{p_1; p_2; \ldots; p_n\}$ дробово-раціональної функції (4) $\Delta Y(p)$ *лише простих коренів* рівняння

$$M(p)=\sum_{k=0}^{n}a_k p^k=0, \tag{10}$$

інтеграл (9) – себто оригінал $\Delta y(t)$ – може бути представлений різницею сум

$$\Delta y(t)=\sum_{i=1}^{n}\frac{N_y(p_i)}{M'(p_i)}e^{p_i t}-\sum_{i=1}^{n}\frac{N_x(p_i)}{M'(p_i)}e^{p_i t}. \tag{11}$$

З урахуванням співвідношень (7) остаточно отримуємо

$$\Delta y(t)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\sum_{k=0}^{n}\sum_{v=0}^{k-1}a_k y^{(k-v-1)}(0_+)\ p_i^v}{\sum_{k=1}^{n}k\,a_k p_i^{k-1}}e^{p_i t}-\sum_{i=1}^{n}\frac{\sum_{s=0}^{m}\sum_{\tau=0}^{s-1}b_s x^{(k-\tau-1)}(0_+)\ p_i^\tau}{\sum_{k=1}^{n}k\,a_k p_i^{k-1}}e^{p_i t}. \tag{12}$$

Висновки

В роботі проведено математичну ідентифікацію фізичних процесів, що спостерігаються під час еволюції стаціонарного електричного кола за нульових та ненульових початкових умов в фундаментальній задачі Коші.

На підставі отриманої за інтегральним перетворенням Лапласа дробово-раціональної функції зображення методичної похибки, що з'являється в розв'язку диференціального рівняння у разі штучної тривіалізації ненульових за умовою задачі початкових умов, за наявності лише простих полюсів визначено в часовій математичній формі і саму функцію-оригінал.

Отримані результати створюють математичне підґрунтя для корегування відомих методів аналізу перехідних процесів як в стаціонарних електричних колах, так і в динамічних системах іншої фізичної природи.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Теоретичні основи електротехніки: підручник / В. С. Бойко, В. В. Бойко. – К.: ІВЦ "Політехніка", 2004. – 272 с.

2. Математичні методи ідентифікації динамічних систем : навчальний посібник / Б. І. Мокін, В. Б. Мокін, О. Б. Мокін. – Вінниця : ВНТУ, 2010. – 263 с.

3. ТОЕ. Перехідні процеси в лінійних колах. Синтез лінійних кіл. Електричні та магнітні нелінійні кола: підручник / Ю. О. Карпов, Ю. Г. Ведміцький, В. В. Кухарчук, С. Ш. Кацив, за ред. проф. Ю. О. Карпова. – Херсон : ОЛДІ-ПЛЮС, 2019. – 456 с.

4. Теорія автоматичного керування : підручник / М. Г. Попович, О. В. Ковальчук. – К. : Либідь, 2007. – 657 с.

5. ТОЕ. Електромагнітне поле : підручник / Ю. О. Карпов, Ю. Г. Ведміцький, В. В. Кухарчук. – Херсон : ОЛДІ-ПЛЮС, 2014. – 392 с.

6. ТОЕ. Усталені режими лінійних електричних кіл із зосередженими та розподіленими параметрами : підручник / Ю. О. Карпов, С. Ш. Кацив, В. В. Кухарчук, Ю. Г. Ведміцький ; під ред. проф. Ю. О. Карпова – Вінниця : ВНТУ, 2011. – 377 с.

7. Ведміцький Ю. Г. Тектологія динамічних систем і явище гіперсилової взаємодії в структурних рівняннях узагальненого електричного кола / Ю. Г. Ведміцький // Наукові праці Вінницького національного технічного університету. – 2018. – №2. – С. 1-11.

8. Ведміцький Ю. Г. Узагальнення рівнянь Лагранжа та Лагранжа-Максвелла для консервативних динамічних систем з урахуванням дії надінерційних та субпотенціальних сил : препринт / Ю. Г. Ведміцький / Zenodo. 2026. DOI: https://doi.org/10.5281/zenodo.19333411

9. Ведміцький Ю. Г. Інтерактивність дисипативних сил в функціях розсіювання Релея та узагальнені рівняння Лагранжа і Лагранжа-Максвелла для дисипативних динамічних систем з довільним ступенем вільності : препринт / Ю. Г. Ведміцький / Zenodo. 2026. DOI: https://doi.org/10.5281/zenodo.19334526

ІНФОРМАЦІЯ ПРО АВТОРА

Юрій Григорович Ведміцький — кандидат технічних наук, доцент, доцент кафедри комп'ютеризованих електромеханічних систем і комплексів, Вінницький національний технічний університет, м. Вінниця, Україна.

Yurii Hryhorovych Vedmitskyi — Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Associate Professor of the Department of Computerized Electromechanical Systems and Complexes, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia, Ukraine.

Email: vedmiczkyi.y.g@vntu.edu.ua; wjg4224@gmail.com