

Ю. Г. Ведміцький
М. В. Климишен
А. В. Комар
І. О. Іващенко
О. О. Маліновський

ХВИЛЬОВЕ РІВНЯННЯ ДВОПРОВІДНОЇ ДОВГОЇ ЛІНІЇ

Вінницький національний технічний університет

Анотація

В роботі проведено математичну ідентифікацію фізичних процесів, які спостерігаються в одновимірній однорідній стаціонарній динамічній системі з розподіленими параметрами на прикладі двопровідної довгої лінії, для якої на основі рівнянь Хевісайда (телеграфних рівнянь) отримано одновимірне хвильове рівняння, складене в одному випадку відносно миттєвої напруги, а в іншому – відносно миттєвого струму. Обидві фізичні величини є функціями двох незалежних змінних – просторової координати та часу. Доведена гіперболічність хвильового рівняння довгої лінії, а з нею і хвильовий характер електромагнітних фізичних процесів, що спостерігаються в довгій лінії під час транспортування електричної енергії або передачі інформації. Отримані результати доповнюють вихідний теоретичний базис довгої лінії.

Ключові слова: теоретична електротехніка, електричне коло з розподіленими параметрами, довга лінія, динамічна система, диференціальні рівняння в частинних похідних, телеграфні та хвильові рівняння, напруга, струм

Abstract

The article deals with the mathematical identification of physical processes observed in a one-dimensional homogeneous stationary dynamic system with distributed parameters on the example of a two-wire long line, for which one-dimensional wave equations are obtained on the basis of the Heaviside equations (telegraphic equations), composed with respect to both instantaneous voltage and instantaneous current. The latter are functions of two independent variables: spatial coordinate and time. The hyperbolicity of the wave equations of a long line is proved, and with it the wave character of electromagnetic physical processes observed in a long line during the transportation of electric energy or information transmission. The results obtained complement the original theoretical basis of the long line.

Keywords: theoretical electrical engineering, electric circuit with distributed parameters, long line, dynamic system, partial differential equations, telegraph and wave equations, voltage, current

Не можна не пригадати відомий вислів Іммануїла Канта, що в будь-якій науці стільки ж істини, скільки в ній математики. А отже, і бездоганної краси. Мабуть тому *теоретична електротехніка*, як і її фундаментальна основа – *теорія електромагнітного поля*, були, є і, вочевидь, залишаться чи не найкрасивішими системами знань про закономірності розвитку природи та способи її впливу на навколишній світ. І дуже шкода, що ця краса допоки ще не була оспівана поетами. Хоча за внутрішньою вродою, за зовнішньою поставою і за ще не розкритими в них до краю глибинними таїнами всесвіту та загадковістю буття і світобудови згадані гносеологічні системи, поза сумнівом, цілковито заслуговують на це. Автори просять вибачення за надлишкову категоричність, але така категоричність анітрохи не суперечить істині. Навпаки – виокремлює захват небайдужих. Найперше – і від бездоганної вишуканості *теоретичних основ електротехніки*, і від їх злагодженої гармонії з незаперечною прагматикою сучасної антропогенної техносфери. В електроенергетиці та електромеханіці зокрема [1-7].

В наявній роботі мовитиметься про уточнення окремих положень в *теорії довгої лінії* – важливій складовій теоретичних основ електротехніки. Необхідність таких уточнень обумовлена багатьма чинниками. Найістотнішими з них для авторів стала потреба в пошуку довершеної форми математичного узагальнення щодо опису фізичних процесів, які спостерігаються або можуть спостерігатися в *двопровідній довгій лінії* – одновимірній електромагнітній системі з розподіленими параметрами – під час транспортування нею електричної енергії або передачі по ній інформації у формі електричних сигналів. Зазначене просимо вважати *метою* нашої роботи.

Отже, розглянемо двопровідну довгу лінію як однорідну стаціонарну динамічну електричну систему з розподіленими параметрами – лінійну, однак непараметричну. Як відомо, фізичні процеси в такому електричному колі описуються надзвичайно красивою і симетричною системою лінійних диференціальних рівнянь в частинних похідних *O. Хевісайда*, названих в теоретичній електротехніці “телеграфними рівняннями”:

$$\begin{cases} -\frac{\partial u}{\partial x} = R_0 i + L_0 \frac{\partial i}{\partial t}; \\ -\frac{\partial i}{\partial x} = G_0 u + C_0 \frac{\partial u}{\partial t}, \end{cases} \quad (1)$$

де R_0, L_0, G_0, C_0 – первинні параметри довгої лінії, які і характеризують її електромагнітні властивості. За умовою однорідності та стаціонарності системи ці параметри не є функціями ні одновимірної просторової координати x , ні часу t . Рівняння системи (1) складено відносно миттєвих напруги та струму як функцій водночас двох незалежних змінних – $u = u(x, t)$ та $i = i(x, t)$.

Проведемо математичні перетворення водночас в обидвох рівняннях системи (1) і продиференціюємо їх ліві та праві частини. Операцію диференціювання відносно першого рівняння здійснимо по незалежній змінній x . Ліву і праву частини другого рівняння системи (1) продиференціюємо по іншій незалежній змінній – часовій t . Внаслідок чого отримуємо

$$\begin{cases} -\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = R_0 \frac{\partial i}{\partial x} + L_0 \frac{\partial^2 i}{\partial t \partial x}; \\ -\frac{\partial^2 i}{\partial x \partial t} = G_0 \frac{\partial u}{\partial t} + C_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \end{cases} \quad (2)$$

Скориставшись другим рівнянням вихідної системи (1) зі значенням першої частинної похідної $\frac{\partial i}{\partial x}$ та другим рівнянням системи (2) з другою змішаною частинною похідною $\frac{\partial^2 i}{\partial x \partial t}$, підставимо їх в перше рівняння системи (2).

Після відповідних математичних перетворень отримуємо диференціальне рівняння в частинних похідних, сформоване відносно миттєвої напруги $u = u(x, t)$:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - L_0 C_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - (G_0 L_0 + R_0 C_0) \frac{\partial u}{\partial t} - R_0 G_0 u = 0. \quad (3)$$

Водночас внаслідок притаманної системі (1) *симетрії* рівняння, складене відносно миттєвого струму $i = i(x, t)$, матиме подібну до (3) структуру

$$\frac{\partial^2 i}{\partial x^2} - L_0 C_0 \frac{\partial^2 i}{\partial t^2} - (G_0 L_0 + R_0 C_0) \frac{\partial i}{\partial t} - R_0 G_0 i = 0, \quad (4)$$

в чому неважко переконатися, якщо провести схожі математичні перетворення в системі (1), але вже по відношенню до миттєвого струму.

Отримані рівняння (3) та (4) є одновимірними лінійними диференціальними рівняннями в частинних похідних 2-го порядку з двома незалежними змінними і належать до класу *рівнянь математичної фізики*.

Запишемо їх узагальнено в канонічній формі (наприклад, в термінах миттєвої напруги)

$$A(x, t) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B(x, t) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + C(x, t) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + F\left(x, t, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial t}\right) = 0, \quad (5)$$

де за математичною ідентифікацією співвідношень (3) та (4) коефіцієнти $A(x, t)$, $B(x, t)$ та $C(x, t)$ не залежать ні від просторової координати x (однорідність), ні від часу t (стаціонарність), оскільки довга лінія за умовою досліджуваної нами задачі якраз є саме такою: і однорідною динамічною системою, і стаціонарною.

Отже, як випливає із рівнянь (3-5), для довгої лінії значення коефіцієнтів $A=1$, $B=0$, а

$$C = -L_0 C_0. \quad (6)$$

Функція

$$F\left(x, t, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial t}\right) = -(G_0 L_0 + R_0 C_0) \frac{\partial u}{\partial t} - R_0 G_0 u. \quad (7)$$

Отримані диференціальні рівняння (3) та (4) називають одновимірними *хвильовими рівняннями* довгої лінії і, оскільки параметр

$$D = B^2 - AC = L_0 C_0 > 0, \quad (8)$$

такі рівняння належать до класу рівнянь *гіперболічного типу*.

Нагадаємо, що гіперболічні диференціальні рівняння описують в динамічній системі з розподіленими параметрами *коливальні (хвильові) фізичні процеси*, в нашому випадку – *електромагнітної природи*.

Висновки

В роботі проведено математичну ідентифікацію фізичних процесів, які спостерігаються в одновимірній однорідній стаціонарній динамічній системі з розподіленими параметрами на прикладі двопровідної довгої лінії, для якої на основі рівнянь Хевісайда (телеграфних рівнянь) отримано одновимірні хвильові рівняння, складені і відносно миттєвої напруги, і відносно миттєвого струму. Останні є функціями двох незалежних змінних – просторової координати та часу. Доведена гіперболічність хвильових рівнянь довгої лінії, а з нею і хвильовий характер електромагнітних фізичних процесів, що спостерігаються в довгій лінії під час транспортування електричної енергії або передачі інформації. Отримані результати доповнюють вихідний теоретичний базис довгої лінії.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Теоретичні основи електротехніки: підручник / В. С. Бойко, В. В. Бойко. – К.: ІВЦ “Політехніка”, 2004. – 272 с.
2. Теоретичні основи електротехніки. Електромагнітне поле : підручник / Ю. О. Карпов, Ю. Г. Ведміцький, В. В. Кухарчук. – Херсон : ОЛДІ-ПЛЮС, 2019. – 392 с.
3. Теоретичні основи електротехніки. Перехідні процеси в лінійних колах. Синтез лінійних кіл. Електричні та магнітні нелінійні кола: підручник / Ю. О. Карпов, Ю. Г. Ведміцький, В. В. Кухарчук, С. Ш. Кацив, за ред. проф. Ю. О. Карпова. – Херсон : ОЛДІ-ПЛЮС, 2019. – 456 с.
4. Теоретичні основи електротехніки. Усталені режими лінійних електричних кіл із зосередженими та розподіленими параметрами : підручник / Ю. О. Карпов, С. Ш. Кацив, В. В. Кухарчук, Ю. Г. Ведміцький ; під ред. проф. Ю. О. Карпова – Вінниця : ВНТУ, 2019. – 377 с.
5. Теоретичні основи електротехніки. Задачі та приклади розрахунку лінійних електричних кіл : навчальний посібник / Ю. О. Карпов, Ю. Г. Ведміцький, В. В. Кухарчук та інш. – Херсон : ОЛДІ-ПЛЮС, 2016. – 346 с.
6. Теоретичні основи електротехніки. Методи розрахунку електричних і магнітних кіл в прикладах та задачах : навчальний посібник / Ю. О. Карпов, Ю. Г. Ведміцький, В. В. Кухарчук. – Херсон : ОЛДІ-ПЛЮС, 2017. – 262 с.
7. Ведміцький Ю. Г. Тектологія динамічних систем і явище гіперсилової взаємодії в структурних рівняннях узагальненого електричного кола / Ю. Г. Ведміцький // Наукові праці Вінницького національного технічного університету. – 2018. – №2. – С. 1-11.

Юрій Григорович Ведміцький — канд. техн. наук, доцент, доцент кафедри комп’ютеризованих електромеханічних систем і комплексів, ВНТУ, м. Вінниця, wjg4224@gmail.com

Yurii G. Vedmitskyi — Cand. Sc. (Eng.), Assistant Professor of Department of Theoretical Electrical Engineering and Electrical Measurements, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia, wjg4224@gmail.com

Микола Володимирович Климишен — студент, гр. ЕЕ-23, ФЕЕМ, ВНТУ, м. Вінниця

Mikola V. Klimishen — student, gr. EE-23, FPEEM, VNTU, Vinnytsia

Андрій В'ячеславович Комар — студент, гр. ЕС-23, ФЕЕЕМ, ВНТУ, м. Вінниця
Andrij V. Komar — student, gr. EC-23, FPEEM, VNTU, Vinnytsia

Іван Олександрович Іващенко — студент, гр. 1ЕСМ-23, ФЕЕЕМ, ВНТУ, м. Вінниця
Ivan O. Ivaschenko — student, gr. 1ECM-23, FPEEM, VNTU, Vinnytsia

Олексій Олександрович Маліновський — студент, гр. ЕЕ-23, ФЕЕЕМ, ВНТУ, м. Вінниця
Oleksij O. Malinovskyi — student, gr. EE-23, FPEEM, VNTU, Vinnytsia