

ВИКОРИСТАННЯ ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ В ЗГОРТКОВИХ НЕЙРОННИХ МЕРЕЖАХ

Вінницький національний технічний університет

Анотація

У тезах розглянуто роль вищої математики в роботі та оптимізації згорткових нейронних мереж (CNN), що використовуються для задач комп'ютерного зору та обробки зображень. Описано застосування лінійної алгебри для роботи з тензорами, диференціального числення для реалізації методу градієнтного спуску та алгоритму зворотного поширення помилки, теорії ймовірностей для методів регуляризації, таких як Dropout і L2-регуляризація. Крім того, описано оптимізаційні методи, що застосовуються для мінімізації ресурсів і покращення продуктивності CNN. В роботі підкреслюється, що математичні інструменти забезпечують ефективність та точність згорткових нейронних мереж, дозволяючи їх широке застосування в сучасних технологіях.

Ключові слова: згорткові нейронні мережі, CNN, вища математика, лінійна алгебра, градієнтний спуск, згортка, регуляризація, оптимізація, машинне навчання.

Abstract

This article explores the role of advanced mathematics in the operation and optimization of convolutional neural networks (CNNs) used in computer vision and image processing. It covers key mathematical concepts, including linear algebra for handling tensors, differential calculus for implementing gradient descent and backpropagation algorithms, and probability theory for regularization techniques such as Dropout and L2 regularization. Additionally, optimization methods aimed at reducing resource consumption and enhancing CNN performance are discussed. The study highlights how mathematical tools contribute to the efficiency and accuracy of convolutional neural networks, enabling their widespread application in modern technology.

Keywords: convolutional neural networks, CNN, higher mathematics, linear algebra, gradient descent, convolution, regularization, optimization, machine learning.

Вступ

Згорткові нейронні мережі (Convolutional Neural Networks, CNN) стали основою для багатьох досягнень у галузях комп'ютерного зору, обробки зображень та розпізнавання об'єктів. Вища математика забезпечує базу для роботи CNN, оскільки дає змогу зрозуміти, формалізувати та оптимізувати архітектуру мережі та алгоритми навчання. Використання лінійної алгебри, математичного аналізу та статистики дозволяє ефективно обробляти візуальні дані та виділяти значущі ознаки з великих масивів зображень, що є ключовим для роботи CNN.

Лінійна алгебра та тензорні операції

Згорткові нейронні мережі оперують багатовимірними масивами даних (тензорами), що використовуються для представлення зображень, фільтрів і проміжних ознак. Лінійна алгебра забезпечує необхідні інструменти для маніпуляцій над цими тензорами, включаючи операції згортки, трансформації, підсумовування та розкладання. Наприклад, операція згортки визначається через добуток матриць. Нехай X – матриця, що представляє вхідне зображення, а K – ядро згортки. Тоді результат згортки Y визначається як:

$$Y(i, j) = \sum_m \sum_n X(i + m, j + n) \cdot K(m, n)$$

де i, j – індекси пікселів зображення, а m і n – індекси елементів ядра. Такий підхід дозволяє виявляти різноманітні локальні ознаки, як-от краї або текстури, у зображеннях.

Частинні похідні та градієнтний спуск

Диференціальне числення використовується для навчання нейронних мереж за допомогою методів оптимізації, таких як градієнтний спуск. Градієнтний спуск мінімізує функцію втрат $L(\theta)$ шляхом обчислення частинних похідних. Для ваг θ_i обчислюється частинна похідна $\frac{\partial L}{\partial \theta_i}$, яка показує, як зміна конкретного параметра вплине на похибку. Оновлення ваг здійснюється за формулою:

$$\theta_i := \theta_i - \eta \frac{\partial L}{\partial \theta_i},$$

де η – коефіцієнт навчання. Ця формула є основою зворотного поширення помилки (backpropagation), який дозволяє зменшити функцію втрат і підвищити точність CNN.

Математика згорткових операцій та фільтрації

Згортка є ключовою операцією CNN для виявлення важливих характеристик зображень. У дискретному просторі згортка зображення f з ядром h визначається як:

$$(f \cdot h)(x, y) = \sum_{u=-a}^a \sum_{v=-b}^b f(x-u, y-v)h(u, v)$$

де a і b – розміри фільтра. Ця формула дозволяє виділяти певні патерни у зображенні (наприклад, контури або текстури) шляхом обчислення лінійної комбінації сусідніх значень пікселів. У CNN згортка використовується для обробки зображень, фільтрування сигналів і підвищення ефективності класифікації шляхом скорочення вимірів і збереження важливих ознак.

Теорія ймовірностей та статистика для регуляризації

Для уникнення перенавчання в CNN застосовують регуляризацію, яка базується на ймовірнісних методах та статистиці. Наприклад, Dropout, який випадковим чином вимикає деякі нейрони під час навчання, покладається на ймовірність відсівання нейронів p . Математично це можна представити як:

$$y = Dropout(y) = y \cdot z$$

де z – бінарна змінна, що визначає відсівання нейрону з ймовірністю p . Інший метод регуляризації – L2-регуляризація, відома як затухання ваги, додає штраф за великі значення ваг. Ця регуляризація додає до функції втрат додатковий член:

$$L(\theta) = L_{original} + \lambda \sum_i \theta_i^2,$$

де λ – гіперпараметр, який визначає ступінь регуляризації.

Математика розподілу параметрів та оптимізаційні методи

Для оптимізації параметрів CNN використовують методи розподілу параметрів, які мінімізують обчислювальну складність і витрати ресурсів. Один з методів оптимізації – метод множників Лагранжа, що дозволяє враховувати обмеження під час мінімізації функції. Для задачі мінімізації $f(x)$ з обмеженням $g(x) = 0$ використовують функцію Лагранжа:

$$L(x, \lambda) = f(x) + \lambda g(x)$$

де λ – множник Лагранжа. Оптимізаційні методи, що використовуються в CNN, також включають стиснення параметрів і апроксимацію ваг, що зменшує розмір моделі та підвищує її ефективність.

Висновки

Згорткові нейронні мережі (CNN) є невід’ємною частиною сучасних технологій комп’ютерного зору, забезпечуючи високу точність у задачах класифікації та розпізнавання об’єктів. Вища математика є основою функціонування CNN, де лінійна алгебра дозволяє працювати з тензорами та реалізовувати

операції згортки для виділення ознак на зображеннях, а диференціальне числення допомагає оптимізувати функцію втрат, роблячи модель точнішою. Такі методи регуляризації, як Dropout і L2-регуляризація, зменшують ймовірність перенавчання, підвищуючи стійкість моделі до нових даних.

Вища математика також сприяє розвитку оптимізаційних методів, які підвищують ефективність CNN, зменшуючи обчислювальні витрати та адаптуючи їх для роботи в мобільних і вбудованих системах. Регуляризація та стиснення параметрів дозволяють створювати потужні нейронні мережі з меншими ресурсами, що розширює можливості їх використання в різних галузях, таких як медицина, автономні системи й наукові дослідження. Це підтверджує ключову роль вищої математики не тільки в ефективності та точності CNN, але й у їхньому подальшому розвитку та адаптації до нових потреб.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Christopher M. Bishop. Pattern Recognition and Machine Learning. New York: Springer, 2006. 778 с.
2. Ian Goodfellow, Yoshua Bengio and Aaron Courville Deep Learning. Cambridge: MIT Press, 2016. 800 с.

Сакно Михайло Миколайович – студент групи 2КІ-236, факультет інформаційних технологій та комп'ютерної інженерії, Вінницький національний технічний університет, Вінниця, e-mail: sahnomihajlo51@gmail.com

Безруков Владислав Олександрович – студент групи 2КІ-236, факультет інформаційних технологій та комп'ютерної інженерії, Вінницький національний технічний університет, Вінниця, e-mail: bezrukovvladyslav8578212@gmail.com

Науковий керівник: **Прозор Олена Петрівна** – к.пед.н., доцент кафедри вищої математики, Вінницький національний технічний університет, Вінниця, prozor@vntu.edu.ua

Sakhno Mykhailo M. – student, Faculty of Information Technologies and Computer Engineering, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia, email: sahnomihajlo51@gmail.com

Bezrukov Vladislav O. – student, Faculty of Information Technologies and Computer Engineering, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia, email: bezrukovvladyslav8578212@gmail.com

Supervisor: **Prozor Olena P.** – PhD (in Pedagogical Sciences), Docent, Associate Professor of the Department of Higher Mathematics, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia, prozor@vntu.edu.ua