

РОЗРОБКА АЛГОРИТМУ ВИЗНАЧЕННЯ ПЛОЩІ БАГАТОКУТНИКА З ДОВІЛЬНИМ НАБОРОМ ВЕРШИН

Вінницький національний технічний університет

Анотація

Запропоновано метод знаходження площі багатокутника, заданого координатами його вершин. Використано формулу Гаусса, яка дозволяє обчислювати площу за допомогою сумування добутків координат вершин. Додатково досліджено сортування точок у правильному порядку за допомогою обчислення центру мас і кутів відносно нього.

Ключові слова: площа багатокутника, формула Гаусса, координати вектора, арктангенс, центр мас.

Abstract

A method for finding the area of a polygon given the coordinates of its vertices is proposed. The Gauss formula is used, which allows calculating the area by summing the products of the vertex coordinates. Additionally, the sorting of points in the correct order by calculating the center of mass and angles relative to it is investigated.

Keywords: area of a polygon, Gauss' formula, vector coordinates, arctangent, center of mass.

Вступ

Обчислення площі багатокутника є важливою задачею в геометрії та комп'ютерній графіці. Вона має широке застосування, зокрема у геоінформаційних системах, обчислювальній геометрії та аналізі зображень. При обробці множини точок, що задають багатокутник, необхідно правильно визначити порядок їх обходу та застосувати ефективний алгоритм для обчислення площі. У цій роботі розглядається метод, заснований на формулі Гаусса та понятті арктангенса для визначення коректної послідовності вершин досліджуваного багатокутника.

Основна частина

Для початку сформуємо алгоритм рішення задачі знаходження площі багатокутника про випадковому введенні користувачем координат вершин даного багатогранника. Цей алгоритм зображено на рис. 1.

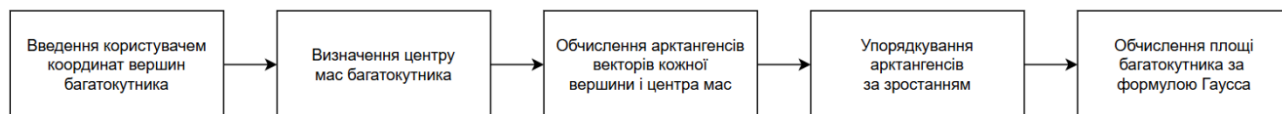


Рис. 1 Алгоритм обчислення площі багатокутника

З рис. 1 видно, що наступним кроком після введення координат вершин є визначення центру мас багатокутника. Це зробити дуже просто: знайти середнє арифметичне координат кожної з вершин багатокутника:

$$O(x; y) = \left(\frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}, \frac{\sum_{i=1}^n y_i}{n} \right), \quad (1)$$

де $O(x; y)$ – центр мас багатокутника, n – кількість вершин багатокутника, (x_i, y_i) – координати i -тої вершини багатокутника.

Ця формула дає точку, відносно якої можна порівнювати інші точки та визначати їхній порядок у контурі багатокутника.

Далі знайдемо координати векторів, проведених з центра мас багатокутника до кожної його вершини. Координати вектора обчислюються за формулою:

$$\overrightarrow{OA}(x; y) = (x_A - x_O; y_A - y_O), \quad (2)$$

де $\overrightarrow{OA}(x; y)$ – шуканий вектор, O – центр мас багатокутника, A – вершина багатокутника, (x_O, y_O) – координати центра мас багатокутника, (x_A, y_A) – координати вершини вектора.

Наступним кроком є обчислення кута між вектором, що з'єднує вершину з центром мас, і віссю Ox . Це можна зробити, знайшовши арктангенс [1]. Однак його значення залежать від квадранта, в якому знаходиться вектор, тому обчислення потребує додаткової корекції, а саме:

$$\arctg \overrightarrow{OA} = \begin{cases} \arctg\left(\frac{y}{x}\right), & x > 0 \\ \arctg\left(\frac{y}{x}\right) + \pi, & y \geq 0, x < 0 \\ \arctg\left(\frac{y}{x}\right) - \pi, & y < 0, x < 0, \\ \frac{\pi}{2}, & y > 0, x = 0 \\ -\frac{\pi}{2}, & y < 0, x = 0 \\ \emptyset, & y = 0, x = 0 \end{cases}, \quad (3)$$

де $\overrightarrow{OA}$ – вектор від центра мас до вершини багатокутника, (x, y) – координати цього вектора.

Тепер, коли ми знаємо кут кожного вектора, можемо їх відсортувати зручним для нас способом [2], наприклад методом бульбашки.

Сортування бульбашкою (bubble sort) — це один із найпростіших алгоритмів сортування, який працює шляхом багаторазового порівняння сусідніх елементів у списку та їх обміну, якщо вони стоять у неправильному порядку. Процес повторюється, поки весь список не стане відсортованим. Основна ідея методу полягає в поступовому "спливанні" найбільшого (або найменшого) елемента в кінець (або початок) масиву за кожну ітерацію. Незважаючи на свою простоту, алгоритм має низьку ефективність (часова складність $O(n^2)$) і рідко використовується для великих наборів даних, але може бути корисним для навчальних цілей або невеликих впорядкованих списків, як у нашому випадку.

Відсортувавши кути векторів за зростанням, завжди отримуватимемо перший вектор у III чверті координатної площини і останній вектор у II чверті. Таким чином маємо коректно впорядковані вершини багатокутника проти часової стрілки. Таке впорядкування необхідне тому, що формула Гаусса, яку буде використано для знаходження площі багатокутника, дає недостовірний результат.

Власне сама формула Гаусса (також відома як "формула шнурків") використовується для обчислення площі багатокутника за координатами його вершин [3]. Вона базується на розбитті багатокутника на трикутники з опорою на координатні осі з початком у центрі мас багатокутника та обчисленні площі через визначник матриці. Для багатокутника з вершинами $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$, розташованими впорядковано (за чи проти годинникової стрілки), площа обчислюється за формулою:

$$S = \frac{1}{2} |\sum_{i=1}^n (x_i y_{i+1} - x_{i+1} y_i)|, \quad (4)$$

де S – площа багатокутника, (x_i, y_i) – координати i -тої вершини багатокутника, (x_{i+1}, y_{i+1}) – координати наступної вершини багатокутника, а $(x_{n+1}, y_{n+1}) = (x_1, y_1)$ – перший вектор дублюється в кінці для замикання контуру багатокутника.

Ця формула є ефективною, оскільки не потребує розбиття на трикутники вручну, а лише використовує послідовне перемноження координат. До того ж, якщо впорядкувати вершини проти годинникової стрілки, що ми і робимо за допомогою арктангенсів векторів, модуль у формулі (4) не обов'язковий.

Висновки

Запропонований метод дозволяє ефективно та коректно обчислювати площу багатокутника, заданого довільним набором точок. Використання центру мас і сортування точок гарантує правильний обхід контуру, що є критично важливим для застосування формули Гауса. Завдяки обчисленню кутів між точками та центром мас, алгоритм визначає коректний порядок обходу навіть для початково невідсортованих точок, запобігаючи отриманню неправильних результатів. Подальші дослідження можуть бути спрямовані на оптимізацію швидкодії алгоритму шляхом використання більш ефективних методів сортування та розпаралелювання обчислень. Також можливо інтегрувати алгоритм у сучасні програмні засоби для автоматичного аналізу та обробки геометричних даних.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Учасники проєктів Вікімедіа. Обернені тригонометричні функції – Вікіпедія [Електронний ресурс] Режим доступу: https://uk.wikipedia.org/wiki/Обернені_тригонометричні_функції.
2. Андрій Денисенко. Повний гайд з алгоритмів сортування на Java для новачків [Електронний ресурс] Режим доступу: <https://robotdreams.cc/uk/blog/378-povniy-gayd-z-algoritmiv-sortuvannya-na-java-dlya-novachkiy>.
3. Учасники проєктів Вікімедіа. Формула площі Гаусса – Вікіпедія [Електронний ресурс] Режим доступу: https://uk.wikipedia.org/wiki/Формула_площі_Гаусса.

Бузиновська Софія Русланівна – студентка групи ІКІ-23б, факультет інформаційних технологій та комп'ютерної інженерії, Вінницький національний технічний університет, м. Вінниця, e-mail: sophiabuzynovska@gmail.com

Науковий керівник: **Добровольська Наталія Вікторівна** – доцент кафедри обчислювальної техніки, Вінницький національний технічний університет, м. Вінниця, e-mail: dobr_n_v@vntu.edu.ua

Buzynovska Sofiia R. – student, 1CE-23b, Faculty of Information Technologies and Computer Engineering, Vinnytsia National Technical University, email: sophiabuzynovska@gmail.com

Supervisor: **Dobrovolska Natalia Viktorivna** – Associate Professor at the Department of Computer Engineering, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia, Ukraine, email: dobr_n_v@vntu.edu.ua