РАДІОЕЛЕКТРОНІКА ТА РАДІОЕЛЕКТРОННЕ АПАРАТОБУДУВАННЯ

УДК 519.65

В. А. Андруник;
П. С. Малачівський, к. т. н., доц.

НЕПЕРЕРВНА МІНІМАКСНА СПЛАЙН-АПРОКСИМАЦІЯ ТЕМПЕРАТУРНОЇ ХАРАКТЕРИСТИКИ ТА ЧУТЛИВОСТІ ТЕРМОДІОДНОГО СЕНСОРА ЛОГАРИФМІЧНИМ ВИРАЗОМ

Розглянуто властивості неперервного й гладкого мінімаксного сплайн-наближення логарифмічним виразом, кожна ланка якого є наближенням за критерієм Чебишева. Визначено необхідні й достатні умови існування рівномірного (чебишевського, мінімаксного) наближення логарифмічним виразом з точним відтворенням значення функції та її похідної в заданих точках. Описано алгоритм побудови неперервного й гладкого мінімаксного сплайн-наближення логарифмічним виразом із заданою похибкою. Наведено приклад сплайн-наближення для описання низькотемпературної характеристики термодіодного сенсора.

Вступ

Під час дослідження температурних характеристик сенсорів часто важливо отримати таке їхнє наближення, яке задовільно відтворює ще й чутливість сенсора [1—3]. У роботі [4] задача апроксимації статичної характеристики сенсора та його чутливості зводиться до побудови неперервного й гладкого сплайн-наближення, в якому поліноміальне наближення на кожній ланці визначається за критерієм Чебишева. Для підвищення точності апроксимації значень чутливості сенсора похідною від сплайну в даній праці пропонується застосовувати неперервне й гладке мінімаксне сплайн-наближення температурної характеристики сенсора логарифмічним виразом. Під час побудови такого сплайн-наближення використовується найкраще рівномірне наближення логарифмічним виразом із точним відтворенням значення функції та її похідної в заданих точках.

1. Найкраще рівномірне наближення логарифмічним виразом із точним відтворенням значень функції та її похідної в заданих точках

Розглянемо задачу найкращого рівномірного наближення логарифмічним виразом

$$L_m(a; x) = \sum_{i=0}^{m} a_i x^i + A\ln(x+p), \quad x > -p \tag{1}$$

від $(m+2)$ параметрів $\left(a_i,\ i = \overline{0,\ m},\ A\right)$, в якому значення p задано.

Нехай неперервно диференційована функція $f(x)$ $\left(f(x) \in C^1[\alpha, \beta]\right)$ задана в $(n+k)$ різних точках відрізка $[\alpha,\beta]$

$$X_k = \left\{ \alpha \le x_1 < x_2 < \ldots < x_{j_1} < u_1 < x_{j_1+1} < \ldots < x_{j_k} < u_k < x_{j_k+1} < \ldots < x_n \le \beta \right\}, \tag{2}$$

© В. А. Андруник, П. С. Малачівський, 2007

де $1 \le j_1 < j_2 < \ldots < j_k \le n-1$ і відомо, що в точках $u_i \ \left(i = \overline{1,\ k}\right)$ функція $f(x)$ та її похідна $f'(x)$ набувають таких значень

$$f(u_i) = v_{i,0}; \quad f'(u_i) = v_{i,1}, \quad i = \overline{1,\ k}. \tag{3}$$

Необхідно функцію $f(x)$ наблизити логарифмічним виразом $L_m(a; x)$ (1) від $(m+2)$ параметрів $(m > 2k)$ так, щоб у точках $u_i \ \left(i = \overline{1,\ k}\right)$ значення функції $f(x)$ та її похідної $f'(x)$ відтворювалось точно

$$L_m(a;\ u_i) = v_{i,0}; \quad L'_m(a;\ u_i) = v_{i,1}; \quad i = \overline{1,\ k}, \tag{4}$$

а найбільша зважена похибка

$$\Delta(a) = \max_{1 \le i \le n} \left| \left(f(x) - L_m(a; x_i)\right) \Big/ w(x_i) \right| \tag{5}$$

була найменшою з можливих на множині точок X_k, де вагова функція $w(x)$ неперервна на відрізку $[\alpha, \beta]$ і не набуває нульового значення.

Властивості рівномірного наближення функції $f(x)$ логарифмічним виразом (1) із точним відтворенням її значень і значень її похідної в заданих точках визначає теорема.

Теорема. *Нехай неперервно диференційовна функція $f(x)$ задана на множині точок* (2), *неперервна функція $w(x)$ така, що не набуває нульового значення на $[\alpha, \beta]$, а логарифмічний вираз $L_m(a; x)$* (1) *від $(m+2)$-х параметрів, де $(m > 2k)$ і $n > (m - 2k + 2)$. Тоді існує й до того ж єдине найкраще рівномірне наближення функції $f(x)$ виразом $L_m(a; x)$ на множині точок X_k із ваговою функцією $w(x)$ і точним відтворенням значень функції та її похідної в точках u_i $\left(i = \overline{1,\ k}\right)$. Для того щоб вираз $L_m\left(a^*; x\right)$ був найкращим рівномірним наближенням функції $f(x)$ на множині точок X_k* (2) *з ваговою функцією $w(x)$ і точним відтворенням значень функції та її похідної в точках u_i $\left(i = \overline{1,\ k}\right)$ необхідно і достатньо щоб для точок u_i $\left(i = \overline{1,\ k}\right)$ і деяких відмінних від них $(m - 2k + 3)$-х впорядкованих точок z_j $\left(j = \overline{1,\ m-2k+3}\right)$*

$$\alpha \le z_1 < z_2 < \ldots < z_{m-2k+3} \le \beta \tag{6}$$

із множини X_k $\left(z_j \in X_k,\ z_j \ne u_i,\ j = \overline{1,\ m-2k+3},\ i = \overline{1,\ k}\right)$ виконувались рівності

$$\begin{cases} L_m\left(a^*;\ u_i\right) = v_{i,0} \equiv f(u_i); \\ L'_m\left(a^*;\ u_i\right) = v_{i,1} \equiv f'(u_i), \quad i = \overline{1,\ k}; \\ \left(f\left(z_j\right) - L_m\left(a^*; z_j\right)\right) \Big/ w\left(z_j\right) = (-1)^i \mu, \quad j = \overline{1,\ m-2k+3}, \end{cases} \tag{7}$$

де

$$|\mu| = \max_{1 \le i \le n} \left| \left(f(x_i) - L_m\left(a^*; x_i\right)\right) \Big/ w(x_i) \right|,$$

а $L'_m(a;\ x)$ — похідна від виразу $L_m(a; x)$

$$L'_m(a;\ x) = \sum_{i=1}^{m} i\, a_i x^{i-1} + \frac{A}{x + p}.$$

Доведення. Перш за все покажемо справедливість теореми для найкращого зваженого рівномірного наближення функції $f(x)$ логарифмічним виразом (1) на відрізку $[\alpha, \beta]$ з точним відтворенням її значення та значення її похідної лише в одній точці u_1. Нехай у деякій точці $u_{1,1}$ із відрізку

$[\alpha,\beta]$ відмінній від точок множини X_k і сусідній із точкою u_1

$$x_1 < x_2 < \ldots < x_{j_1} < u_{1,1} < u_1 < x_{j_1+1} < \ldots < x_n \tag{8}$$

функція $f(x)$ набуває значення $f(u_{1,1})$, а логарифмічний вираз (1) є найкращим рівномірним наближенням функції $f(x)$ з ваговою функцією $w(x)$ на множині точок (8) й інтерполюванням в точках u_1 і $u_{1,1}$, тобто точним відтворенням значення функції $f(x)$ у точках u_1 і $u_{1,1}$.

Оскільки для $x > -p$ логарифм $\ln(x+p)$ має $(m+1)$ неперервну похідну і $(m+1)$ похідна не змінює знак, то відповідно до [5] вираз (1) задовольняє умову Хаара [1] на відрізку $[\alpha,\beta]$ для $p > -\alpha$. Тому згідно властивостей рівномірного наближення з інтерполюванням виразом, що задовольняє умову Хаара [6], таке наближення існує й до того ж єдине. Крім того, параметри цього наближення задовольняють систему рівнянь

$$\begin{cases} L_m(b;\ u_1) = f(u_1); \\ L_m(b;\ u_{1,1}) = f(u_{1,1}); \\ \left(f(z_i) - L_m(b; z_i)\right) \big/ w(z_i) = (-1)^i \eta\ , \quad i = \overline{1,\ m+1}, \end{cases} \tag{9}$$

де

$$|\eta| = \max_{1 \le i \le n} \left| \left(f(x_i) - L_m(b; x_i)\right) \big/ w(x_i) \right|. \tag{10}$$

Оскільки значення функції $f(x)$ і виразу $L_m(b; x)$ в точках u_1 і $u_{1,1}$ співпадають, то за теоремою Лагранжа [7] їхні середні нахили між цими точками однакові. Якщо точку $u_{1,1}$ подумки наближати до точки u_1, то ці середні нахили будуть прямувати відповідно до значення похідної функції $f(x)$ і похідної виразу $L_m(b; x)$ у точці u_1. Отже, зі збігом точки $u_{1,1}$ з точкою u_1 отримаємо вираз $L_m(b; x)$, який у точці $u_{1,1}$ точно відтворює не лише значення функції, а ще й значення її похідної.

Нехай U_s — послідовність точок із відрізку $\left[u_{1,1},\ u_1\right]$

$$U_s = \left\{ u_{1,1} < u_1^{(1)} < u_1^{(2)} < \ldots < u_1^{(s)} < u_1 \right\}$$

така, що зі збільшенням s точка $u_1^{(s)}$ щоразу наближається до точки u_1. Вважатимемо, що значення функції $f(x)$ в цих точках відомі, тоді згідно властивостей рівномірного наближення з інтерполюванням рівномірне наближення функції $f(x)$ виразом $L_m(b; x)$ із ваговою функцією $w(x)$ на множині точок $\left\{X \cup u_1^{(s)}\right\}$ й інтерполюванням в точках u_1 і $u_1^{(s)}$ існує й до того ж єдине [6]. Параметри такого наближення задовольняють систему рівнянь

$$\begin{cases} L_m\left(b^{(s)};\ u_1\right) = f(u_1); \\ L_m\left(b^{(s)};\ u_1^{(s)}\right) = f\left(u_1^{(s)}\right); \\ \left(f(z_i) - L_m\left(b^{(s)}; z_i\right)\right) \big/ w(z_i) = (-1)^i \eta\ , \quad i = \overline{1,\ m+1}\ , \end{cases} \tag{11}$$

де z_i, $i = \overline{1,\ m+1}$ — точки альтернансу впорядковані за зростанням і відмінні від точок u_1 і $u_1^{(s)}$, а η визначається за формулою (10).

Відповідно до [6] таке наближення існує і єдине для будь-яких точок $u_1^{(s)}$ $(s = 1, 2, \ldots)$ із пос-

лідовності U_s, а його параметри задовольняють систему рівнянь (11). Система рівнянь (11) еквівалентна системі

$$\begin{cases} L_m\left(b^{(s)};\ u_1\right) = f(u_1); \\ \dfrac{L_m\left(b^{(s)};\ u_1\right) - L_m\left(b^{(s)};\ u_{1,s}\right)}{u_1 - u_1^{(s)}} = \dfrac{f(u_1) - f\left(u_{1,s}\right)}{u_1 - u_1^{(s)}}; \\ \left(f(z_i) - L_m\left(b^{(s)}; z_i\right)\right) \Big/ w(z_i) = (-1)^i \eta\ , \quad i = \overline{1,\ m+1}, \end{cases} \tag{12}$$

в якій друге рівняння є різницею першого й другого рівняння системи (11) поділеною на $\left(u_1 - u_1^{(s)}\right)$.

Оскільки система рівнянь (12) — це система лінійних рівнянь, то її розв'язок неперервний щодо $u_1^{(s)}$ в топології простору R_{m+3} [7]. За умовою теореми функція $f(x)$ неперервно диференційовна, тому відповідно до викладених вище міркувань, переходячи до границі, спрямувавши $u_1^{(s)}$ до u_1, отримаємо

$$\begin{cases} L_m\left(b^*;\ u_1\right) = f(u_1) \equiv v; \\ L'_m\left(b^*;\ u_1\right) = f'(u_1) \equiv v_1; \\ \left(f(z_i) - L_m\left(b^*; z_i\right)\right) \Big/ w(z_i) = (-1)^i \eta\ , \quad i = \overline{1,\ m+1}. \end{cases} \tag{13}$$

Таким чином, у результаті спрямування $u_1^{(s)}$ до u_1 отримано вираз $L_m\left(b^*;\ x\right)$, який є найкращим рівномірним наближенням функції $f(x)$ на множині точок X_k із ваговою функцією $w(x)$ і точним відтворенням значення функції та її похідної в точці u_1. Згідно з теоремою про рівномірне наближення з інтерполюванням виразом, що задовольняє умову Хаара [6], цей вираз буде єдиним. Параметри b_i^* $\left(i = \overline{0,\ m}\right)$ цього виразу задовольняють систему рівнянь (13), яка збігається із системою рівнянь (7) для $k = 1$.

Отже, найкраще рівномірне наближення виразом $L_m(a; x)$ функції $f(x)$ на множині точок X_k із ваговою функцією $w(x)$ і точним відтворенням значення функції та її похідної в точці u_1 існує й до того ж єдине, а його параметри задовольняють систему рівнянь (7) з $k = 1$.

Подібним чином, застосовуючи властивість рівномірного наближення з інтерполюванням виразом, що задовольняє умову Хаара [6], можна послідовно в k різних точках для $k = 2, 3, \ldots$ встановити справедливість теореми для заданої кількості точок, в яких точно відтворюється значення функції та її похідної. При цьому слід вважати, що функція $f(x)$ додатково задана ще в k різних точках $u_{i,1}$ $\left(i = \overline{1,\ k}\right)$ відрізка $[\alpha, \beta]$, відмінних від точок множини X_k і сусідніх з відповідними точками u_i $\left(x_{j_i} < u_{i,1} < u_i,\ \ i = \overline{1,\ k}\right)$.

Теорему доведено.

Відповідно до цієї характеристичної властивості кількість точок альтернансу найкращого рівномірного наближення виразом (1) з точним відтворенням значення функції та її похідної в заданих точках дорівнює $(m - 2k + 3)$, де m — степінь поліному, а k — кількість точок інтерполювання. Для знаходження точок альтернансу z_i $\left(i = \overline{1,\ m - 2k + 3}\right)$, у разі визначення параметрів рівномірної апроксимації деякої неперервно диференційованої функції $f(x)$ на множині точок X_k із точним відтворенням значень функції та її похідної в точках u_i $\left(i = \overline{1,\ k}\right)$, можна викорис-

тати схему Ремеза з одноточковою заміною наближення до точок альтернансу за алгоритмом Валле-Пуссена [8]. Під час вибору початкового наближення до точок альтернансу слід пам'ятати, що точки u_i $\left(i = \overline{1,\ k}\right)$, не можуть входити в альтернанс.

2. Неперервне й гладке мінімаксне сплайн-наближення логарифмічним виразом із заданою похибкою

Нехай $f(x)$ — деяка неперервно диференційована функція на відрізку $[\alpha,\beta]$ і $w(x)$ — вагова функція неперервна на $[\alpha,\ \beta]$ і така, що не набуває нульового значення на $[\alpha,\ \beta]$. Необхідно функцію $f(x)$ наблизити на відрізку $[\alpha,\ \beta]$ із похибкою G_0 неперервним і гладким мінімаксним сплайном

$$S(x) = L_m\left(a^{(j)};\ x\right),\quad t_j \le x \le t_{j+1},\qquad j = \overline{1,\ q}, \tag{14}$$

де q — кількість ланок у сплайн-наближенні, точки t_j $\left(j = \overline{1,\ q+1}\right)$ — межі ланок їх ще називатимемо вузлами сплайна. Крайні точки t_1 і t_{q+1} співпадають з межами відрізка $[\alpha,\ \beta]$ — $t_1 = \alpha$, $t_{q+1} = \beta$, а відрізки $\left[t_j,\ \ t_{j+1}\right]$, $j = \overline{1,\ q}$ — це ланки сплайна, на кожній з яких значення сплайна задається відповідним виразом — $L_m\left(a^{(j)};\ x\right)$ (1).

У цьому сплайні кожний із виразів $L_m\left(a^{(j)};\ x\right)$, $j = \overline{1,\ q}$ є мінімаксним наближенням функції $f(x)$ на відрізку $\left[t_j,\ \ t_{j+1}\right]$ з вагою $w(x)$

$$\max_{t_j \le x \le t_{j+1}} \left| \frac{f(x) - L_m\left(a^{(j)}; x\right)}{w(x)} \right| = \min_{a} \max_{t_j \le x \le t_{j+1}} \left| \frac{f(x) - L_m(a; x)}{w(x)} \right|, \tag{15}$$

а для забезпечення неперервності й гладкості сплайна, значення цих виразів і їхніх похідних у внутрішніх вузлах сплайна t_j $\left(j = \overline{2,\ q}\right)$ співпадають зі значенням функції $f(x)$ та її похідної

$$L_m\left(a^{(j-1)};\ t_j\right) = L_m\left(a^{(j)};\ t_j\right) = f\left(t_j\right),\ \ j = \overline{2,\ q}; \tag{16}$$

$$L'_m\left(a^{(j-1)};\ t_j\right) = L'_m\left(a^{(j)};\ t_j\right) = f'\left(t_j\right),\ \ j = \overline{2,\ q}. \tag{17}$$

Окрім того, якщо G_j — значення похибки наближення функції $f(x)$ з вагою $w(x)$ на j-й ланці сплайна

$$G_j = \max_{t_j \le x \le t_{j+1}} \left| \left(f(x) - L_m\left(a^{(j)}; x\right)\right) \Big/ w(x) \right|,$$

то

$$\max_{1 \le j \le q} G_j \le G_0, \tag{18}$$

де G_0 – задана похибка сплайн-наближення.

Задача знаходження для функції $f(x)$ сплайн-наближення $S(x)$ (14) із властивостями (15)—(18) на відрізку $[\alpha,\ \beta]$ полягає в забезпеченні заданої похибки наближення G_0 при найменшій можливій кількості ланок. Розв'язування цієї задачі зводиться до такого вибору меж ланок — вузлів t_j $\left(j = \overline{2,\ q}\right)$ сплайн-наближення (14), при якому довжини всіх ланок, можливо, крім останньої, є максимально допустимими для заданої похибки наближення G_0. За основу алгоритму зна-

ходження неперервного та гладкого мінімаксного сплайн-наближення (14) можна взяти алгоритм, описаний у роботі [9].

Параметри виразів (1) сплайн-наближення (14) на кожній із ланок визначаються відповідно до критерію мінімаксного наближення з точним відтворенням значення функції та її похідної в заданих точках (7). Для отримання неперервного й гладкого мінімаксного сплайна відповідно до умов (15)—(17) необхідно забезпечити співпадання значень ланок сплайна й їхніх похідних у внутрішніх вузлах t_j $\left(j = \overline{2,\ q}\right)$. На першій ланці сплайна застосовується найкраще рівномірне наближення з точним відтворенням значення функції та її похідної у правій межі ланки — t_2. Параметри наближення виразом (1) на першій ланці сплайну визначаються із системи рівнянь

$$\begin{cases} \left(f\left(z_i^{(1)}\right) - L_m\left(a^{(1)}; z_i^{(1)}\right)\right) \Big/ w\left(z_i^{(1)}\right) = (-1)^i \mu_1, \quad i = \overline{1,\ m+1}; \\ L_m\left(a^{(1)};\ t_2\right) = f\left(t_2\right); \\ L'_m\left(a^{(1)};\ t_2\right) = f'\left(t_2\right), \end{cases} \tag{19}$$

де $z_i^{(1)}$, $i = \overline{1,\ m+1}$ – впорядковані за зростанням точки альтернансу на відрізку $\left[t_1,\ t_2\right]$.

Кількість точок альтернансу, що визначає таке мінімаксне наближення, дорівнює — $\left(m+1\right)$. При цьому похибка апроксимації на першій ланці дорівнює модулю μ_1 $\left(G_1 = \left|\mu_1\right|\right)$.

Параметри виразів (1) сплайн-наближення (14) для функції $f\left(x\right)$ на внутрішніх ланках, починаючи з другої до передостанньої, визначаються за критерієм мінімаксного наближення з точним відтворенням значення функції та її похідної у обох крайніх точках кожної з цих ланок $\left[t_j,\ t_{j+1}\right]$, $j = \overline{2,\ q-1}$. Згідно характеристичної властивості найкращого рівномірного наближення з точним відтворенням значення функції та похідної в крайніх точках (7) значення коефіцієнтів відповідних виразів (1) задовольняють системам рівнянь

$$\begin{cases} L_m\left(a^{(j)};\ t_j\right) = f\left(t_j\right); \\ L'_m\left(a^{(j)};\ t_j\right) = f'\left(t_j\right); \\ \left(f\left(z_i^{(j)}\right) - L_m\left(a^{(j)}; z_i^{(j)}\right)\right) \Big/ w\left(z_i^{(j)}\right) = (-1)^i \mu_j, \ i = \overline{1,\ m-1}, \ j = \overline{2,\ q-1}; \\ L_m\left(a^{(j)};\ t_{j+1}\right) = f\left(t_{j+1}\right); \\ \dot{L}'_m\left(a^{(j)};\ t_{j+1}\right) = f'\left(t_{j+1}\right), \end{cases} \tag{20}$$

де $z_i^{(j)}$, $i = \overline{1,\ m-1}$, $j = \overline{2,\ q-1}$ — впорядковані за зростанням точки альтернансу j-ї ланки, тобто на відрізку $\left[t_j,\ t_{j+1}\right]$.

У цьому разі є лише $\left(m-1\right)$ точка альтернансу. Як і для першої ланки похибка апроксимації на кожній із цих ланок дорівнює модулю відповідного значення μ_j $\left(G_j = \left|\mu_j\right|\right)$, $j = \overline{2,\ q-1}$.

Параметри виразу (1) сплайн-наближення (14) на останній ланці сплайна визначаються з умови точного відтворення значення функції та її похідної у правій крайніх точках межі ланок

$$\begin{cases} \left(f\left(z_i^{(q)}\right) - L_m\left(a^{(q)}; z_i^{(q)}\right)\right) \Big/ w\left(z_i^{(q)}\right) = (-1)^i \mu_q, \; i = \overline{1,\; m+1}; \\ L_m\left(a^{(q)};\; t_{q+1}\right) = f\left(t_{q+1}\right); \\ \dot{L}_m\left(a^{(j)};\; t_{q+1}\right) = f'\left(t_{q+1}\right), \end{cases} , \qquad (21)$$

де $z_i^{(q)}$, $i = \overline{1,\; m+1}$ — впорядковані за зростанням точки альтернансу q-ї ланки.

У цьому разі є $(m+1)$ точка альтернансу. Похибка апроксимації на останній ланці дорівнює модулю відповідного значення μ_q $\left(G_q = |\mu_q|\right)$.

3. Неперервна апроксимація низькотемпературної характеристики та чутливості термодіодного сенсора

Застосування неперервного й гладкого мінімаксного сплайн-наближення логарифмічним виразом (1) проілюстровано апроксимацією температурної характеристики термодіодного сенсора типу DT-471 фірми Lake Shore, поданої на сайті [10] (Curve 10). Неперервне та гладке сплайн-наближення цієї температурної характеристики в діапазоні від 1,4 К до 475 К із відносною похибкою 0,03 % включає 6 ланок вигляду

$$L_m(a; x) = \sum_{i=0}^{4} a_i x^i + A\ln(x + 1{,}5). \qquad (22)$$

Відносна похибка відтворення чутливості сенсора похідною сплайна за винятком початку діапазону становить 6,3 %.

Значення коефіцієнтів виразу (22) для кожної з ланок цього сплайну й межі ланок подано в таблиці. У колонці «Похибка апроксимації» подано значення відносної похибки апроксимації мінімаксним сплайном температурної характеристики сенсора (Curve 10), а також похибки відтворення чутливості сенсора похідною від сплайна в точках спостереження. Значення цих похибок подано у відсотках.

Результати апроксимації температурної характеристики логарифмічним сплайном

Номер ланки	Межі ланки	Значення коефіцієнтів виразу (22) у порядку зростання їхнього індексу	Похибка апроксимації	
			характеристики	чутливості
1	1,4; 12,5	1,791353; 0,07724958; -0,016125554; $1{,}1529398_{10}{}^{-3}$; $-2{,}89012149_{10}{}^{-5}$; -0,1618474127	0,03	32
2	12,5; 22	10,139943 ; 1,4829798; -0,06492654787; $1{,}7471218_{10}{}^{-3}$; $-2{,}01822858_{10}{}^{-5}$; -7,61467481	0,008	8
3	22; 26	1394,6175; 166,70392; -5,3809454; 0,104891229; $-8{,}6469365_{10}{}^{-4}$; -1067,744946	0,02	2,5
4	26; 48	16,199722; 0,817462247; -0,015458978; $1{,}74526549_{10}{}^{-4}$; $-8{,}30305038_{10}{}^{-7}$; -8,62129062	0,024	6,3
5	48; 400	1,139457; $-1{,}476729136_{10}{}^{-3}$; $-4{,}04965586_{10}{}^{-6}$; $8{,}1632317_{10}{}^{-9}$; $-6{,}6436544_{10}{}^{-12}$; $3{,}56453475_{10}{}^{-3}$	0,029	0,73
6	400; 475	-133,954929; -0,44135397; $9{,}556752698_{10}{}^{-4}$; $-1{,}199144076_{10}{}^{-6}$; $6{,}2130711_{10}{}^{-10}$; 36,479603	0,019	0,41

Відносна похибка відтворення сплайном значення чутливості сенсора 32 % на першій ланці зумовлена похибкою відтворення чутливості в крайній лівій точці діапазону при температурі 1,4 К. У подальших точках спостереження відносна похибка відтворення чутливості сенсора зменшується до 3,6 %. Деяке зростання відносної похибки відтворення сплайном чутливості сенсора до 6,3 % спостерігається при температурі 32 К. Це зростання похибки пояснюється наявним у цьому інтервалі локальним максимумом функції, що описує чутливість сенсора.

У порівнянні з відповідним сплайн-наближенням із поліноміальними ланками з такою самою кількістю параметрів відносна похибка відтворення чутливості сенсора при температурі 30 К логарифмічним виразом дещо менша (6,3 %), тоді як для поліноміальних ланок вона становила 6,7 %

[4].

Висновоки

Побудова неперервного та гладкого мінімаксного сплайн-наближення сумою многочлена й логарифмічного виразу (1) ґрунтується на застосуванні характеристичної властивості (7) рівномірного наближення з точним відтворенням значення функції та похідної в заданих точках. Значення параметрів наближення на першій ланці цього сплайна визначається як рівномірне наближення виразом (1) з точним відтворенням значення функції та її похідної в крайній правій точці ланки (19). Параметри наближення на внутрішніх ланках сплайна, починаючи із другої до передостанньої, визначаються як рівномірне наближення з точним відтворенням значення функції та її похідної в обох крайніх точках цих ланок (20). Мінімаксне наближення на останній ланці сплайна точно відтворює значення функції та її похідної в крайній лівій точці ланки (21). При цьому довжини всіх ланок сплайна крім останньої вибираються максимально можливими для заданої похибки сплайн-наближення.

У порівнянні з поліноміальним сплайн-наближенням досягається дещо менше значення похибки.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Денисюк В. П., Марченко Б. Г. Сплайны и их приложения в задачах моделированя и обработки измерительных сигналов. — Киев: Национальный технический университет Украины «КПИ», 1995. — 246 с.

2. Иващенко А. Н., Шварц Ю. М. Аппроксимация термометрических характеристик кремниевых диодных сенсоров температуры // Оптоэлектроника и полупроводниковая техника: Межвед. сб. науч. тр. — 2003. — Вып. 38. — С. 61—70.

3. Шварц Ю. М., Яганов П. А., Дзюба В. Г. Нейросетевая аппроксимация термометрической характеристики диодного сенсора // Технология и конструирование в электрон. аппаратуре. — 2005. — № 5. — С. 18—22.

4. Малачівський П., Пізюр Я., Андруник В. Неперервне й гладке рівномірне сплайн-наближнення температурної характеристики сенсора і його чутливості // Вимірювальна техніка та метрологія.— 2007. — № 67.

5. Бердышев В. И., Субботин Ю. Н. Численные методы приближения функций. — Свердловск: Средне-Уральское кн. изд-во, 1979. — 120 с.

6. Малачівський П. С. Рівномірне наближення функцій з інтерполюванням у заданих точках // Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології. 2006. — № 4. — С. 142—150.

7. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников. — Москва: Мир, 1977. — 831 с.

8. Попов Б. А. Равномерное приближение сплайнами. — Киев: Наук. думка, 1989. — 272 с.

9. Малачівський П., Андруник В. Рівномірне сплайн-наближення // Комп'ютерні технології друкарства. — 2002. — № 7. — С. 107 – 115.

10. Режим доступу: http: // www. lakeshore. com/…/Curve 10/

Матеріали статті рекомендовані до опублікування оргкомітетом III Міжнародної науково-технічної конференції «Сучасні проблеми радіоелектроніки, телекомунікацій та приладобудування (СПРТП-2007)» (31.05—2.06.2007 р.)

Надійшла до редакції 30.09.07
Рекомендована до друку 04.10.07

Андруник Василь Адамович **—** асистент кафедри інформаційні системи та мережі Національного університету «Львівська політехніка»;
Малачівський Петро Стефанович — старший науковий співробітник Центру математичного моделювання ІППММ ім. Я. С. Підстригача НАН України