УДК 621.3

**Ю. Г. Ведміцький**

# МЕТОДИЧНА ПОХИБКА В РОЗВ'ЯЗКУ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ СТАЦІОНАРНОГО ЕЛЕКТРИЧНОГО КОЛА ЗА НАЯВНОСТІ КРАТНИХ ПОЛЮСІВ ДРОБОВО-РАЦІОНАЛЬНОЇ ФУНКЦІЇ В ЗОБРАЖЕННІ ЗА ЛАПЛАСОМ У РАЗІ ТРИВІАЛІЗАЦІЇ НЕНУЛЬОВИХ ЗА УМОВОЮ ЗАДАЧІ КОШІ ПОЧАТКОВИХ УМОВ

Вінницький національний технічний університет

***Анотація***

*В роботі проведено математичну ідентифікацію фізичних процесів, що спостерігаються під час еволюції стаціонарного електричного кола за нульових та ненульових початкових умов в фундаментальній задачі Коші.*

*На підставі отриманої за інтегральним перетворенням Лапласа дробово-раціональної функції зображення методичної похибки, що з'являється в розв'язку диференціального рівняння у разі штучної тривіалізації ненульових за умовою задачі початкових умов, за наявності не тільки простих, але і кратних полюсів довільної кратності, визначено в часовій математичній формі і саму функцію-оригінал.*

*Отримані результати створюють математичне підґрунтя для корегування відомих методів аналізу перехідних процесів як в стаціонарних електричних колах, так і в динамічних системах іншої фізичної природи.*

**Ключові слова:** теоретична електротехніка, стаціонарне електричне коло, динамічна система, перехідний процес, диференціальне рівняння, задача Коші, нульові та ненульові початкові умови, інтегральне перетворення Лапласа, методична похибка, напруги, струми

***Abstract***

*This paper provides a mathematical identification of the physical processes observed during the evolution of a time-invariant electrical circuit under both zero and non-zero initial conditions within the fundamental Cauchy problem.*

*Based on the rational fractional Laplace transform function obtained for the image of the methodological error—which arises in the differential equation solution when initial conditions that are non-zero by specification are artificially trivialized—the original time-domain function itself has been determined under the assumption of not only simple but also multiple poles of arbitrary multiplicity.*

*The obtained results establish a mathematical foundation for correcting existing methods used to analyze transients both in time-invariant electrical circuits and in dynamic systems of alternative physical nature.*

**Keywords:** theoretical electrical engineering, time-invariant electrical circuit, dynamic system, transient process, differential equation, Cauchy problem, zero and non-zero initial conditions, Laplace integral transform, methodological error, voltages, currents

Теоретичні основи електротехніки є математично точною наукою і оперують не тільки поняттями, що наділені якісним змістом, але і його кількісними характеристиками [1-9].

Розв'яжемо задачу визначення *в часовій формі* функції-спотворення, яка з'являється повсякчас там і тоді, де і коли, застосовуючи операторний метод розрахунку перехідних процесів в стаціонарних електричних колах, керуються загальноприйнятими підходами та ігнорують ненульові початкові умови в фундаментальній задачі Коші навіть тоді, коли характер отримуваних результатів, як наслідок, починає набувати вже антагоністичного забарвлення у відносинах з логікою здорового глузду.

Задачу розв'яжемо в узагальненому вигляді, інваріантно відносно топологічної структури електричного кола, а також *за умови наявності в дробово-раціональної функції зображення методичної похибки не тільки простих полюсів, але, що важливо, і кратних з різним ступенем кратності*.

Отже, розглянемо довільне лінійне електричне коло з одним джерелом електричної енергії (е.р.с. або струму), яке і слугуватиме генератором збурення динамічної системи дією $x(t)$. Реакцією на таку

дію слугуватиме функція $y(t)$ або струму в будь-якій вітці, або напруги на будь-якій ділянці зазначеного кола.

Кількісний зв'язок поміж дією та реакцією на неї встановлюється математичним оператором, що належить до класу лінійних звичайних диференціальних рівнянь:

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \frac{d^k y}{d t^k} = \sum_{s=0}^{m} b_s \frac{d^s x}{d t^s}, \tag{1}$$

отриманих на підставі фізичних законів, які підпорядковують собі силові та енергетичні процеси, що спостерігаються в технічній системі, а також математичних співвідношень, які виявляють основні властивості окремо узятих основних елементів, з яких складається система. У разі електричного кола із зосередженими параметрами такими фізичними законами слугують закони Кірхгофа, а математичними виразами – співвідношення, які в теоретичній електротехніці отримали назву "компонентних співвідношень".

Скориставшись інтегральним перетворенням Лапласа і врахувавши окремі властивості останнього, отримуємо операторне рівняння, що зв'язує поміж собою функції зображень вхідної дії $X(p)$ та реакції на неї $Y(p)$ з урахуванням нульових та ненульових початкових умов:

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \left[ p^k Y(p) - \sum_{v=0}^{k-1} p^v \, y^{(k-v-1)}(0_+) \right] = \sum_{s=0}^{m} b_s \left[ p^s X(p) - \sum_{\tau=0}^{s-1} p^\tau \, x^{(k-\tau-1)}(0_+) \right]. \tag{2}$$

Звідки і отримуємо дробово-раціональну функцію операторного зображення методичної похибки у разі ігнорування ненульових за умовою задачі Коші початкових умов

$$\Delta Y(p) = \frac{\sum_{k=0}^{n} \sum_{v=0}^{k-1} a_k y^{(k-v-1)}(0_+) \, p^v}{\sum_{k=0}^{n} a_k p^k} - \frac{\sum_{s=0}^{m} \sum_{\tau=0}^{s-1} b_s \, x^{(k-\tau-1)}(0_+) \, p^\tau}{\sum_{k=0}^{n} a_k p^k}. \tag{3}$$

Позначивши поліноміальні функції

$$\left.\begin{aligned} M(p) &= \sum_{k=0}^{n} a_k p^k; \\ N_y(p) &= \sum_{k=0}^{n} \sum_{v=0}^{k-1} a_k y^{(k-v-1)}(0_+) \, p^v; \\ N_x(p) &= \sum_{s=0}^{m} \sum_{\tau=0}^{s-1} b_s \, x^{(k-\tau-1)}(0_+) \, p^\tau, \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

остаточно маємо

$$\Delta Y(p) = \frac{N_y(p)}{M(p)} - \frac{N_x(p)}{M(p)}, \tag{5}$$

Припустимо, що функція $\Delta Y(p)$ з-поміж $n$ полюсів, які є коренями рівняння

$$M(p) = \sum_{k=0}^{n} a_k p^k = 0, \tag{6}$$

має $q$ дійсних та комплексно-спряжених простих полюсів $\{p_1; p_2; \ldots; p_q\}$, а також і декілька кратних полюсів різного ступеня кратності, а саме:

- $p_r$ полюсів кратності $r$;
- $p_z$ полюсів кратності $z$;
- $p_w$ полюсів кратності $w$,

де $q + r + z + w = n$.

Часова математична форма методичної похибки

$$\Delta y(t) = y(t) - y^*(t) \tag{7}$$

є функцією-оригіналом дробово-раціональної функції (3). Відповідно до зворотного інтегрального перетворення Лапласа маємо

$$\Delta y(t)=\frac{1}{2\pi j}\int\limits_{\zeta-j\infty}^{\zeta+j\infty}\Delta Y(p)e^{pt}\,dp. \tag{8}$$

Інтеграл (8), де інтегрування по комплексній частоті $p$ здійснюється вздовж розташованої в комплексній площині нескінченної прямої, еквівалентно замінимо інтегруванням по замкнутому контуру, який охоплює всі $n=q+r+z+w$ полюсів функції $\Delta Y(p)$, і відповідно перейдемо до контурного інтегралу

$$\Delta y(t)=\frac{1}{2\pi j}\int\limits_{\zeta-j\infty}^{\zeta+j\infty}\Delta Y(p)e^{pt}\,dp=\frac{1}{2\pi j}\oint\limits_{L}\Delta Y(p)e^{pt}\,dp. \tag{9}$$

Оскільки лишок функції в деякому її полюсі – це величина, на яку змінюється поділений на $2\pi j$ контурний інтеграл (9), коли контур інтегрування $L$ під час його стягування перетинає зазначений полюс, то замінимо операцію інтегрування операцією додавання по скінченній множині лишків функції $\Delta Y(p)$ в її полюсах:

$$\Delta y(t)=\frac{1}{2\pi j}\int\limits_{\zeta-j\infty}^{\zeta+j\infty}\Delta Y(p)e^{pt}\,dp=\frac{1}{2\pi j}\oint\limits_{L}\Delta Y(p)e^{pt}\,dp=\sum\text{Res}\,\Delta Y(p)e^{pt}, \tag{10}$$

що і є змістом теореми про розкладання в теоретичній електротехніці.

В простих полюсах лишки визначаються як

$$\text{Res}\,\Delta Y(p)e^{pt}=\frac{N(p_q)}{M'(p_q)}e^{p_q t}, \tag{11}$$

а у кратних кратності $w$ –

$$\text{Res}\,\Delta Y(p)e^{pt}=\frac{1}{(w-1)!}\,\frac{d^{w-1}}{d\,p^{w-1}}\cdot\left[\frac{N(p)(p-p_w)^w e^{pt}}{M(p)}\right]_{p=p_w}. \tag{12}$$

Отже, функцію-оригінал $\Delta y(t)$ методичної похибки отримуємо, урахувавши співвідношення (3-6) та (10-12)

$$\begin{aligned}\Delta y(t)=&\sum_{i=1}^{q}\frac{N_y(p_i)}{M'(p_i)}e^{p_i t}-\sum_{i=1}^{q}\frac{N_x(p_i)}{M'(p_i)}e^{p_i t}+\\&+\frac{1}{(r-1)!}\,\frac{d^{r-1}}{d\,p^{r-1}}\cdot\left[\frac{N_y(p)(p-p_r)^r e^{pt}}{M(p)}\right]_{p=p_r}-\frac{1}{(r-1)!}\,\frac{d^{r-1}}{d\,p^{r-1}}\cdot\left[\frac{N_x(p)(p-p_r)^r e^{pt}}{M(p)}\right]_{p=p_r}+\cdots,\end{aligned} \tag{13}$$

або

$$\begin{aligned}\Delta y(t)=&\sum_{i=1}^{q}\frac{\sum\limits_{k=0}^{n}\sum\limits_{v=0}^{k-1}a_k y^{(k-v-1)}(0_+)\,p_i^v}{\sum\limits_{k=1}^{n}k\,a_k p_i^{k-1}}e^{p_i t}-\sum_{i=1}^{q}\frac{\sum\limits_{s=0}^{m}\sum\limits_{\tau=0}^{s-1}b_s x^{(k-\tau-1)}(0_+)\,p_i^\tau}{\sum\limits_{k=1}^{n}k\,a_k p_i^{k-1}}e^{p_i t}+\\&+\frac{1}{(r-1)!}\,\frac{d^{r-1}}{d\,p^{r-1}}\left[\frac{(p-p_r)^r e^{pt}\sum\limits_{k=0}^{n}\sum\limits_{v=0}^{k-1}a_k y^{(k-v-1)}(0_+)\,p^v}{\sum\limits_{k=0}^{n}a_k p^k}\right]_{p=p_r}-\\&-\frac{1}{(r-1)!}\,\frac{d^{r-1}}{d\,p^{r-1}}\left[\frac{(p-p_r)^r e^{pt}\sum\limits_{s=0}^{m}\sum\limits_{\tau=0}^{s-1}b_s x^{(k-\tau-1)}(0_+)\,p^\tau}{\sum\limits_{k=0}^{n}a_k p^k}\right]_{p=p_r}+\cdots.\end{aligned} \tag{14}$$

**Висновки**

В роботі проведено математичну ідентифікацію фізичних процесів, що спостерігаються під час еволюції стаціонарного електричного кола за нульових та ненульових початкових умов в фундаментальній задачі Коші.

На підставі отриманої за інтегральним перетворенням Лапласа дробово-раціональної функції зображення методичної похибки, що з'являється в розв'язку диференціального рівняння у разі штучної тривіалізації ненульових за умовою задачі початкових умов, за наявності не тільки простих, але і кратних полюсів довільної кратності, визначено в часовій математичній формі і саму функцію-оригінал.

Отримані результати створюють математичне підґрунтя для корегування відомих методів аналізу перехідних процесів як в стаціонарних електричних колах, так і в динамічних системах іншої фізичної природи.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Теоретичні основи електротехніки: підручник / В. С. Бойко, В. В. Бойко. – К.: ІВЦ "Політехніка", 2004. – 272 с.

2. Математичні методи ідентифікації динамічних систем : навчальний посібник / Б. І. Мокін, В. Б. Мокін, О. Б. Мокін. – Вінниця : ВНТУ, 2010. – 263 с.

3. ТОЕ. Перехідні процеси в лінійних колах. Синтез лінійних кіл. Електричні та магнітні нелінійні кола: підручник / Ю. О. Карпов, Ю. Г. Ведміцький, В. В. Кухарчук, С. Ш. Кацив, за ред. проф. Ю. О. Карпова. – Херсон : ОЛДІ-ПЛЮС, 2019. – 456 с.

4. Теорія автоматичного керування : підручник / М. Г. Попович, О. В. Ковальчук. – К. : Либідь, 2007. – 657 с.

5. ТОЕ. Електромагнітне поле : підручник / Ю. О. Карпов, Ю. Г. Ведміцький, В. В. Кухарчук. – Херсон : ОЛДІ-ПЛЮС, 2014. – 392 с.

6. ТОЕ. Усталені режими лінійних електричних кіл із зосередженими та розподіленими параметрами : підручник / Ю. О. Карпов, С. Ш. Кацив, В. В. Кухарчук, Ю. Г. Ведміцький ; під ред. проф. Ю. О. Карпова – Вінниця : ВНТУ, 2011. – 377 с.

7. Ведміцький Ю. Г. Тектологія динамічних систем і явище гіперсилової взаємодії в структурних рівняннях узагальненого електричного кола / Ю. Г. Ведміцький // Наукові праці Вінницького національного технічного університету. – 2018. – №2. – С. 1-11.

8. Ведміцький Ю. Г. Узагальнення рівнянь Лагранжа та Лагранжа-Максвелла для консервативних динамічних систем з урахуванням дії надінерційних та субпотенціальних сил : препринт / Ю. Г. Ведміцький / Zenodo. 2026. DOI: https://doi.org/10.5281/zenodo.19333411

9. Ведміцький Ю. Г. Інтерактивність дисипативних сил в функціях розсіювання Релея та узагальнені рівняння Лагранжа і Лагранжа-Максвелла для дисипативних динамічних систем з довільним ступенем вільності : препринт / Ю. Г. Ведміцький / Zenodo. 2026. DOI: https://doi.org/10.5281/zenodo.19334526

ІНФОРМАЦІЯ ПРО АВТОРА

**Юрій Григорович Ведміцький** — кандидат технічних наук, доцент, доцент кафедри комп'ютеризованих електромеханічних систем і комплексів, Вінницький національний технічний університет, м. Вінниця, Україна.

**Yurii Hryhorovych Vedmitskyi** — Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Associate Professor of the Department of Computerized Electromechanical Systems and Complexes, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia, Ukraine.

Email: vedmiczkyi.y.g@vntu.edu.ua; wjg4224@gmail.com