

ТЕОРЕМА ПРО ТРИВІАЛЬНУ ІНВАРІАНТНІСТЬ ПЕРЕДАТНОЇ ФУНКЦІЇ ДО ФУНКЦІЇ ВХІДНОЇ ДІЇ

Вінницький національний технічний університет

Анотація

В роботі сформульовано та доведено теорему про тривіальну інваріантність передатної функції стаціонарного електричного кола до функції вхідної дії. Змістова сутність теореми визначає умови та накладає обмеження на застосування операторного методу під час розв'язування фундаментальної задачі Коші.

Ключові слова: теоретична електротехніка, стаціонарне електричне коло, динамічна система, диференціальне рівняння, задача Коші, нульові та ненульові початкові умови, інтегральне перетворення Лапласа, передатна функція, напруга, струм

Abstract

The paper formulates and proves a theorem on the trivial invariance of the transfer function of a stationary electric circuit to the function of the input action. The semantic essence of the theorem defines the conditions and limits the application of the operator method in solving the problem of analyzing this dynamic system.

Keywords: theoretical electrical engineering, stationary electric circuit, dynamic system, transient process, differential equation, Cauchy problem, zero and non-zero initial conditions, Laplace integral transform, transfer function, voltages, currents

Хибна практика, з якою, на превеликий жаль, раз у раз доводиться стикатися в технічній літературі та техногенному довкіллі і яка зумовлена неналежними діями під час розв'язування задачі Коші за допомогою *операторного методу* аналізу, наприклад, лінійних електричних кіл (як динамічних систем), породжує невідворотне бажання вкотре акцентувати увагу на питаннях умов застосовуваності зазначеного методу і змушує сформулювати та довести теорему про *тривіальний характер інваріантності передатної функції системи до функції вхідної дії*.

Змістова сутність теореми полягає в тому, що передатна функція електричного кола визначає його динамічні властивості *незалежно (!) від вхідної дії* лише за нульових значень початкових умов. У разі порушення цієї умови передатна функція динамічної системи *стає залежною (!) від характеру функції вхідної дії*, що унеможливорює і, власне, визначення передатної функції, і, зрештою, її практичне використання.

Теоретичні основи електротехніки є точною наукою [1-7].

Як і вища математика, як і фундаментальна фізика, що формують її вихідний теоретичний базис.

Задачу розв'яжемо в узагальненому вигляді.

Для цього розглянемо довільне лінійне електричне коло з одним джерелом електричної енергії (е.р.с. або струму), де джерело слугуватиме генератором збурення динамічної системи дією $x(t)$. Реакцією слугуватиме функція $y(t)$, яка за фізичним змістом виявлятиме себе або як миттєвий струм в довільній вітті електричного кола, або як миттєва напруга на будь-якій його ділянці.

Отже, сформулюємо теорему.

Теорема.

Інваріантність передатної функції лінійної стаціонарної (непараметричної) електричної системи до функції вхідної дії є тривіальною.

Доведення.

Математичний зв'язок між дією та реакцією на неї в лінійній стаціонарній динамічній системі із зосередженими параметрами встановлюється математичним оператором, що належить до класу лінійних звичайних диференціальних рівнянь:

$$\sum_{k=0}^n a_k \frac{d^k y}{dt^k} = \sum_{s=0}^m b_s \frac{d^s x}{dt^s}, \quad (1)$$

отриманих на підставі фізичних законів, які підпорядковують собі силові та енергетичні процеси, що спостерігаються в технічній системі, а також математичних співвідношень, які виявляють основні властивості окремо узятих основних елементів, з яких складається система. У разі електричного кола із зосередженими параметрами такими фізичними законами слугують закони Кірхгофа, а математичними співвідношеннями – компонентні співвідношення.

Оскільки розв’язок заявленої задачі має бути представлений в операторній формі, скористаємося інтегральним перетворенням Лапласа і перейдемо до зображень: спочатку вхідної дії та реакції на неї електричного кола

$$\begin{aligned} X(p) &= \int_0^{\infty} x(t) e^{-pt} dt = L\{x(t)\}, \\ Y(p) &= \int_0^{\infty} y(t) e^{-pt} dt = L\{y(t)\}, \end{aligned} \quad (2)$$

а потому – функцій лінійних комбінацій лівої і правої частин диференціального рівняння (1):

$$L\left\{\sum_{k=0}^n a_k \frac{d^k y}{dt^k}\right\} = L\left\{\sum_{s=0}^m b_s \frac{d^s x}{dt^s}\right\}. \quad (3)$$

Відносно отриманого алгебраїчного рівняння (3) скористаємося лінійною властивістю інтегрального перетворення Лапласа

$$\sum_{k=0}^n a_k L\left\{\frac{d^k y}{dt^k}\right\} = \sum_{s=0}^m b_s L\left\{\frac{d^s x}{dt^s}\right\}. \quad (4)$$

Теорема про диференціювання оригіналу, відповідно до якої:

$$\begin{aligned} L\left\{\frac{d^s x}{dt^s}\right\} &= p^s X(p) - \left[p^{s-1}x(0_+) + p^{s-2}x'(0_+) + \dots + p x^{(s-2)}(0_+) + x^{(s-1)}(0_+)\right] = \\ &= p^s X(p) - \sum_{\tau=0}^{s-1} p^{\tau} x^{(k-\tau-1)}(0_+), \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} L\left\{\frac{d^k y}{dt^k}\right\} &= p^k Y(p) - \left[p^{k-1}y(0_+) + p^{k-2}y'(0_+) + \dots + p y^{(k-2)}(0_+) + y^{(k-1)}(0_+)\right] = \\ &= p^k Y(p) - \sum_{v=0}^{k-1} p^v y^{(k-v-1)}(0_+), \end{aligned} \quad (6)$$

завершити процедуру математичних перетворень.

Таким чином, математичний зв'язок поміж функціями зображень вхідної дії $X(p)$ та реакції на неї $Y(p)$ набуває вигляду:

$$\sum_{k=0}^n a_k \left[p^k Y(p) - \sum_{v=0}^{k-1} p^v y^{(k-v-1)}(0_+) \right] = \sum_{s=0}^m b_s \left[p^s X(p) - \sum_{\tau=0}^{s-1} p^{\tau} x^{(k-\tau-1)}(0_+) \right], \quad (7)$$

або

$$Y(p) \sum_{k=0}^n a_k p^k = X(p) \sum_{s=0}^m b_s p^s + \sum_{k=0}^n \sum_{v=0}^{k-1} a_k y^{(k-v-1)}(0_+) p^v - \sum_{s=0}^m \sum_{\tau=0}^{s-1} b_s x^{(k-\tau-1)}(0_+) p^{\tau}. \quad (8)$$

Тоді з урахуванням (8) для *передатної функції динамічної системи* за вхідною дією $x(t) = L^{-1}\{X(p)\}$ та реакцією на неї $y(t) = L^{-1}\{Y(p)\}$ отримуємо

$$K_y(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{\sum_{s=0}^m b_s p^s}{\sum_{k=0}^n a_k p^k} + \frac{\sum_{k=0}^n \sum_{v=0}^{k-1} a_k y^{(k-v-1)}(0_+) p^v - \sum_{s=0}^m \sum_{\tau=0}^{s-1} b_s x^{(k-\tau-1)}(0_+) p^{\tau}}{\sum_{k=0}^n a_k p^k} \times \frac{1}{X(p)}. \quad (9)$$

Теорему доведено.

Висновки

В роботі сформульовано та доведено теорему про тривіальну інваріантність передатної функції стаціонарного електричного кола до функції вхідної дії.

Змістова сутність теореми визначає умови та накладає обмеження на застосування операторного методу під час розв'язування фундаментальної задачі Коші.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Теоретичні основи електротехніки: підручник / В. С. Бойко, В. В. Бойко. – К.: ІВЦ “Політехніка”, 2004. – 272 с.
2. Математичні методи ідентифікації динамічних систем : навчальний посібник / Б. І. Мокін, В. Б. Мокін, О. Б. Мокін. – Вінниця : ВНТУ, 2010. – 263 с.
3. ТОЕ. Перехідні процеси в лінійних колах. Синтез лінійних кіл. Електричні та магнітні нелінійні кола: підручник / Ю. О. Карпов, Ю. Г. Ведміцький, В. В. Кухарчук, С. Ш. Кацив, за ред. проф. Ю. О. Карпова. – Херсон : ОЛДІ-ПЛЮС, 2019. – 456 с.
4. Теорія автоматичного керування : підручник / М. Г. Попович, О. В. Ковальчук. – К. : Либідь, 2007. – 657 с.
5. ТОЕ. Електромагнітне поле : підручник / Ю. О. Карпов, Ю. Г. Ведміцький, В. В. Кухарчук. – Херсон : ОЛДІ-ПЛЮС, 2014. – 392 с.
6. ТОЕ. Усталені режими лінійних електричних кіл із зосередженими та розподіленими параметрами : підручник / Ю. О. Карпов, С. Ш. Кацив, В. В. Кухарчук, Ю. Г. Ведміцький ; під ред. проф. Ю. О. Карпова – Вінниця : ВНТУ, 2011. – 377 с.
7. Ведміцький Ю. Г. Тектологія динамічних систем і явище гіперсилової взаємодії в структурних рівняннях узагальненого електричного кола / Ю. Г. Ведміцький // Наукові праці Вінницького національного технічного університету. – 2018. – №2. – С. 1-11.

Юрій Григорович Ведміцький — канд. техн. наук, доцент, доцент кафедри комп'ютеризованих електромеханічних систем і комплексів, ВНТУ, м. Вінниця, wjg4224@gmail.com

Yurii G. Vedmitskyi — Cand. Sc. (Eng.), Assistant Professor of Department of Theoretical Electrical Engineering and Electrical Measurements, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia, wjg4224@gmail.com