Методичні вказівки
до виконання лабораторних робіт з дисципліни «Економетрія»



Міністерство освіти і науки України
Вінницький національний технічний університет

Методичні вказівки
до виконання лабораторних робіт
з дисципліни «Економетрія»

Вінниця
ВНТУ
2024

Рекомендовано до видання Радою з якості освіти Вінницького національного технічного університету Міністерства освіти і науки України (протокол № 5 від 19.12.2024 р.)

Рецензенти:
Н. В. Буреннікова, доктор економічних наук, професор
Л. М. Ткачук, кандидат економічних наук, доцент

Методичні вказівки до виконання лабораторних робіт з дисципліни «Економетрія» [Електронний ресурс] / уклад.: А. О. Азарова. – Вінниця : ВНТУ, 2024. – 57 с.

Методичні вказівки присвячено виконанню лабораторного курсу з економетричного моделювання, що посідає чільне місце у системі підготовки спеціалістів нового покоління. Запропоновані автором завдання до лабораторних робіт дозволяють здобувачам моделювати різноманітні аспекти господарської діяльності на мікро-, мезо- та макроекономічному рівні, засновуючись на сучасних методах економетричного аналізу, що використовуються для дослідження реальних господарських суб'єктів і управлінських процесів. Цей матеріал охоплює весь лабораторний курс із дисципліни «Економетрія» для здобувачів (денної та заочної форм), які навчаються за спеціальностями 073 «Менеджмент», 075 «Маркетинг», 051 «Економіка», 076 «Підприємництво та торгівля».

ЗМІСТ

Лабораторна робота 1..... 4
Лабораторна робота 2..... 10
Лабораторна робота 3..... 19
Лабораторна робота 4..... 25
Лабораторна робота 5..... 36
Лабораторна робота 6..... 47
СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ..... 56

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА 1

ВИЯВЛЕННЯ ПРОБЛЕМ ТА ОБҐРУНТУВАННЯ УПРАВЛІНСЬКИХ РІШЕНЬ ЗАСОБАМИ ЛІНІЙНОЇ АЛГЕБРИ. РОЗРАХУНОК ВИТРАТ НА ВИРОБНИЦТВО З ВИКОРИСТАННЯМ АПАРАТУ МАТРИЧНОЇ АЛГЕБРИ

Мета: вивчення базових понять матричної алгебри для оцінювання різних видів витрат на підприємстві

Визначник шукають лише для квадратної матриці.

Визначником матриці ***n*-го порядку (*n* ≥ 3)** називається сума добутків елементів першого рядку та їх алгебраїчних доповнень:

$$|D| = d_{11}D_{11} + d_{12}D_{12} + ... + d_{1n}D_{1n},$$

де D_{ij} – алгебраїчне доповнення елемента d_{ij}, $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,n}$,

$$D_{ij} = (-1)^{(i+j)} \cdot M_{ij},$$

де M_{ij} – мінор елемента d_{ij}, $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,n}$.

Мінором M_{ij} елемента d_{ij} матриці **D** *n*-го порядку є визначник матриці (*n*-1)-го порядку, яка отримується шляхом вилучення *i*-го рядку та *j*-го стовпця.

Теорема розкладання для визначника матриць *n*-го порядку (*n* ≥ 3). Сума добутків елементів будь-якого рядку (стовпця) та їх алгебраїчних доповнень дорівнює визначнику матриці.

Теорема анулювання для визначника матриць *n*-го порядку (*n* ≥ 3). Сума добутків елементів деякого рядку (стовпця) та алгебраїчних доповнень елементів іншого рядку (стовпця) дорівнює **0**.

Обернена матриця

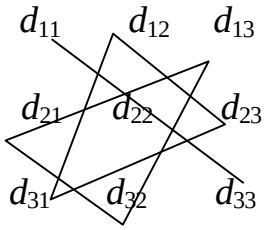
Обернену матрицю шукають лише для квадратної матриці.

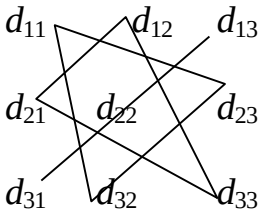
Теорема про існуванні та обчислення оберненої матриці. Якщо визначник квадратної матриці **D** не дорівнює **0**, тобто $|\mathbf{D}| \neq 0$, то існує обернена до неї матриця $\mathbf{D}^{-1}$, яка обчислюється за формулою:

$$\mathbf{D}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{D}|} \begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} & \cdot & D_{1n} \\ D_{21} & D_{22} & \cdot & D_{2n} \\ \cdot & \cdot & & \\ D_{n1} & D_{n2} & \cdot & D_{nn} \end{pmatrix}^{\mathrm{T}},$$

де D_{ij} – алгебраїчне доповнення елемента d_{ij}, $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,n}$.

Визначник матриці **3-го порядку** шукають за методом трикутника:





$$|D|_{3\times3} = (d_{11}\cdot d_{22}\cdot d_{33} + d_{21}\cdot d_{13}\cdot d_{32} + d_{12}\cdot d_{23}\cdot d_{31}) - \\ - (d_{13}\cdot d_{22}\cdot d_{31} + d_{21}\cdot d_{12}\cdot d_{33} + d_{11}\cdot d_{23}\cdot d_{32})$$

Задача 1

Для підприємства, що складається з 3-х цехів, за допомогою матриці прямих1 витрат – ***A*** та матриці кількості випуску товарної продукції ***Y*** кожного виду визначити:

- коефіцієнт повних виробничих витрат (**B**);
- коефіцієнт внутрішніх витрат (**C**);
- коефіцієнт непрямих витрат (**C'**);
- валові витрати на продукцію кожного цеха (**X**).

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0{,}3 & 0 & 0{,}1 \\ 0 & 0{,}4 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \textbf{I}\ цех \\ \textbf{II}\ цех \\ \textbf{III}\ цех \end{matrix} \qquad \mathbf{Y} = \begin{pmatrix} 10 \\ 15 \\ 10 \end{pmatrix} \begin{matrix} \textbf{1}\ вид \\ \textbf{2}\ вид \\ \textbf{3}\ вид \end{matrix}$$

1 вид **2** **3** вид

Розв'язок:

- **B** – коефіцієнт повних виробничих витрат: $\mathbf{B} = (\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} = \mathbf{D}^{-1}$
- **C** – коефіцієнт внутрішніх витрат: **C** = **B** - **E**;
- **C'** – коефіцієнт непрямих витрат: **C'** = **C** - **A**;
- **X** - витрати на валову продукцію: **X** = **B** ·**Y**. $(m\cdot p)\times(p\cdot n) = (m\cdot n)$

1. *Визначимо коефіцієнт повних виробничих витрат **B**:*

---

1 За способом обчислення на окремі різновиди продукції витрати поділяються на прямі й непрямі.

Прямі витрати безпосередньо пов'язані з виготовленням певного різновиду продукції і можуть бути обчислені на її одиницю прямо. Якщо виготовляється один різновид продукції, усі витрати — прямі.

Непрямі витрати не можна безпосередньо обчислити на окремі різновиди продукції, бо вони пов'язані з виготовленням різних виробів (***зарплата обслуговуючого і управлінського персоналу, утримання і експлуатація будов, споруд, машин***). Зростання частки прямих витрат у загальній сумі підвищує точність обчислення собівартості одиниці продукції, зміцнює економічні основи управління.

а) $\mathbf{E}-\mathbf{A}=\mathbf{D}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0,3&0&0,1\\0&0,4&0,2\\0,1&0,1&0,2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0,7&0&-0,1\\0&0,6&-0,2\\-0,1&-0,1&0,8\end{pmatrix}$;

б) $\mathrm{B}=(\mathrm{E}-\mathrm{A})^{-1}=\mathrm{D}^{-1}=\begin{pmatrix}0,7&0&-0,1\\0&0,6&-0,2\\-0,1&-0,1&0,8\end{pmatrix}^{-1}$

$$|\mathrm{D}|=\begin{vmatrix}0,7&0&-0,1\\0&0,6&-0,2\\-0,1&-0,1&0,8\end{vmatrix}=0,7\cdot(-1)^2\begin{vmatrix}0,6&-0,2\\-0,1&0,8\end{vmatrix}+0\cdot(-1)^3\begin{vmatrix}0&-0,2\\-0,1&0,8\end{vmatrix}-$$

$$-0,1\cdot(-1)^4\begin{vmatrix}0&0,6\\-0,1&-0,1\end{vmatrix}=0,7[0,6\cdot0,8-(-0,1)\cdot(-0,2)]+0-0,1\cdot[0\cdot(-0,1)-$$

$$-(-0,1)\cdot0,6]=0,7(0,48-0,02)-0,1\cdot0,06=0,316$$

- $D_{11}=0,46$
- $D_{12}=-\begin{vmatrix}0&-0,2\\-0,1&0,8\end{vmatrix}=0,02$
- $D_{13}=0,06$
- $D_{21}=-\begin{vmatrix}0&-0,1\\-0,1&0,8\end{vmatrix}=0,01$
- $D_{22}=\begin{vmatrix}0,7&-0,1\\-0,1&0,8\end{vmatrix}=0,55$
- $D_{23}=-\begin{vmatrix}0,7&0\\-0,1&-0,1\end{vmatrix}=0,07$;
- $D_{31}=\begin{vmatrix}0&-0,1\\0,6&-0,2\end{vmatrix}=0,06$;
- $D_{32}=-\begin{vmatrix}0,7&-0,1\\0&-0,2\end{vmatrix}=0,14$;
- $D_{33}=\begin{vmatrix}0,7&0\\0&0,6\end{vmatrix}=0,42$;

$$\mathbf{B}=(\mathbf{E}-\mathbf{A})^{-1}=\frac{1}{0,316}\begin{pmatrix}0,46&0,02&0,06\\0,01&0,55&0,07\\0,06&0,14&0,42\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}=$$

$$\frac{1}{0,316}\begin{pmatrix}0,46&0,01&0,06\\0,02&0,55&0,14\\0,06&0,07&0,42\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1,4600&0,0317&0,1899\\0,0633&1,7405&0,4430\\0,1899&0,2215&1,329\end{pmatrix};$$

2. *Визначимо коефіцієнт внутрішніх витрат* **C**:

$$\mathbf{C} = \mathbf{B} - \mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1{,}4600 & 0{,}0317 & 0{,}1899 \\ 0{,}0633 & 1{,}7405 & 0{,}4430 \\ 0{,}1899 & 0{,}2215 & 1{,}329 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 0{,}460 & 0{,}0317 & 0{,}1899 \\ 0{,}0633 & 0{,}7405 & 0{,}443 \\ 0{,}1899 & 0{,}2215 & 0{,}329 \end{pmatrix}.$$

3. *Визначимо коефіцієнт непрямих витрат* **C**':

$$\mathbf{C'} = \mathbf{C} - \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0{,}460 & 0{,}0317 & 0{,}1899 \\ 0{,}063 & 0{,}7405 & 0{,}443 \\ 0{,}1899 & 0{,}2215 & 0{,}329 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0{,}3 & 0 & 0{,}1 \\ 0 & 0{,}4 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0{,}160 & 0{,}0317 & 0{,}0899 \\ 0{,}063 & 0{,}3405 & 0{,}243 \\ 0{,}0899 & 0{,}1215 & 0{,}129 \end{pmatrix}.$$

4. *Визначимо витрати на валову продукцію*: $\mathbf{X} = \mathbf{B}_{(3\times3)} \cdot \mathbf{Y}_{(3\times1)}$:

$$\begin{pmatrix} 1{,}4600 & 0{,}0317 & 0{,}1899 \\ 0{,}0633 & 1{,}7405 & 0{,}4430 \\ 0{,}1899 & 0{,}2215 & 1{,}329 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 15 \\ 10 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1{,}4600 \cdot 10 + 0{,}0317 \cdot 15 + 0{,}1899 \cdot 10 \\ 0{,}0633 \cdot 10 + 1{,}7405 \cdot 15 + 0{,}4430 \cdot 10 \\ 0{,}1899 \cdot 10 + 0{,}2215 \cdot 15 + 1{,}3290 \cdot 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 \\ 31 \\ 18{,}6 \end{pmatrix}.$$

Індивідуальні завдання для розрахунку витрат на виробництво

Для підприємства, що складається з 3-х цехів, за допомогою матриці прямих витрат – *A* та матриці кількості випуску товарної продукції *Y* кожного виду визначити (за поданим нижче своїм варіантом):

- коефіцієнт повних виробничих витрат (B);
- коефіцієнт внутрішніх витрат (C);
- коефіцієнт непрямих витрат (C');
- валові витрати на продукцію кожного цеха (X).

Варіант 1:

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 0{,}1 & 0 & 0{,}2 \\ 0{,}3 & 0{,}1 & 0{,}2 \\ 0 & 0{,}2 & 0{,}3 \end{pmatrix};\quad \mathbf{Y}=\begin{pmatrix} 80 \\ 32 \\ 19 \end{pmatrix}.$$

Варіант 2:

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 0{,}2 & 0 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}1 & 0 \\ 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}3 \end{pmatrix};\quad \mathbf{Y}=\begin{pmatrix} 15 \\ 10 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Варіант 3:

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 0{,}3 & 0 & 0{,}1 \\ 0 & 0{,}4 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}2 \end{pmatrix};\quad \mathrm{Y}=\begin{pmatrix} 10 \\ 15 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

Варіант 4:

$$\mathrm{A}=\begin{pmatrix} 0{,}4 & 0 & 0{,}1 \\ 0 & 0{,}4 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}2 \end{pmatrix};\quad \mathrm{Y}=\begin{pmatrix} 15 \\ 15 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

Варіант 5:

$$\mathrm{A}=\begin{pmatrix} 0{,}5 & 0 & 0{,}1 \\ 0 & 0{,}4 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}2 \end{pmatrix};\quad \mathrm{Y}=\begin{pmatrix} 12 \\ 15 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

Варіант 6:

$$\mathrm{A}=\begin{pmatrix} 0{,}6 & 0 & 0{,}1 \\ 0 & 0{,}4 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}2 \end{pmatrix};\quad \mathrm{Y}=\begin{pmatrix} 13 \\ 15 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

Варіант 7:

$$\mathrm{A}=\begin{pmatrix} 0{,}7 & 0 & 0{,}1 \\ 0 & 0{,}4 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}2 \end{pmatrix};\quad \mathrm{Y}=\begin{pmatrix} 16 \\ 15 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

Варіант 8:

$$\mathrm{A}=\begin{pmatrix} 0{,}8 & 0 & 0{,}1 \\ 0 & 0{,}4 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}2 \end{pmatrix};\quad \mathrm{Y}=\begin{pmatrix} 17 \\ 15 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

Варіант 9:

$$\mathrm{A}=\begin{pmatrix} 0{,}9 & 0 & 0{,}1 \\ 0 & 0{,}4 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}2 \end{pmatrix};\quad \mathrm{Y}=\begin{pmatrix} 11 \\ 15 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

Варіант 10:

$$\mathrm{A}=\begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}1 \\ 0 & 0{,}4 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}2 \end{pmatrix};\quad \mathrm{Y}=\begin{pmatrix} 12 \\ 12 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

Варіант 11:

$$\mathrm{A}=\begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}6 & 0{,}1 \\ 0 & 0{,}4 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}2 \end{pmatrix};\quad \mathrm{Y}=\begin{pmatrix} 9 \\ 15 \\ 11 \end{pmatrix}.$$

Варіант 12:

$$\mathrm{A}=\begin{pmatrix} 0{,}9 & 0{,}2 & 0{,}1 \\ 0 & 0{,}4 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}2 \end{pmatrix};\quad \mathrm{Y}=\begin{pmatrix} 14 \\ 16 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

Варіант 13:

$$\mathrm{A}=\begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}1 \\ 0{,}7 & 0{,}4 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}2 \end{pmatrix};\quad \mathrm{Y}=\begin{pmatrix} 5 \\ 12 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

Варіант 14:

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 0{,}3 & 0 & 0{,}1 \\ 0 & 0{,}4 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}2 \end{pmatrix};\quad \mathrm{Y}=\begin{pmatrix} 10 \\ 16 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

Варіант 15:

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 0{,}3 & 0 & 0{,}1 \\ 0 & 0{,}4 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}2 \end{pmatrix};\ \mathrm{Y}=\begin{pmatrix} 9 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

Варіант 16:

$$\mathrm{A}=\begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}4 & 0{,}1 \\ 0{,}9 & 0{,}4 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{Y}=\begin{pmatrix} 12 \\ 13 \\ 17 \end{pmatrix}.$$

Варіант 17:

$$\mathrm{A}=\begin{pmatrix} 0{,}9 & 0{,}9 & 0{,}5 \\ 0{,}7 & 0{,}4 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}2 \end{pmatrix};\ \mathrm{Y}=\begin{pmatrix} 13 \\ 17 \\ 10 \end{pmatrix}$$

.

Варіант 18:

$$\mathrm{A}=\begin{pmatrix} 0{,}9 & 0{,}8 & 0{,}1 \\ 0 & 0{,}4 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}2 \end{pmatrix};\ \mathrm{Y}=\begin{pmatrix} 12 \\ 18 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

Варіант 19:

$$\mathrm{A}=\begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}7 & 0{,}1 \\ 0{,}9 & 0{,}4 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}2 \end{pmatrix};\ \mathrm{Y}=\begin{pmatrix} 14 \\ 13 \\ 12 \end{pmatrix}$$

.

Варіант 20:

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 0{,}3 & 0 & 0{,}1 \\ 0 & 0{,}4 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}2 \end{pmatrix};\ \mathbf{Y}=\begin{pmatrix} 10 \\ 15 \\ 10 \end{pmatrix}$$

.

Варіант 21:

$$\mathrm{A}=\begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}5 & 0{,}1 \\ 0{,}3 & 0{,}4 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}2 \end{pmatrix};\ \mathrm{Y}=\begin{pmatrix} 19 \\ 18 \\ 15 \end{pmatrix}$$

.

Варіант 22:

$$\mathrm{A}=\begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}2 & 0{,}1 \\ 0{,}8 & 0{,}4 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}2 \end{pmatrix}\ \mathrm{Y}=\begin{pmatrix} 30 \\ 25 \\ 40 \end{pmatrix}$$

.

Варіант 23:

$$\mathrm{A}=\begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}5 & 0{,}1 \\ 0{,}9 & 0{,}4 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}2 \end{pmatrix};\ \mathrm{Y}=\begin{pmatrix} 40 \\ 25 \\ 30 \end{pmatrix}$$

.

Варіант 24:

$$\mathrm{A}=\begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}3 & 0{,}1 \\ 0{,}9 & 0{,}4 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}2 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{Y}=\begin{pmatrix} 70 \\ 55 \\ 80 \end{pmatrix}.$$

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА 2

ВИЗНАЧЕННЯ СОБІВАРТОСТІ ОДИНИЦІ ПРОДУКЦІЇ ЗАСОБАМИ МАТРИЧНОЇ АЛГЕБРИ ТА ОЦІНЮВАННЯ ФАКТОРІВ ВПЛИВУ ЗОВНІШНЬОГО ТА ВНУТРІШНЬОГО СЕРЕДОВИЩ НА ЇЇ ФОРМУВАННЯ

Мета: вивчення базових методів матричної алгебри, зокрема, Крамера, Жордана-Гауса та Гауса для оцінювання собівартості одиниці продукції на підприємстві та факторів впливу зовнішнього та внутрішнього середовищ на її формування.

Розглянемо систему *n* лінійних рівнянь з *n* невідомими виду:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2; \\ \vdots \quad \vdots \quad \cdots \quad \vdots \quad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases}, \qquad (2.1)$$

де a_{ij} – це коефіцієнти при невідомих $x_1 \ldots x_n$, $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,n}$; $b_1 \ldots b_n$ – вільні члени.

Складемо матрицю **A** з коефіцієнтів при невідомих та матрицю-стовпець **B** вільних членів і матрицю-стовпець **X** невідомих таким чином:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}; \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}; \qquad \mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

1. Розглянемо метод Крамера для розв'язку системи (2.1).

Теорема Крамера. Нехай Δ – визначник матриці **A**, а Δ_j – визначник матриці, яка отримується з матриці **A** шляхом заміни *j*-го стовпця стовпцем вільних членів **B**. Тоді система (2.1) має єдиний розв'язок:

$$\mathbf{X} = \frac{\Delta_j}{\Delta}, \ \Delta \neq 0, \ j = \overline{1,n}. \qquad (2.2)$$

2. Розглянемо методи Гауса та Жордана-Гауса (методи виключення невідомих) для розв'язку системи (2.1).

Метод Гауса базується на елементарних перетвореннях системи (2.1):

- рівняння можна змінювати місцями;
- множити рівняння на одне й те саме число, що не є нулем;
- до одного рівняння додавати інше рівняння, яке було помножене на деяке число, та записувати замість початкового.

Виконуючи такі перетворення, отримаємо нову систему, що дорівнює початковій (2.1). Замість того, щоб здійснювати перетворення над системою (2.1), їх здійснюються над розширеною матрицею цієї системи:

$$\mathbf{(A, B)} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdot & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdot & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdot & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdot & a_{nn} & b_n \end{pmatrix}.$$

Елементарні перетворення над системою (2.1) будуть відповідно перетворенням над рядками розширеної матриці цієї системи. При розв'язуванні системи лінійних рівнянь методом Гауса та Жордана-Гауса застосовується ***схема одиничного ділення***.

Схема одиничного ділення. Нехай $a_{11} \neq 0$, тоді перший рядок розширеної матриці ділимо на a_{11}. Виключаємо невідоме x_1 з інших $(n\text{-}1)$ рядків:

$$\mathbf{(A, B)^{(1)}} = \begin{pmatrix} 1 & a^{(1)}_{12} & a^{(1)}_{13} & \cdot & a^{(1)}_{1n} & b^{(1)}_1 \\ 0 & a^{(1)}_{22} & a^{(1)}_{23} & \cdot & a^{(1)}_{2n} & b^{(1)}_2 \\ \vdots & \vdots & \cdot & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & a^{(1)}_{n2} & a^{(1)}_{n3} & \vdots & a^{(1)}_{nn} & b^{(1)}_n \end{pmatrix}.$$

Оскільки при елементарних перетвореннях системи, тобто рядків відповідної розширеної матриці, яка їй еквівалентна, визначник матриці може змінити знак (при зміні місцями рядків чи стовпців матриці) або збільшитися в одне й те ж саме число, то визначник новоутвореної системи не є нулем.

Якщо в результаті перетворень деякі рядки матриці будуть однаковими, то система є *виродженою* і не має єдиного розв'язку. Якщо однаковими є лише коефіцієнти при невідомих, а вільні члени – різними, то система не має рішень взагалі, тобто є *несумісною*.

У результаті за n кроків необхідно отримати матрицю виду:

$$(\mathbf{A},\mathbf{B})^{(n)} = \begin{pmatrix} 1 & a^{(n)}_{12} & a^{(n)}_{13} & \cdot & a^{(n)}_{1n} & b^{(n)}_{1} \\ 0 & 1 & a^{(n)}_{23} & \cdot & a^{(n)}_{2n} & b^{(n)}_{2} \\ \vdots & \vdots & \cdot & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdot & 0 & 1 & b^{(n)}_{n} \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} x_1 + a^{(n)}_{12}x_2 + a^{(n)}_{13}x_3 + a^{(n)}_{1n}x_n = b^{(n)}_{1}; \\ x_2 + a^{(n)}_{23}x_3 + a^{(n)}_{1n}x_n = b^{(n)}_{2}; \\ \vdots \quad \cdot \quad \vdots \\ x_n = b^{(n)}_{n}. \end{array} \Rightarrow \mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Таким чином, підставляючи x_n у попереднє рівняння, і, виконуючи аналогічну операцію для інших невідомих n раз, отримаємо розв'язок системи.

Задача 2

Для підприємства, що складається з чотирьох цехів, визначити собівартість кожного виду продукції при заданих матрицях виробничої програми (А) випуску чотирьох видів продукції, а також цехової собівартості (В).

$$A = \begin{pmatrix} 360 & 300 & 320 & 270 \\ 320 & 260 & 270 & 210 \\ 180 & 110 & 120 & 90 \\ 290 & 220 & 250 & 190 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 100200 \\ 84600 \\ 39600 \\ 75550 \end{bmatrix}.$$

Розв'язок:

Нехай x_1, x_2, x_3, x_4 – собівартість одиниці окремих видів продукції. Тоді математична модель буде мати вигляд:

$$\begin{cases} 360x_1 + 300x_2 + 320x_3 + 270x_4 = 100200; \\ 320x_1 + 260x_2 + 270x_3 + 210x_4 = 84600; \\ 180x_1 + 110x_2 + 120x_3 + 90x_4 = 39600; \\ 290x_1 + 220x_2 + 250x_3 + 190x_4 = 75550. \end{cases}$$

1. Застосуємо метод Крамера для розв'язку системи лінійних рівнянь.

Для цього визначимо спочатку Δ:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 360 & 300 & 320 & 270 \\ 320 & 260 & 270 & 210 \\ 180 & 110 & 120 & 90 \\ 290 & 220 & 250 & 190 \end{vmatrix} = 360 \cdot (-1)^{(1+1)} \cdot \begin{vmatrix} 260 & 270 & 210 \\ 110 & 120 & 90 \\ 220 & 250 & 190 \end{vmatrix} + 300 \cdot (-1)^{(1+2)} \cdot \begin{vmatrix} 320 & 270 & 210 \\ 180 & 120 & 90 \\ 290 & 250 & 190 \end{vmatrix} +$$

$$+ 320 \cdot (-1)^{(1+3)} \cdot \begin{vmatrix} 320 & 260 & 210 \\ 180 & 110 & 90 \\ 290 & 220 & 190 \end{vmatrix} + 270 \cdot (-1)^{(1+4)} \cdot \begin{vmatrix} 320 & 260 & 270 \\ 180 & 110 & 120 \\ 290 & 220 & 250 \end{vmatrix} = 360 \cdot \begin{vmatrix} 260 & 270 & 210 \\ 110 & 120 & 90 \\ 220 & 250 & 190 \end{vmatrix} -$$

$$- 300 \cdot \begin{vmatrix} 320 & 270 & 210 \\ 180 & 120 & 90 \\ 290 & 250 & 190 \end{vmatrix} + 320 \cdot \begin{vmatrix} 320 & 260 & 210 \\ 180 & 110 & 90 \\ 290 & 220 & 190 \end{vmatrix} - 270 \cdot \begin{vmatrix} 320 & 260 & 270 \\ 180 & 110 & 120 \\ 290 & 220 & 250 \end{vmatrix} = 4850000.$$

Оскільки $\Delta \neq 0$, то складемо і розрахуємо усі Δ_j.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 100200 & 300 & 320 & 270 \\ 84600 & 260 & 270 & 210 \\ 39600 & 110 & 120 & 90 \\ 75550 & 220 & 250 & 190 \end{vmatrix} = 100200 \cdot (-1)^2 \cdot \begin{vmatrix} 260 & 270 & 210 \\ 110 & 120 & 90 \\ 220 & 250 & 190 \end{vmatrix} + 84600 \cdot (-1)^3 \cdot$$

$$\cdot \begin{vmatrix} 300 & 320 & 270 \\ 110 & 120 & 90 \\ 220 & 250 & 190 \end{vmatrix} + 39600 \cdot (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} 300 & 320 & 270 \\ 260 & 270 & 210 \\ 220 & 250 & 190 \end{vmatrix} + 75550 \cdot (-1)^5 \cdot \begin{vmatrix} 300 & 320 & 270 \\ 260 & 270 & 210 \\ 110 & 120 & 90 \end{vmatrix} =$$

$$= 100200 \cdot \begin{vmatrix} 260 & 270 & 210 \\ 110 & 120 & 90 \\ 220 & 250 & 190 \end{vmatrix} - 84600 \cdot \begin{vmatrix} 300 & 320 & 270 \\ 110 & 120 & 90 \\ 220 & 250 & 190 \end{vmatrix} + 39600 \cdot \begin{vmatrix} 300 & 320 & 270 \\ 260 & 270 & 210 \\ 220 & 250 & 190 \end{vmatrix} -$$

$$- 75550 \cdot \begin{vmatrix} 300 & 320 & 270 \\ 260 & 270 & 210 \\ 110 & 120 & 90 \end{vmatrix} = 363750000.$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 360 & 100200 & 320 & 270 \\ 320 & 84600 & 270 & 210 \\ 180 & 39600 & 120 & 90 \\ 290 & 75550 & 250 & 190 \end{vmatrix} = 360 \cdot \begin{vmatrix} 84660 & 270 & 210 \\ 39600 & 120 & 90 \\ 75550 & 250 & 190 \end{vmatrix} - 100200 \cdot \begin{vmatrix} 320 & 270 & 210 \\ 180 & 120 & 90 \\ 290 & 250 & 190 \end{vmatrix} +$$

$$+ 320 \cdot \begin{vmatrix} 320 & 84600 & 210 \\ 180 & 39600 & 90 \\ 290 & 75550 & 190 \end{vmatrix} - 270 \cdot \begin{vmatrix} 320 & 84600 & 270 \\ 180 & 39600 & 120 \\ 290 & 75550 & 250 \end{vmatrix} = 360 \cdot 4905000 - 100200 \cdot 51000 +$$

$$+ 320 \cdot (2407680000 + 2208060000 + 2855790000 - 2411640000 - 2893320000 -$$

$$- 2175840000) - 270 \cdot (3168000000 + 3671730000 + 2944080000 - 3100680000 -$$

$$- 3807000000 - 2901120000) = 360 \cdot 4905000 - 100200 \cdot 51000 + 320 \cdot (-927000) - 270 \cdot$$

$$\cdot (-24990000) = 436500000.$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 360 & 300 & 100200 & 270 \\ 320 & 260 & 84600 & 210 \\ 180 & 110 & 39600 & 90 \\ 290 & 220 & 75550 & 190 \end{vmatrix} = 360 \cdot \begin{vmatrix} 260 & 84600 & 210 \\ 110 & 39600 & 90 \\ 220 & 75550 & 190 \end{vmatrix} - 300 \cdot \begin{vmatrix} 320 & 84600 & 210 \\ 180 & 39600 & 90 \\ 290 & 75550 & 190 \end{vmatrix} +$$

$$+ 100200 \cdot \begin{vmatrix} 320 & 260 & 210 \\ 180 & 110 & 90 \\ 290 & 220 & 190 \end{vmatrix} - 270 \cdot \begin{vmatrix} 320 & 260 & 84660 \\ 180 & 110 & 39600 \\ 290 & 220 & 75550 \end{vmatrix} = 360 \cdot (1956240000 + 1675080000 +$$

$$+ 1745205000 - 1829520000 - 1768140000 - 1767870000) - 300 \cdot (-9270000) + 100200 \cdot$$

$$(-137000) - 270 \cdot (2659360000 + 2985840000 + 3350160000 - 2698740000 - 3535740000 -$$

$$- 2787840000) = 360 \cdot 10995000 + 2781000000 - 13727400000 - 270 \cdot (-26960000) =$$

$$= 3958200000 + 2781000000 - 13727400000 + 7279200000 = 291000000.$$

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 360 & 300 & 320 & 100200 \\ 320 & 260 & 270 & 84600 \\ 180 & 110 & 120 & 39600 \\ 290 & 220 & 250 & 75550 \end{vmatrix} = 360 \cdot \begin{vmatrix} 260 & 270 & 84600 \\ 110 & 120 & 39600 \\ 220 & 250 & 75550 \end{vmatrix} - 300 \cdot \begin{vmatrix} 320 & 270 & 84600 \\ 180 & 120 & 39600 \\ 290 & 250 & 75550 \end{vmatrix} +$$

$$+ 320 \cdot \begin{vmatrix} 320 & 260 & 84660 \\ 180 & 110 & 39600 \\ 290 & 220 & 75550 \end{vmatrix} - 100200 \cdot \begin{vmatrix} 320 & 260 & 270 \\ 180 & 110 & 120 \\ 290 & 220 & 250 \end{vmatrix} = 360 \cdot (2357160000 + 2352240000 +$$

$$+ 2326500000 - 2233440000 - 2574000000 - 2243835000) - 300 \cdot 24990000 + 320 \cdot$$

$$(-26960000) - 100200 \cdot (-221000) = 360 \cdot (-15375000) - 7497000000 - 8627200000 +$$

$$+ 22144200000 = 485000000.$$

Отже, підставляючи отримані Δ та Δ_j у вираз (2.2), отримаємо:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{363750000}{4850000} = 75;$$

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 75 \\ 90 \\ 60 \\ 100 \end{pmatrix}$$

$$x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{436500000}{4850000} = 90;$$

$$x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{291000000}{4850000} = 60;$$

$$x_4 = \frac{\Delta_4}{\Delta} = \frac{485000000}{4850000} = 100.$$

2. Застосуємо методи Гауса та Жордана-Гауса для розв'язку складеної системи лінійних рівнянь.

Нехай x_1, x_2, x_3 – собівартість одиниці окремих видів продукції. Тоді математична модель задачі 2 для 3 цехів набуде вигляду:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 11; \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 = 12; \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 17. \end{cases}$$

Приклад розв'язування системи методом Гауса:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 11 \\ 3 & 3 & 1 & 12 \\ 4 & 3 & 2 & 17 \end{pmatrix} \overset{(-3)(-2)(:2)}{\approx} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 1 & \frac{11}{2} \\ 0 & \frac{3}{2} & -2 & -\frac{9}{2} \\ 0 & 1 & -2 & -5 \end{pmatrix} \overset{(-2/3)(:3/2)}{\approx} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 1 & \frac{11}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{4}{3} & -3 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{3} & -2 \end{pmatrix} \overset{(:-2/3)}{\approx}$$

$$\approx \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 1 & \frac{11}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{4}{3} & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + \frac{1}{2}x_2 + x_3 = \frac{11}{2}; \\ x_2 - \frac{4}{3}x_3 = -3; \\ x_3 = 3. \end{cases} \Rightarrow \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Метод Жордана-Гауса є аналогічним методу Гауса, лише на другому кроці виключаємо невідоме x_2 з усіх рівнянь, тобто і з першого рівняння також.

В результаті n кроків необхідно отримати матрицю виду:

$$(\mathbf{A},\mathbf{B})^{(n)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & b^{(n)}{}_1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & b^{(n)}{}_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & b^{(n)}{}_n \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} x_1 = b^{(n)}{}_1; \\ x_2 = b^{(n)}{}_2; \\ \vdots \\ x_n = b^{(n)}{}_n. \end{array} \Rightarrow \mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Індивідуальні завдання для розрахунку витрат на виробництво

Для підприємства, що складається з трьох цехів, визначити собівартість кожного виду продукції (за власним варіантом) при заданих матрицях виробничої програми (А) випуску трьох видів продукції, а також цехової собівартості (В).

Варіант 1:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 7 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 14 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Y} = \begin{bmatrix} 19 \\ 36 \\ 23 \end{bmatrix}.$$

Варіант 2:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 7 & 6 & 1 \\ 1 & 1 & 6 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Y} = \begin{bmatrix} 33 \\ 37 \\ 35 \end{bmatrix}.$$

Варіант 3:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 7 & 9 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Y} = \begin{bmatrix} 47 \\ 62 \\ 35 \end{bmatrix}.$$

Варіант 4:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 7 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Y} = \begin{bmatrix} 49 \\ 72 \\ 26 \end{bmatrix}.$$

Варіант 5:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 8 \\ 7 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 13 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Y} = \begin{bmatrix} 23 \\ 70 \\ 24 \end{bmatrix}.$$

Варіант 6:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 9 & 2 & 3 \\ 7 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Y} = \begin{bmatrix} 95 \\ 66 \\ 41 \end{bmatrix}.$$

Варіант 7:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 8 & 3 & 9 \\ 1 & 7 & 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Y} = \begin{bmatrix} 33 \\ 106 \\ 40 \end{bmatrix}.$$

Варіант 8:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 7 & 5 & 1 \\ 1 & 4 & 11 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Y} = \begin{bmatrix} 28 \\ 48 \\ 46 \end{bmatrix}.$$

Варіант 9:

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}7 & 2 & 13\\ 7 & 8 & 1\\ 1 & 7 & 4\end{bmatrix},\qquad \mathbf{Y}=\begin{bmatrix}56\\ 68\\ 37\end{bmatrix}.$$

Варіант 10:

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}11 & 2 & 8\\ 7 & 6 & 7\\ 5 & 11 & 1\end{bmatrix},\qquad \mathbf{Y}=\begin{bmatrix}99\\ 81\\ 70\end{bmatrix}.$$

Варіант 11:

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}8 & 2 & 5\\ 7 & 7 & 9\\ 8 & 3 & 11\end{bmatrix},\qquad \mathbf{Y}=\begin{bmatrix}87\\ 128\\ 102\end{bmatrix}.$$

Варіант 12:

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}7 & 3 & 5\\ 5 & 9 & 1\\ 2 & 1 & 9\end{bmatrix},\qquad \mathbf{Y}=\begin{bmatrix}110\\ 88\\ 85\end{bmatrix}.$$

Варіант 13:

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}21 & 2 & 4\\ 7 & 3 & 1\\ 1 & 5 & 17\end{bmatrix},\qquad \mathbf{Y}=\begin{bmatrix}163\\ 68\\ 54\end{bmatrix}.$$

Варіант 14:

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}8 & 2 & 7\\ 11 & 3 & 1\\ 1 & 2 & 3\end{bmatrix},\qquad \mathbf{Y}=\begin{bmatrix}71\\ 72\\ 17\end{bmatrix}.$$

Варіант 15:

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1 & 11 & 2\\ 12 & 4 & 7\\ 7 & 1 & 9\end{bmatrix},\qquad \mathbf{Y}=\begin{bmatrix}85\\ 133\\ 104\end{bmatrix}.$$

Варіант 16:

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}8 & 2 & 3\\ 7 & 8 & 5\\ 1 & 2 & 3\end{bmatrix},\qquad \mathbf{Y}=\begin{bmatrix}55\\ 110\\ 34\end{bmatrix}.$$

Варіант 17:

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}22 & 3 & 5\\ 7 & 11 & 1\\ 3 & 1 & 7\end{bmatrix},\qquad \mathbf{Y}=\begin{bmatrix}109\\ 40\\ 66\end{bmatrix}.$$

Варіант 18:

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}3 & 2 & 3\\ 7 & 5 & 1\\ 1 & 3 & 8\end{bmatrix},\qquad \mathbf{Y}=\begin{bmatrix}43\\ 79\\ 61\end{bmatrix}.$$

Варіант 19:

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}7 & 5 & 3\\ 7 & 3 & 6\\ 1 & 2 & 11\end{bmatrix},\qquad \mathbf{Y}=\begin{bmatrix}67\\ 78\\ 65\end{bmatrix}.$$

Варіант 20:

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}9 & 2 & 3\\ 7 & 11 & 1\\ 1 & 14 & 13\end{bmatrix},\qquad \mathbf{Y}=\begin{bmatrix}99\\ 154\\ 211\end{bmatrix}.$$

Варіант 21:

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1 & 3 & 8\\ 19 & 9 & 1\\ 2 & 5 & 5\end{bmatrix},\qquad \mathbf{Y}=\begin{bmatrix}39\\ 41\\ 32\end{bmatrix}.$$

Варіант 22:

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}3 & 4 & 5\\ 7 & 5 & 1\\ 1 & 6 & 9\end{bmatrix},\qquad \mathbf{Y}=\begin{bmatrix}50\\ 67\\ 66\end{bmatrix}.$$

Варіант 23:

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1 & 15 & 3\\ 9 & 13 & 1\\ 1 & 11 & 18\end{bmatrix},\qquad \mathbf{Y}=\begin{bmatrix}32\\ 36\\ 103\end{bmatrix}.$$

Варіант 24:

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1 & 5 & 3\\ 7 & 17 & 12\\ 2 & 1 & 13\end{bmatrix},\qquad \mathbf{Y}=\begin{bmatrix}35\\ 146\\ 101\end{bmatrix}.$$

Варіант 25:

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}9 & 1 & 1\\ 5 & 3 & 9\\ 7 & 2 & 3\end{bmatrix},\qquad \mathbf{Y}=\begin{bmatrix}60\\ 106\\ 71\end{bmatrix}.$$

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА 3

ЗАСТОСУВАННЯ КОРЕЛЯЦІЙНО-РЕГРЕСІЙНИХ МЕТОДІВ В ОРГАНІЗАЦІЙНОМУ ПРОЄКТУВАННІ. ОДНОФАКТОРНИЙ КОРЕЛЯЦІЙНИЙ АНАЛІЗ. ПРОСТА ЛІНІЙНА РЕГРЕСІЯ

Мета: вивчення базових понять кореляційного аналізу для побудови лінійних економічних однофакторних кореляційно-регресійних моделей на вітчизняних підприємствах.

Проста вибіркова лінійна регресія записується так:

$$y = \hat{y} + e; \tag{3.1}$$

$$\hat{y} = b_0 + b_1 x; \tag{3.2}$$

$$y = b_0 + b_1 x + e_i, \tag{3.3}$$

де y – вектор спостереження за змінною $y = \{y_1,..., y_n\}$;
x – вектор спостережень за факторною ознакою $x = \{x_1,..., x_n\}$;
e – вектор помилок $e = \{e_1,..., e_n\}$;
b_0 та b_1 – невідомі параметри регресійної моделі.

Для оцінки невідомих параметрів лінійної регресії $\hat{y} = b_0 + b_1 x_i$ використовують такі залежності для b_1 та b_0:

$$b_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \sum_{i=1}^{n} y_i}{n}}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2} \tag{3.4}$$

$$b_1 = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)\cdot\left(y_i - \bar{y}\right)}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)^2} \tag{3.5}$$

$$b_1 = \frac{\mathrm{cov}(x,y)}{\mathrm{var}(x)}; \tag{3.6}$$

$$b_0 = \bar{y} - b_1 \bar{x} \tag{3.7}$$

Задача 3.1

У табл. 3.1 наведено умовні дані спостережень витрат на відпустку залежно від кількості членів родини. Накресліть графік регресійної залежності витрат на відпустку від кількості членів родини.

Таблиця 3.1

Кількість (x) членів родини	Витрати (y) на відпустку, ум.гр.од.
1	16
2	12
2	23
4	19
6	30
$\bar{x}=3$	$\bar{y}=20$

Розв'язок:

Для того, щоб встановити залежність витрат на відпустку від розмірів родини, припустимо, що ця залежність описується лінійно, тобто її можна розглядати, як просту лінійну регресію (3.1).

Встановимо її невідомі параметри за вищенаведеними формулами (3.4) – (3.7). Для розрахунку b_1 нам потрібно визначити проміжні дані, які занесемо до кореляційної табл. 3.2:

Таблиця 3.2

№	x_i	y_i	$x_i \cdot y_i$	x_i^2	$\hat{y}_i$	$e_i = y_i - \hat{y}_i$
1	1	16	16	1	14,74	1,26
2	2	12	24	4	17,37	-5,37
3	2	23	46	4	17,37	5,63
4	4	19	76	16	22,63	-3,63
5	6	30	180	36	27,89	2,11
Σ	**15**	**100**	**342**	**61**	**100**	**0**

$$b_1 = \frac{342 - 15 \cdot 100/5}{61 - 225/5} = \frac{42}{61 - 45} \approx 2{,}63$$

$$b_0 = \bar{y} - b_1 \bar{x} = 100/5 - 2.63 \times 15/5 = 20 - 2{,}63 \times 3 = 12.11$$

Підставимо визначені оцінки параметрів до рівняння (3.2) і отримаємо:

$$\hat{y}_i = 12{,}11 + 2{,}63 \cdot x_i$$

Підставимо по черзі в отримане оцінене рівняння значення x_i для

розрахунку відповідного значення $\hat{y}_i$ (стовп. 6, табл. 3.2).

Отже, таке рівняння для кожного значення x_i дає значення $\hat{y}_i$ та e_i. Сума оцінених значень $\sum_{i=1}^{5} \hat{y}_i$ дорівнює сумі фактичних значень $\sum_{i=1}^{5} y_i$, а отже, згідно (3.1) сума помилок $\sum_{i=1}^{5} e_i = 0$, що є обов'язковою умовою МНК.

Зобразимо розраховані у табл. 3.2 відхилення e_i на рис. 3.1.

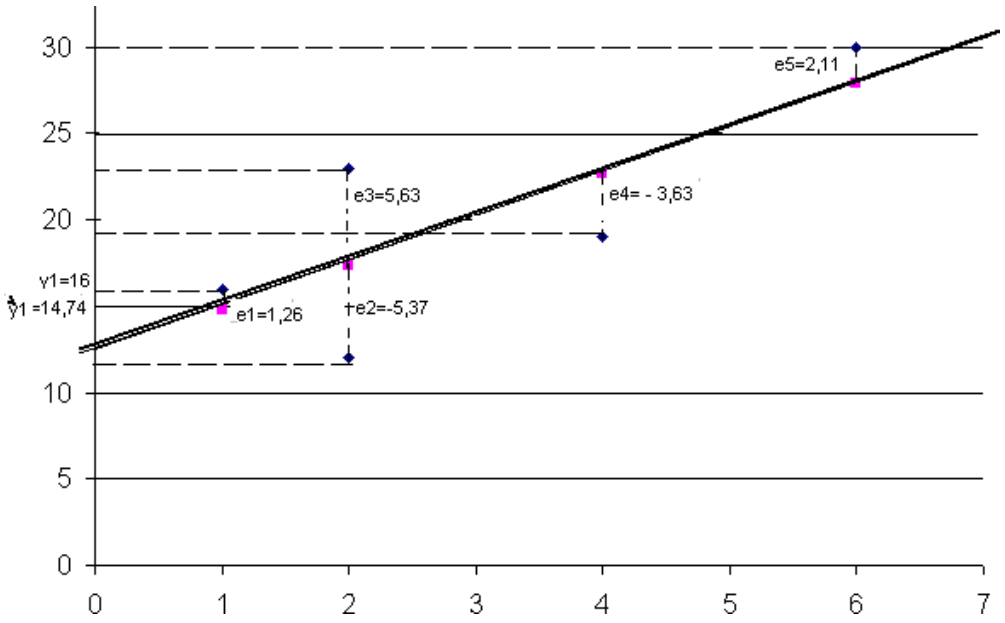


Рисунок 3.1 – Залежність витрат (*y*) на відпустку від кількості (*x*) членів родини

Задача 3.2

Припустимо, що ви збираєте дані про споживання (*y*) домашніх господарств в Україні та їх доходи (*x*) і оцінюєте це таким рівнянням:

$$\hat{y} = 120 + 0{,}75x.$$

а) Яка змінна є залежною, а яка незалежною?

б) Поясніть взаємозв'язок між споживанням і доходом. На скільки зросте споживання, якщо дохід зросте на 1?

Розв'язок:

а) оскільки споживання залежить від доходу, то споживання є залежною, а дохід – незалежною змінною;

б) дане рівняння свідчить про те, що споживання складається з двох частин. Перша частина представлена перетином b_0=120, що означає, розмір споживання C=120 при відсутності доходу (*y*). Друга частина складається з

0,75y, тобто зростання доходу (y) на одиницю зумовить зростання споживання на 0,75 (на b_1 – граничну схильність до споживання).

Індивідуальні завдання для побудови простої лінійної регресійної моделі

У табл. згідно Вашого варіанту наведено умовні дані спостережень витрат на відпустку залежно від кількості членів родини. Оцініть невідомі параметри b_0, b_1 такої лінійної регресійної залежності та накресліть її графік, позначивши на ньому відхилення (помилки e_i).

Варіант 1:

x	y
0,1	1,6
0,2	1,2
0,2	2,3
0,4	1,9
0,6	3,0

Варіант 2:

x	y
2	32
4	24
4	46
8	38
12	60

Варіант 3:

x	y
3	48
6	36
6	69
12	57
18	90

Варіант 4:

x	y
4	64
8	48
8	92
16	76
24	120

Варіант 5:

x	y
5	80
10	60
10	115
20	95
30	150

Варіант 6:

x	y
6	96
12	72
12	138
24	114
36	180

Варіант 7:

x	y
0,3	4,8
0,6	3,6
0,6	6,9
1,2	5,7
1,8	9,0

Варіант 8:

x	y
0,4	6,4
0,8	4,8
0,8	9,2
1,6	7,6
2,4	12

Варіант 9:

x	*y*
3	48
6	36
6	69
12	57
18	90

Варіант 10:

x	*y*
0,3	4,8
0,6	3,6
0,6	6,9
1,2	5,7
1,8	9

Варіант 11:

x	*y*
1,1	16,1
2,1	12,1
2,1	23,1
4,1	19,1
6,1	30,1

Варіант 12:

x	*y*
1,5	16,5
2,5	12,5
2,5	23,5
4,5	19,5
6,5	30,5

Варіант 13:

x	*y*
1,4	16,4
2,4	12,4
2,4	23,4
4,4	19,4
6,4	30,4

Варіант 14:

x	*y*
1,7	16,7
2,7	12,7
2,7	23,7
4,7	19,7
6,7	30,7

Варіант 15:

x	*y*
0,1	1,6
0,2	1,2
0,2	2,3
0,4	1,9
0,6	3,0

Варіант 16:

x	*y*
0,2	3,2
0,4	2,4
0,4	4,6
0,8	3,8
1,2	6

Варіант 17:

x	*y*
3	4,8
6	3,6
6	6,9
12	5,7
18	9

Варіант 18:

x	*y*
4	6,4
8	4,8
8	9,2
16	7,6
24	12

Варіант 19:

x	*y*
0,5	8,0
1	6,0
1	11,5
2	9,5
3	15,0

Варіант 20:

x	*y*
0,6	9,6
1,2	7,2
1,2	13,8
2,4	11,4
3,6	18

Варіант 21:

x	*y*
0,6	7,0
1,1	6,0
1	11,5
2	9,5
3	15,0

Варіант 22:

x	*y*
0,7	9,9
1,3	7,2
1,2	13,8
2,4	11,4
3,6	18

Варіант 23:

x	*y*
0,4	8,5
1	6,0
1,2	11,5
2	9,5
3	15,0

Варіант 24:

x	*y*
0,3	9,0
1,0	7,2
1,2	13,8
2,4	11,4
3,6	18

Варіант 25:

x	*y*
0,45	8,5
1,2	6,0
1	11,0
2	9,5
3	15,0

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА 4

ДОСЛІДЖЕННЯ ПРОЦЕСІВ ОЦІНЮВАННЯ ЩІЛЬНОСТІ ЗВ'ЯЗКУ МІЖ ПОКАЗНИКАМИ ОДНОФАКТОРНОЇ КОРЕЛЯЦІЙНОЇ МОДЕЛІ. АЛГОРИТМ ПЕРЕВІРКИ ПОБУДОВАНОЇ ЛІНІЙНОЇ РЕГРЕСІЙНОЇ МОДЕЛІ НА АДЕКВАТНІСТЬ

Мета: вивчення базових понять кореляційного аналізу для перевірки якості побудованих лінійних економічних однофакторних кореляційно-регресійних моделей на вітчизняних підприємствах.

Теоретичні відомості

Щільність зв'язку між ознаками оцінюють за допомогою **коефіцієнта кореляції** r (або R), який обчислюється за формулами (4.1) – для лінійних залежностей, а також (4.2) – для лінійних та нелінійних залежностей:

$$r = \frac{\mathrm{cov}(x, y)}{\sqrt{\mathrm{var}(x)} \cdot \sqrt{\mathrm{var}(y)}}, \qquad (4.1)$$

де $\mathrm{cov}(x, y)$ – коефіцієнт коваріації (абсолютна міра лінійного зв'язку між двома величинами) визначається за формулою:

$$\mathrm{cov}(x, y) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)\cdot\left(y_i - \bar{y}\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \bar{x}\cdot\bar{y},$$

$\mathrm{var}(x)$ – дисперсія величини x: $\mathrm{var}(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\bar{x}\right)^2$;

$\mathrm{var}(y)$ – дисперсія величини y: $\mathrm{var}(y) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i^2 - \left(\bar{y}\right)^2$.

$$r = \pm\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(\hat{y}_i - \bar{y})^2}{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2}} = \pm\sqrt{D} = \pm\sqrt{\frac{SSR}{SST}}, \qquad (4.2)$$

де $\hat{y}_i$ – оцінене значення y_i;

$\bar{y}$ – середнє значення y_i;

y_i – емпіричні (дослідні) значення ознаки Y

(знак «–» у формулі ставиться для зворотного зв'язку між ознаками X та Y).

Властивості коефіцієнта кореляції

1. Якщо $r_{y/x}>0$, то кореляційний зв'язок прямий, при якому збільшення однієї змінної приводить до збільшення іншої змінної.

2. Якщо $r_{y/x}<0$, то кореляційний зв'язок зворотний, при якому збільшення однієї величини приводить до зменшення іншої.

3. Якщо $r_{y/x}=\pm 1$, то кореляційна залежність лінійна, тобто всі емпіричні точки лежать на прямій.

4. $r_{y/x} \in [-1,1]$.

5. Якщо $r_{y/x}=0$, то лінійний зв'язок відсутній і лінія регресії паралельна осі *Ox*.

Кореляційний зв'язок між ознаками може бути слабким і сильним (щільним). Він оцінюється за шкалою Чеддока таким чином:

$0,1 < r_{y/x} < 0,3$: слабкий;

$0,3 < r_{y/x} < 0,5$: помірний;

$0,5 < r_{y/x} < 0,7$: помітний;

$0,7 < r_{y/x} < 0,9$: щільний;

$0,9 < r_{y/x} < 1$: дуже щільний.

Перевірка адекватності побудованої регресійної моделі реальному економічному явищу (об'єктові), тобто оцінка правильності вибору форми зв'язку між двома змінними здійснюється за допомогою **коефіцієнта детермінації –** *D*. Якщо перевіряється адекватність оціненої лінійної моделі, то коефіцієнт детермінації визначає, чи справді змінна *y* лінійно залежить від змінної *x*:

$$D = \frac{SSR}{SST}, \quad D = r^2, \tag{4.3}$$

де SSR – сума квадратів, що пояснює регресію: $SSR = \sum_{i=1}^{n} (\hat{y}_i - \bar{y})^2$.

SST – загальна сума квадратів: $SST = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y})^2$.

Якщо значення коефіцієнта детермінації *D* у межах [0.55 – 1], тобто близьке до одиниці, то модель є адекватною. Якщо ж значення коефіцієнта детермінації знаходиться у межах (0 – 0,44), то модель є неадекватною. У випадку, коли $D \in [0,45–0,54]$, для перевірки правильності припущення про форму зв'язку між ознаками (адекватності моделі) застосовують *F*-критерій (критерій Фішера).

Для перевірки адекватності побудованої лінійної регресійної моделі за **критерієм Фішера** необхідно виконати таких 3 кроки:

Крок 1 Оцінити значення *F* для однофакторної регресії таким чином:

$$F_{\upsilon_1=1,\ \upsilon_2=n-2} = \frac{MSR}{MSE} = \frac{SSR/\upsilon_1}{SSE/\upsilon_2} = \frac{SSR/1}{SSE/(n-2)}, \qquad (4.4)$$

де n – кількість дослідів (аналізованих періодів) у моделі;

$\upsilon_1 = 1$ – ступінь вільності SSR (для однофакторної регресії);

$\upsilon_2 = n - 2$– ступінь вільності SSE (для однофакторної регресії);

$SSE = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \hat{y}_i)^2$.

Крок 2 Задамо рівень значимості α або $\alpha 100\%$. Наприклад, якщо ми вважаємо, що можлива помилка для нас становить 0,05 (5%), то це означає, що ми можемо помилитися не більше, ніж у 5% випадків, а у 95% =(100(1-α))% наші висновки будуть вірними.

Крок 3 На третьому етапі у статистичній таблиці *F*-розподілу Фішера зі ступенями вільності υ_1 та υ_2 і рівнем значимості (100(1-α))% знайдемо критичне значення $F_{(\alpha;\upsilon 1;\ \upsilon 2)\ табл}$.

Якщо розраховане нами значення $F_{\alpha;\upsilon 1;\upsilon 2} > F_{(\alpha;\upsilon 1;\upsilon 2)\ табл}$, то побудована регресійна модель є адекватною, якщо ні, то вона є неадекватною.

Задача 4.1

Пошивне об'єднання «Подолянка» працює на ринку шостий рік. Для підвищення ефективності своєї комерційної діяльності керівництво зацікавлене у визначенні факторів, що впливають на ціну (*y*) одиниці виробу. Одним з них, на думку менеджера, є фактор кількості (*x*) виробленої та реалізованої продукції.

Перевірити: правильність припущення менеджера (шляхом розрахунку коефіцієнта кореляції); адекватність побудованої моделі (за допомогою коефіцієнта детермінації).

Маємо такі дані роботи підприємства за 5 років:

i	y_i	x_i
1	25	5
2	30	6
3	35	9
4	45	12
5	65	18

Розв'язок:

Складемо допоміжну кореляційну таблицю для оцінювання невідомих параметрів (табл. 4.1).

Таблиця 4.1

i	y_i	x_i	y_i^2	x_i^2	$y_i\, x_i$	$\hat{y}_i$	$(y_i - \bar{y})^2$	$(\hat{y}_i - \bar{y})^2$
1	25	5	625	25	125	25	225	225
2	30	6	900	36	180	28	100	144
3	35	9	1225	81	315	37	25	9
4	45	12	2025	144	540	46	25	36
5	65	18	4225	324	1170	64	625	576
Σ	**200**	**50**	**9000**	**610**	**2330**	**200**	**1000**	**990**
Σ/n	40	10					SST	SSR

Спосіб 1

(для пошуку коефіцієнта кореляції лише в лінійних залежностях):

$$r = \frac{\operatorname{cov}(x, y)}{\sqrt{\operatorname{var}(x)} \cdot \sqrt{\operatorname{var}(y)}};$$

$$cov(x, y) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i - \bar{x} \cdot \bar{y} = \frac{2330}{5} - 400 = 66;$$

$$var(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - (\bar{x})^2 = \frac{610}{5} - 100 = 22;$$

$$var(y) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i^2 - (\bar{y})^2 = \frac{9000}{5} - 1600 = 200;$$

$$r = \frac{\operatorname{cov}(x, y)}{\sqrt{\operatorname{var}(x)} \cdot \sqrt{\operatorname{var}(y)}} = \frac{66}{66{,}3} = 0{,}995.$$

Висновок: оскільки r = 0,995, то зв'язок є дуже щільним.

Спосіб 2

(для пошуку коефіцієнта кореляції як в лінійних, так і нелінійних залежностях**)**

$$r = \pm\sqrt{D} = \pm\sqrt{\frac{SSR}{SST}} = \pm\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(\hat{y}_i - \bar{y})^2}{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2}}.$$

Для визначення $\hat{y}$ слід оцінити параметри лінійної регресії b_0 і b_1.

$$b_0 = \bar{y} - b_1 \bar{x}.$$

$$b_1 = \frac{\text{cov}(x,y)}{\text{var}(x)};$$

$$cov(x, y) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i - \bar{x} \cdot \bar{y} = \frac{2330}{5} - 400 = 66;$$

$$var(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - (\bar{x})^2 = \frac{610}{5} - 100 = 22;$$

$$b_1 = \frac{\text{cov}(x,y)}{\text{var}(x)} = \frac{66}{22} = 3;$$

$$b_0 = \bar{y} - b_1 \bar{x} = 40 - 3 \times 10 = 10.$$

$$\hat{y}_i = 10 + 3 \cdot x_i;$$

$$r = \pm \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (\hat{y}_i - \bar{y})^2}{\sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y})^2}}; \quad r = \pm\sqrt{D} = \sqrt{\frac{990}{1000}} = \sqrt{0{,}99} = 0{,}995.$$

Висновок:

1) оскільки $r = 0{,}995$, то зв'язок є щільним;

2) оскільки $D = 0{,}99$, то модель є адекватною і y залежить від x на 99%, і лише на 1% – від інших факторів, що не враховані в моделі.

Задача 4.2

Припустимо, що ви збираєте дані про річний продаж фірмою «Україна» продукції (y) і суми, які використано на наукові дослідження (x). Маємо таку статистику: $cov(x,y) = 300$; $var(y) = 125$; $var(x) = 880$; середній річний продаж $\bar{y} = 1200$.

Середня сума на наукові дослідження $\bar{x} = 895$.

Розрахувати:

1) коефіцієнт кореляції r між продажем і сумою, використаною на наукові дослідження;

2) визначте коефіцієнт детермінації D для регресії;

3) знайдіть параметри лінійної регресії b_0 та b_1.

Розв'язок:

$$1)\ r = \frac{\operatorname{cov}(x, y)}{\sqrt{\operatorname{var}(y)} \cdot \sqrt{\operatorname{var}(x)}};$$

$$r = \frac{300}{\sqrt{125} \cdot \sqrt{880}} = 0.91;$$

$$2)\ D = r^2;\ D = 0{,}91^2 = 0.82;$$

$$3)\ b_1 = \frac{\operatorname{cov}(x, y)}{\operatorname{var}(x)};$$

$$b_1 = \frac{300}{880} = 0{,}34;$$

$$b_0 = \bar{y} - b_1 \bar{x};$$

$$b_0 = 1200 - 0{,}34 \cdot 895 = 895{,}7.$$

Задача 4.3

За наведеними даними таблиці побудувати лінійну регресійну залежність і перевірити її на адекватність (тобто правильність вибору лінійного зв'язку між x та y, та правильність розрахунку параметрів b_0 та b_1).

i	y_i	x_i
1	1	4
2	2	6
3	3	5
4	5	3
5	6	9
6	8	10

Розв'язок:

1. Проста лінійна регресійна залежність має вигляд $\hat{y}_\iota = b_0 + b_1 \cdot x_i$. Невідомими є параметри b_0 та b_1, визначимо їх згідно (3.4) і (3.7). Отже, для оцінювання невідомих сум складемо кореляційну табл. 4.2

Таблиця 4.2

i	y_i	x_i	x_i^2	$x_i y_i$	$y^{\blacksquare}_i$	$(y_i - \bar{y})^2$	$(\hat{y}_\iota - \bar{y})^2$
1	1	4	16	4	2,7253219	10,0277778	2,0774748
2	2	6	36	12	4,0557940	4,6944444	0,0122928
3	3	5	25	15	3,3905579	1,3611111	0,6023448
4	5	3	9	15	2,0600858	0,6944444	4,4376828
5	6	9	81	54	6,0515021	3,3611111	3,5526048
6	8	10	100	80	6,7167382	14,6944444	6,5028648
Σ	**25**	**37**	**267**	**180**	**25,0000000**	**34,8333333**	**17,1852647**
Σ/*n*	4,17	6,17				**SST**	**SSR**

На базі (3.4) оцінимо b_1:

$$b_1 = \frac{180 - \frac{37 \cdot 25}{6}}{267 - \frac{37^2}{6}} = 0{,}665236;$$

за залежністю (3.7) визначимо b_0:

$$b_0 = 4{,}166667 - 6{,}166667 \cdot 0{,}665236 = 0{,}064378.$$

Тоді оцінена лінійна регресійна залежність (пряма) набуває вигляду:

$$\hat{y}_i = 0{,}064378 + 0{,}665236 \cdot x_i.$$

2. Перевіримо отриману регресійну залежність на адекватність, використовуючи критерій детермінації (4.3):

$$D = \frac{SSR}{SST},$$

$$SSR = \sum_{i=1}^{n} (\hat{y}_i - \bar{y})^2. \quad SST = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y})^2 ;$$

$$D = \frac{17{,}1852647}{34{,}8333333} = 0{,}493.$$

Оскільки коефіцієнт детермінації потрапив у межі D∈[0,45–0,54), це свідчить про те, що він не дає чіткої відповіді щодо адекватності побудованої моделі і слід застосовувати інший критерій, що уможливлює отримання точної відповіді на таке питання, а саме критерій Фішера.

3. Оцінимо значення F за допомогою залежності (4.4):

$$F_{\upsilon_1 = 1,\ \upsilon_2 = n-2} = \frac{MSR}{MSE} = \frac{SSR/\upsilon_1}{SSE/\upsilon_2} = \frac{SSR/1}{SSE/(n-2)},$$

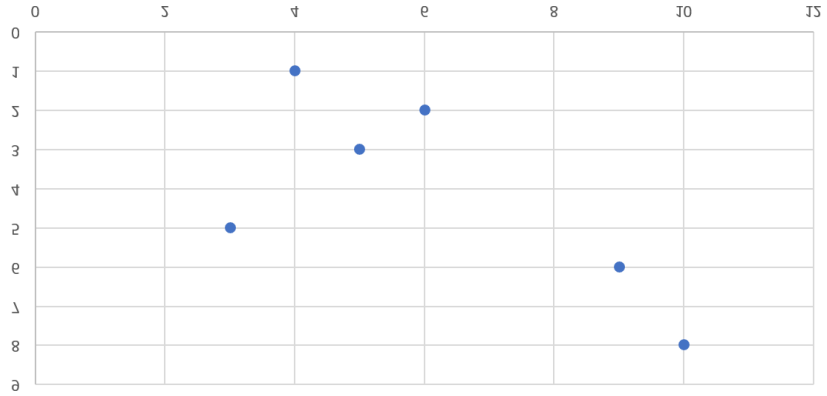
$$F_{1;4} = \frac{SSR/1}{\frac{(SST - SSR)}{4}};$$

$$F_{1;4} = \frac{17{,}1852647}{(34{,}8333333333 - 17{,}1852647)/4} = \frac{17{,}1852647}{4{,}41201717} = 3{,}895.$$

За таблицею *F*-розподілу знаходимо критичні значення *Fтабл.* зі ступенями вільності відповідно 1 та 4 (6 - 2 = 4), задавши попередньо рівень довіри 95% або рівень значимості (помилки) – 5%. Це буде точка *F*(1;4;0,95)табл. = 7,71.

Отже, розраховане значення *F*1;4 = 3,895 є меншим за табличне значення *F*(1;4;0,95)табл. = 7,71, що дозволяє зробити висновок про неадекватність побудованої лінійної регресійної моделі.

Розглянемо графік такої залежності, який також чітко ілюструє відсутність лінійної регресії.



Задача 4.4

Припустимо, що в регресії з 30-ма дослідженнями *SSE*=75 та *SST*=156. Використайте *F*-тест (критерій Фішера) для перевірки 95%-го рівня значимості регресії (адекватності моделі).

Розв'язок:

1. Оскільки SST = SSR + SSE, то оцінимо *F* за допомогою залежності (4.4) так:

$$F_{\upsilon 1;\upsilon 2} = \frac{MSR}{MSE} = \frac{SSR/1}{SSE/(n-2)} = \frac{(SST - SSE)/1}{SSE/(n-2)}.$$

Для нашої однофакторної регресії: $\upsilon_1 = 1$; $\upsilon_2 = n$ - 2 = 30 - 2 = 28,

тоді $$F_{1;28} = \frac{156-75}{75/28} = \frac{81}{2{,}679} = 30{,}235.$$

За таблицею *F*-розподілу знаходимо критичні значення $F_{кр}$ зі ступенями вільності відповідно 1 та 28 (30 - 2 = 28), задавши попередньо рівень довіри 95% або рівень значимості (помилки) – 5%. Це буде $F_{(1;28;0,95)}$ = 4,2. Отже, розраховане значення $F_{(1;28)}$ = 30,235 і воно є більшим за табличне

значення $F_{(1;28;0,95)табл} = 4,2$, що дозволяє зробити висновок про значимість (адекватність) лінійної регресійної моделі, на базі якої було розраховано початкові дані задачі.

Індивідуальні завдання для перевірки простої лінійної регресійної моделі на адекватність

Побудувати лінійну регресійну модель $\hat{y} = b_0 + b_1 \cdot x_i$, перевірити її на адекватність і оцінити щільність зв'язку між ознаками за даними вашого варіанту.

Варіант 1:

x	*y*
0,1	1,6
0,2	1,2
0,2	2,3
0,5	1,9
0,6	3,0

Варіант 2:

x	*y*
1	16
2	12
2	23
5	19
6	30

Варіант 3:

x	*y*
2	32
4	24
4	46
10	38
12	60

Варіант 4:

x	*y*
1,5	24
3	18
3	34,5
7,5	28,5
9	45

Варіант 5:

x	*y*
1,1	17,6
2,2	13,2
2,2	25,3
5,5	20,9
6,6	33

Варіант 6:

x	*y*
1,3	20,8
2,6	15,6
2,6	29,9
6,5	24,7
7,8	39

Варіант 7:

x	*y*
1,4	22,4
2,8	16,8
2,8	32,2
7	26,6
8,4	42

Варіант 8:

x	*y*
1,6	25,6
3,2	19,2
3,2	36,8
8	30,4
9,6	48

Варіант 9:

x	*y*
0,1	1,6
0,2	1,2
0,2	2,3
0,5	1,9
0,6	3,0

Варіант 10:

x	*y*
1	16
2	12
2	23
5	19
6	30

Варіант 11:

x	*y*
2	32
4	24
4	46
10	38
12	60

Варіант 12:

x	*y*
1,5	24
3	18
3	34,5
7,5	28,5
9	45

Варіант 13:

x	*y*
1,1	17,6
2,2	13,2
2,2	25,3
5,5	20,9
6,6	33

Варіант 14:

x	*y*
1,3	20,8
2,6	15,6
2,6	29,9
6,5	24,7
7,8	39

Варіант 15:

x	*y*
1,4	22,4
2,8	16,8
2,8	32,2
7	26,6
8,4	42

Варіант 16:

x	*y*
2,1	33,6
4,2	25,2
4,2	48,3
10,5	39,9
12,6	63

Варіант 17:

x	*y*
2,2	35,2
4,4	26,4
4,4	50,6
11	41,8
13,2	66

Варіант 18:

x	*y*
2,3	36,8
4,6	27,6
4,6	52,9
11,5	43,7
13,8	69

Варіант 19:

x	*y*
2,4	38,4
4,8	28,8
4,8	55,2
12	45,6
14,4	72

Варіант 20:

x	*y*
2,5	40
5	30
5	57,5
12,5	47,5
15	75

Варіант 21:

x	*y*
1,4	38,4
2,8	28,8
3,8	55,2
11	45,6
13,4	72

Варіант 22:

x	*y*
3,5	40
4,5	30
5	57
12,5	47
15	75

Варіант 23:

x	*y*
2	37
4	28
5	52
11	45
14	72

Варіант 24:

x	*y*
4	40
6	30
5	57
12	47
15	75

Варіант 25:

x	*y*
1,5	30
3,5	20
4,8	55
12	45
14,5	72

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА 5

АНАЛІЗ ОПТИМАЛЬНОСТІ РЕЗУЛЬТАТІВ ДІЯЛЬНОСТІ ОРГАНІЗАЦІЇ, ЗІСТАВЛЯННЯ ЇХ ІЗ ФАКТОРАМИ ВПЛИВУ ЗОВНІШНЬОГО ТА ВНУТРІШНЬОГО СЕРЕДОВИЩ ЗАСОБАМИ ЛІНІЙНОГО ТА НЕЛІНІЙНОГО КОРЕЛЯЦІЙНО-РЕГРЕСІЙНОГО МОДЕЛЮВАННЯ

Мета: вивчення базових понять кореляційного аналізу для вирішення оптимізаційних задач на вітчизняних підприємствах.

Задача 5

Є такі показники діяльності підприємства за 6 періодів: кількість виробленої та реалізованої продукції ($К$) (тис. од.), ціна одиниці продукції ($Ц_i$) (тис. гр. од.), витрати (B_i) виробництва за повною собівартістю (млн. гр. од.).

Необхідно знайти:

1) кореляційну залежність ціни ($Ц$), витрат (B) від кількості реалізованої продукції ($К$); $Ц = Ц(К)$; $B = B(К)$;

2) оцінити щільність зв'язку між відповідними ознаками та обчислити коефіцієнт детермінації, тобто перевірити адекватність моделі;

3) здійснити аналіз на оптимальність обсягу реалізації продукції за критерієм максимізації прибутку;

4) зробити ґрунтовні висновки.

Таблиця 5.1

Період	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
$К_i$	68	31	26	25	14	12
$Ц_i$	6	17	19	19	24	25
В	401	420	520	484	280	255

***Розв'язок*:**

1.1 Знайдемо тип залежності функції $\hat{Ц} = Ц(К)$:

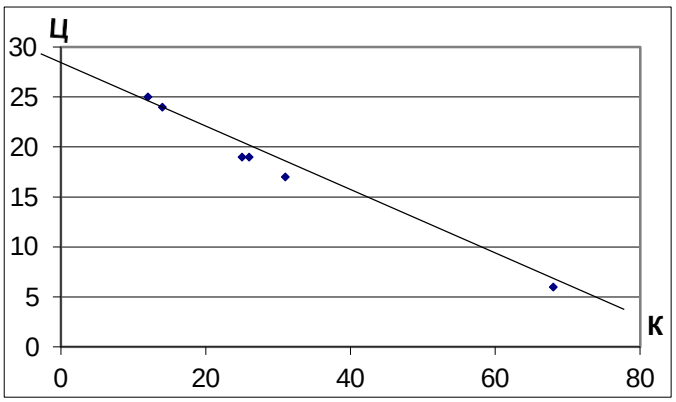


Рисунок 5.1 – Апроксимація емпіричних даних $Ц(К)$ лінійною залежністю

Виходячи з графіка рис. 5.1, залежність $\hat{Ц} = Ц(К)$ краще апроксимувати (наблизити) лінійно. Тоді вигляд лінійної однофакторної моделі є таким:

$$\hat{Ц}_i = b_0 + b_1 \cdot К_i \qquad (5.1)$$

Розрахуємо значення параметрів лінійної однофакторної моделі за нижче викладеними залежностями:

$$b_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n} К_i Ц_i - \frac{\sum_{i=1}^{n} К_i \cdot \sum_{i=1}^{n} Ц_i}{n}}{\sum_{i=1}^{n} К_i^2 - \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} К_i\right)^2}; \qquad b_0 = \overline{Ц} - b_1 \overline{К}$$

Для пошуку необхідних сум складемо відповідну кореляційну табл. 5.2.

Таблиця 5.2

№	$К_i$	$Ц_i$	$К_i^2$	$К_i Ц_i$	$\hat{Ц}_i$	$(\hat{Ц}_i - \bar{Ц})^2$	$(Ц_i - \bar{Ц})^2$
1	68	6	4626	408	5,465	165,587	152,111
2	31	17	961	527	17,779	0,308	1,778
3	26	19	676	494	19,443	1,231	0,444
4	25	19	625	475	19,775	2,08	0,444
5	14	24	196	336	23,436	26,039	32,111
6	12	25	144	300	24,102	33,275	44,444
Σ	176	110	7226	2540	110	228,519	231,333
Σ/ n	29,33	18,33					

$$b_1 = \frac{2540 - \frac{176 \cdot 110}{6}}{7226 - \frac{1}{6} \cdot 176^2} = -\,0{,}3327948;$$

$$b_0 = 18{,}33 + 0{,}3327948 \cdot 29{,}33 = 28{,}095315.$$

Підставимо отримані значення параметрів b_1 і b_0 до рівняння прямої (5.1). Тоді оцінене рівняння для залежності $\hat{Ц} = Ц(К)$ набуває вигляду (5.2):

$$\hat{Ц}_i = 28{,}095315 - 0{,}3327948 \cdot К_i. \qquad (5.2)$$

Для визначення усіх $\hat{Ц}_i$ (стовпчик 6 табл. 5.2) слід у вираз (5.2) підставити усі $К_i$ (по черзі).

2.1 Розрахуємо **коефіцієнти кореляції** між *Ц* і *К* та перевіримо побудовану модель (5.2) на адекватність за допомогою **коефіцієнта детермінації** так:

$$R = \pm\sqrt{D} = \pm\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(\hat{Ц}_i - Ц)^2}{\sum_{i=1}^{n}(Ц_i - \bar{Ц})^2}}.$$

Оскільки під час зростання ціни одиниці продукції кількість реалізованої продукції неухильно падає, то кореляція між ними є від'ємною. Отже, обираємо знак «-» перед коренем:

$$R = -\sqrt{D} = -\sqrt{\frac{SSR}{SST}} = -\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(\hat{Ц}_i - Ц)^2}{\sum_{i=1}^{n}(Ц_i - \bar{Ц})^2}}.$$

Для пошуку *SSR* і SST розрахуємо відповідні суми квадратів у 7 і 8 стовпчиках табл. 5.2.

$$R = -\sqrt{D} = -\sqrt{\frac{228{,}519}{231{,}333}} = -\sqrt{0{,}987835} = -0{,}994.$$

Виходячи із значення коефіцієнта кореляції (R = – 0,994), існує щільний негативний зв'язок між *Ц* та *К*.

Виходячи із значення коефіцієнта детермінації (D=0,987835), $D \in [0{,}55;\ 1]$, то побудована нами модель (5.2) є адекватною і змінення результативної ознаки – ціни (*Ц*) – відбувається на 98,8% за рахунок змінення факторної ознаки – кількості реалізованої продукції – (*К*) і, лише на 1,2%, – за рахунок не врахованих у моделі факторів.

1.2 Визначимо **тип залежності *В*(*К*)** за допомогою графіка точок з координатами (K_i,B_i) як зображено на рис. 6.2:

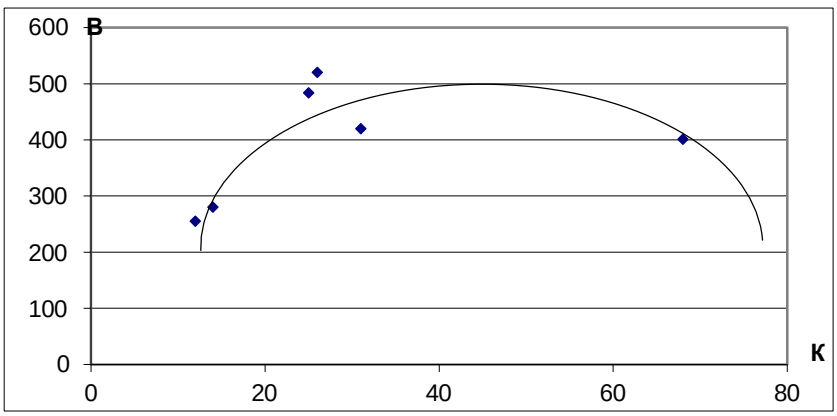


Рисунок 5.2 – Апроксимація емпіричних даних *В*(*К*) параболічною залежністю

Виходячи з графіка рис. 5.2, залежність $\hat{B}$ =*В*(*К*) краще апроксимувати

(наблизити) параболою, вигляд якої є таким:

$$\hat{B}_i = \boldsymbol{b_0} + \boldsymbol{b_1} \cdot \boldsymbol{K_i} + \boldsymbol{b_2} \cdot \boldsymbol{K_i^2}. \quad (5.3)$$

Для пошуку невідомих параметрів b_0, b_1, b_2 такої параболічної залежності скористаємося відповідною системою нормальних рівнянь:

$$\begin{cases} nb_0 + b_1 \sum_{i=1}^{n} K_i + b_2 \sum_{i=1}^{n} K_i^2 = \sum_{i=1}^{n} B_i; \\ b_0 \sum_{i=1}^{n} K_i + b_1 \sum_{i=1}^{n} K_i^2 + b_2 \sum_{i=1}^{n} K_i^3 = \sum_{i=1}^{n} K_i \cdot B_i; \\ b_0 \sum_{i=1}^{n} K_i^2 + b_1 \sum_{i=1}^{n} K_i^3 + b_2 \sum_{i=1}^{n} K_i^4 = \sum_{i=1}^{n} K_i^2 \cdot B_i. \end{cases}$$

Для розрахунку значень параметрів параболічної однофакторної моделі необхідно скласти відповідну кореляційну табл. 5.3.

Таблиця 5.3

№	B	K	K^2	K^3	K^4	$K \cdot B$	$K^2 \cdot B$	$\hat{B}_i$	$(B_i - \overline{B})^2$	$(B_i - \overline{B})^2$
1	401	68	4624	314432	21381376	27268	1854224	397,718247	19,22747	58,77778
2	420	31	961	29791	923521	13020	403620	500,250094	11431,19	711,1111
3	520	26	676	17576	456976	13520	351520	456,744459	4020,971	16044,44
4	484	25	625	15625	390625	12100	302500	446,404438	2816,542	8220,444
5	280	14	196	2744	38416	3920	54880	296,608539	9355,686	12844,44
6	255	12	144	1728	20736	3060	36720	262,271047	17177,32	19136,11
Σ	**2360**	**176**	**7226**	**381896**	**23211650**	**72888**	**3003464**	**2360**	**44820,94**	**57015,33**
Σ/n	393,33	29,33								

Розраховані у табл. 5.3 суми підставимо до вище описаної системи нормальних рівнянь і отримаємо таку систему:

$$\begin{cases} 6b_0 + 176 \cdot b_1 + 7226 \cdot b_2 = 2360; \\ 176 \cdot b_0 + 7226 \cdot b_1 + 381896 \cdot b_2 = 72888; \\ 7226 \cdot b_0 + 381896 \cdot b_1 + 23211650 \cdot b_2 = 3003464. \end{cases}$$

Розв’яжемо цю систему рівнянь і отримаємо невідомі параметри:

$b_0 = 10{,}357063;$
$b_1 = 24{,}27062;$
$b_2 = -0{,}273149.$

Підставимо отримані значення параметрів b_0, b_1, b_2 до рівняння параболи $\hat{B}_i = b_0 + b_1 \cdot K_i + b_2 \cdot K_i^2$ і отримаємо:

$$\hat{B}_i = 10{,}35706 + 24{,}27062 \cdot K_i - 0{,}273149 \cdot K_i^2. \qquad (5.4)$$

Для визначення усіх $\hat{B}_i$ (стовпчик 9 табл. 5.3) слід у вираз (5.4) підставити відповідне значення K_i (стовп. 3, табл. 5.3) і K_i^2 (стовп. 4, табл. 5.3).

2.2 Розрахуємо **коефіцієнт кореляції та детермінації** для залежності $B(K)$.

Коефіцієнт кореляції оцінюється як:

$$R = \sqrt{D} = \sqrt{\frac{SSR}{SST}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(\hat{B}_i - \bar{B})^2}{\sum_{i=1}^{n}(B_i - \bar{B})^2}}.$$

Визначення невідомих сум квадратів для *SSR* і *SST* здійснимо у стовпчиках 10 та 11 табл. 5.3.

$$R = \sqrt{\frac{44820{,}94}{57015{,}33}} = \sqrt{0{,}7861} = 0{,}8866.$$

Коефіцієнт кореляції R=0,8866 свідчить про щільний зв'язок між витратами (B) та кількістю реалізованої продукції (K).

Коефіцієнт детермінації D = 0,7861. Оскілки $D \in [0{,}55; 1]$, то побудована нами нелінійна однофакторна модель (5.3) є адекватною. Крім того, змінення результативної ознаки (B) відбувається за рахунок змінення факторної ознаки (K) на 78,6%, а на 21,4% – за рахунок інших, не врахованих у моделі факторів.

3. Знайдемо **оптимальний прибуток** за такою залежністю:

$$\hat{П}(К) = \hat{Ц}(К) \cdot К - \hat{В}(К). \qquad (5.5)$$

Підставимо у цю залежність замість $\hat{Ц}(К)$ вираз (5.2), а замість $\hat{В}(К)$ вираз (5.4) і отримаємо:

$$\hat{П}(К) = (28{,}095315 - 0{,}3327948 \cdot К) \cdot К - 10{,}357063 - 24{,}27062 \cdot К + \\ + 0{,}273149 \cdot К^2 = 3{,}8294695 \cdot К - 0{,}059851 \cdot К^2 - 10{,}357063.$$

Оскільки параметр b_2 = – 0,059851 < 0, то гілки цієї параболи направлені донизу, що свідчить про те, що дана крива має максимум[2]. Для того,

2 У разі, якщо $b_2 > 0$, гілки цієї параболи направлені догори, що свідчить про те, що дана крива не має максимуму, а має мінімум прибутку. Це означає, що дослідити таку параболу на максимум прибутку не є можливим і розрахунок закінчено.

щоб знайти максимум функції знайдемо її похідну і дорівняємо до нуля:

$$П'(К) = 3{,}8294695 - 0{,}119702 \cdot K = 0 \qquad (5.6)$$
$$K = 31{,}99169$$

Перевіримо функцію на наявність максимуму. Для цього візьмемо похідну по K виразу (6.6) у точках (K-1 = 32 – 1 = 31) та (K+1 = 32 + 1 = 33):

$$(П_{к=31})' = 0{,}1197 > 0; \qquad (П_{к=33})' = -0{,}1197 < 0.$$

Таким чином, $K = 31{,}99169 = K_{опт}$ дійсно є точкою максимум, а, отже, і оптимуму (за критерієм оптимальності – максимум прибутку).

Оцінимо шляхом підставляння у вирази (5.2) і (5.4) значення $K_{опт} = 31{,}99169$ і отримаємо:

$$\hat{Ц}_{i\text{опт}} = 28{,}095315 - 0{,}3327948 \cdot 31{,}99169 = 17{,}449 \text{ тис. гр. од. за од. прод.}$$

$$\hat{В}_{\text{опт}} = 10{,}35706 + 24{,}27062 \cdot 31{,}99169 - 0{,}273149 \cdot 31{,}99169^2 = 507{,}25589 \text{ млн. гр. од.}$$

Враховуючи, що $П_{опт} = K_{опт} \cdot \hat{Ц}_{i\text{опт}} - \hat{В}_{\text{опт}}$, визначимо на базі отриманих оптимальних значень щодо кількості реалізованих одиниць продукції $K_{опт}$, ціни одиниці продукції $\hat{Ц}_{i\text{опт}}$ та $\hat{В}_{\text{опт}}$, значення оптимального (максимального) прибутку, який спроможне отримати підприємство за умов роботи в оптимальному (описаному вище) режимі:

$$П_{опт} = 31{,}99169 \cdot 17{,}449 - 507{,}25589 = 50{,}967109 \text{ млн.гр.од.}$$

4. **Висновок.** Для порівняння показників діяльності підприємства за останній (шостий) період із запропонованими оптимальними значеннями цих характеристик складемо таку табл. 5.4:

Таблиця 5.4 – Порівняльна характеристика показників діяльності підприємства за останній період із запропонованими оптимальними значеннями

Показники	K	$Ц_i$	B	$П = K \cdot Ц_i - B$
6-й період	12	25	255	45
Оптимальне	31,99169	17,449	507,25589	50,967109
Відхилення	-19,99169	7,551	-252,25589	-5,967109

Отже:

1. Лінійна залежність $Ц = Ц(K)$ та параболічна $B = B(K)$ є гарними

наближеннями для вихідних даних щодо *Ц*, *К* та *В*, що засвідчується отриманими значеннями коефіцієнтів детермінації. Отримані залежності (5.2) і (5.4) дозволяють прогнозувати значення кількості виробленого та реалізованого продукту за наявності значень щодо ціни одиниці продукції або витрат на цей обсяг продукції за повною собівартістю. І, навпаки, маючи, заплановану оптимальну кількість продукту, що виробляється, можна визначити, виходячи з оцінених рівнянь, оптимальну ціну, яку необхідно встановити та витрати, що має встановити виробник.

2. Порівнюючи дані роботи підприємства за 6-й період із запропонованими оптимальними даними щодо кількості, ціни та витрат отримаємо: для того, щоб прибуток збільшився на 5,967109 млн. гр. од., необхідно збільшити виробництво на 19,99169 тис. од., за рахунок цього можна зменшити ціну одиниці продукції на 7,551 тис. гр. од. за одиницю продукції, а витрати – збільшити на 252,25589 млн. гр. од.

Індивідуальні завдання для розв'язку задачі 5

Є такі показники діяльності підприємства за 6 періодів: кількість виробленої та реалізованої продукції (*К*) (тис.од.), ціна одиниці продукції ($Ц_i$) (тис. гр. од.), витрати (B_i) виробництва за повною собівартістю (млн. гр. од.).

Необхідно знайти за даними таблиці, обраної згідно свого варіанту:

- кореляційну залежність ціни (*Ц*), витрат (*В*) від кількості реалізованої продукції (*К*); $Ц = Ц(К)$; $B = B(К)$;
- оцінити щільність зв'язку між відповідними ознаками та обчислити коефіцієнт детермінації, тобто перевірити адекватність моделі;
- здійснити аналіз на оптимальність обсягу реалізації продукції за критерієм максимізації прибутку;
- зробити висновки.

Варіант 1

Період	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
К	90	69	48	45	43	18
Ц	3,968	11,506	17,491	19,597	22,123	24,00
В	228	715	762	980	898	403

Варіант 2

Період	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
К	97	73	50	47	45	19
Ц	3,306	9,588	14,476	16,33	18,436	20
В	196	599	630	812	746	353

Варіант 3

Період	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
К	229	175	122	114	109	44
Ц	1,356	3,931	5,976	6,695	7,559	8,2
В	171	535	572	733	672	308

Варіант 4

Період	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
К	275	211	147	137	125	51
Ц	1,306	3,787	5,757	6,450	7,282	7,900
В	198	623	666	852	781	345

Варіант 5

Період	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
К	55	44	39	34	33	27
Ц	75	266	266	280	280	300
В	3240	7011	8989	8989	8500	7776

Варіант 6

Період	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
К	8	6	5,6	4,3	4	3
Ц	47	135	140	140	190	200
В	340	709	730	709	690	570

Варіант 7

Період	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
К	25	19	15	11	8	6
Ц	26	62	62,5	62,5	80	82
В	404	640	778	729	458	377

Варіант 8

Період	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
К	68	31	26	25	14	12
Ц	6	17	19	19	24	25
В	401	420	520	484	280	255

Варіант 9

Період	1	2	3	4	5	6
К	19	9,3	7,6	7,4	6	5
Ц	23	78	85	85	107	108
В	400	453	485	620	620	529

Варіант 10

Період	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
К	55	45	39	34	33	27
Ц	75	260	266	280	280	300
В	3220	7011	8989	8989	8500	7770

Варіант 11

Період	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
К	45	38,5	37,5	37	33	20
Ц	8	20	21	21	29	36
В	248	736	785	790	930	713

Варіант 12

Період	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
К	25	20	15	11	8	6
Ц	28	62	62,5	62,5	80	82
В	405	640	778	729	458	370

Варіант 13

Період	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
К	65	30	26	25	14	12
Ц	5	15	19	19	24	25
В	400	420	520	484	280	250

Варіант 14

Період	1	2	3	4	5	6
К	20	9	7,5	7,4	6	5
Ц	24	78	85	85	107	108
В	410	460	485	620	620	529

Варіант 15

Період	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
К	1550	780	555	535	348	300
Ц	10	14	15	15	22	23
В	5550	7850	7950	8100	7413	6555

Варіант 16

Період	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
К	45	39	37,2	37	35	20
Ц	10	20	21	21	29	36
В	250	736	785	790	930	715

Варіант 17

Період	1	2	3	4	5	6
К	130	117	92	60	31	28
Ц	16	53	61	110	165	170
В	1301	4350	5432	5199	2802	2666

Варіант 18

Період	1	2	3	4	5	6
К	2700	2413	2200	2150	1066	900
Ц	0,57	1,66	1,75	1,75	2,14	2,22
В	1486	4005	3850	3763	2047	1798

Варіант 19

Період	1	2	3	4	5	6
К	48	37	25	23	22	21
Ц	1,653	4,794	7,288	8,165	9,218	10
В	55	120	137	153	173	182

Варіант 20

Період	1	2	3	4	5	6
К	589	528	367	342	327	134
Ц	2,484	7,203	10,950	12,268	13,850	15,025
В	1027	3214	3428	4380	4017	1877

Варіант 21

Період	1	2	3	4	5	6
К	85	70	50	45	43	20
Ц	4,8	11,5	18,5	20,5	22,5	23
В	230	715	760	980	890	400

Варіант 22

Період	1	2	3	4	5	6
К	95	75	50	47	45	19
Ц	3,5	9,5	14,5	16,5	18,5	20
В	195	560	630	812	745	355

Варіант 23

Період	1	2	3	4	5	6
К	100	75	50	47	45	20
Ц	4,6	10,5	15,5	16,6	18,5	20
В	195	600	635	815	745	355

Варіант 24

Період	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
К	270	210	145	135	125	51
Ц	1, 6	3,8	5,8	6,5	7,5	8
В	200	625	665	852	785	345

Варіант 25

Період	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
К	50	40	35	30	25	20
Ц	75	265	260	280	285	300
В	3200	7000	9000	9010	8500	7770

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА 6

ЗАСТОСУВАННЯ КОРЕЛЯЦІЙНО-РЕГРЕСІЙНИХ МЕТОДІВ В ОРГАНІЗАЦІЙНОМУ ПРОЄКТУВАННІ. БАГАТОФАКТОРНИЙ КОРЕЛЯЦІЙНИЙ АНАЛІЗ. ПЕРЕВІРКА МНОЖИННОЇ РЕГРЕСІЙНОЇ МОДЕЛІ НА АДЕКВАТНІСТЬ

Задача 6.1

Побудувати економетричну модель, яка характеризує залежність між витратами на харчування, загальними витратами та складом сім'ї на основі даних, наведених у табл. 6.1. Проаналізувати зв'язок, визначений на основі побудованої моделі.

Таблиця 6.1 – Розрахункові дані для оцінювання параметрів моделі

№ п/п	Витрати на харчування (гр.од.), y	Загальні затрати (гр.од), x_1	Середня кількість членів сім'ї, x_2
1	20	45	1,5
2	32	75	1,6
3	48	125	1,9
4	65	223	1,8
5	45	92	3,4
6	64	146	3,6
7	79	227	3,5
8	104	358	5,5
9	68	135	5,4
10	93	218	5,4
11	117	331	5,3
12	145	490	8,5
13	91	175	8,3
14	131	205	8,1
15	167	468	7,3
16	195	749	8,4

Розв'язок:

1. Ідентифікуємо змінні моделі:

y – витрати на харчування (залежна змінна);

x_1 – загальні витрати (незалежна змінна);

x_2 – середня кількість членів сім'ї (незалежна змінна);

2. Специфікуємо модель, тобто в даному випадку визначимо її аналітичну форму:

$$\hat{y}_i = b_0 + b_1 x_{1i} + b_2 x_{2i}.$$

3. Оцінимо параметри моделі на основі методу найменших квадратів,

попередньо висунувши гіпотезу, що всі чотири передумови для його застосування дотримані. Маємо:

$$b = (X^T X)^{-1} \cdot X^T Y. \qquad (6.1)$$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 45 & 1,5 \\ 1 & 75 & 1,6 \\ 1 & 125 & 1,9 \\ 1 & 223 & 1,8 \\ 1 & 92 & 3,4 \\ 1 & 146 & 3,6 \\ 1 & 227 & 3,5 \\ 1 & 385 & 5,5 \\ 1 & 135 & 5,4 \\ 1 & 218 & 5,4 \\ 1 & 331 & 5,3 \\ 1 & 490 & 8,5 \\ 1 & 175 & 8,9 \\ 1 & 305 & 8,1 \\ 1 & 468 & 7,3 \\ 1 & 749 & 8,4 \end{pmatrix} \quad Y := \begin{pmatrix} 20 \\ 32 \\ 48 \\ 65 \\ 45 \\ 64 \\ 79 \\ 104 \\ 68 \\ 93 \\ 117 \\ 145 \\ 91 \\ 131 \\ 167 \\ 195 \end{pmatrix}$$

$$X^T X = \begin{pmatrix} 16 & 4168 & 79.5 \\ 4168 & 1604274 & 25895.6 \\ 79.5 & 25895.6 & 495.7 \end{pmatrix}$$

$$X^T Y = \begin{pmatrix} 1464 \\ 512156 \\ 8916,8 \end{pmatrix}$$

$$\left(X^T X\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 0,307813 & -0,000018 & -0,0484215 \\ -0,000018 & 0,000004 & -0,0002049 \\ -0,04842 & -0,0002 & 0,02048829 \end{pmatrix}$$

Підставимо отримані значення оберненої матриці $(X^T X)^{-1}$ і добуток матриць $X^T Y$ в оператор оцінювання і визначимо оцінки параметрів моделі:

$$b=(X^TX)^{-1}X^TY=\begin{pmatrix}9,595983\\0,183683\\6,853759\end{pmatrix}.$$

Таким чином: b_0=9,595983; b_1=0,183683; b_2= 6,853759.

Звідси економетрична модель має вигляд:

$$\hat{y} = 9,595983 + 0,183683x_1 + 6,853759x_2 .$$

4. Знайдемо коефіцієнт детермінації:

$$D = \frac{SSR}{SST} = \frac{b^T X^T Y - n\bar{y}^2}{\sum_{i=1}^{n} y_i^2 - n\bar{y}^2}.$$

$$b^T X^T Y = \begin{pmatrix}9,596 & 0,1837 & 6,854\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1464\\512156\\8916,8\end{pmatrix} = 9,596\cdot 1464 + 0,1837\cdot 512156 +$$

$$+ 6,854\cdot 8916,8 = 169247,4484$$

$$D = \frac{169247,4484 - 16\cdot 91,5^2}{170474 - 16\cdot 91,5^2} = \frac{169247,4484 - 133956}{170474 - 133956} = \frac{35291,4484}{36518} \approx 0,9664.$$

Це означає, що отримане нами рівняння лінійної регресії є значущим, тобто оцінена модель є **адекватною**.

Доцільніше використовувати *скоригований (адаптований, виправлений) коефіцієнт детермінації* $\overline{D}$, що визначається за формулою

$$\overline{D} = 1 - \frac{n-1}{n-p-1}(1-D),$$

де n – кількість дослідів (аналізованих періодів) у моделі;

p – кількість пояснювальних змінних X у моделі.

$$\overline{D} = 1 - \frac{16-1}{16-2-1}(1-0,9664) = 0,85.$$

Скоригований коефіцієнт детермінації $\overline{D}$, на відміну від D, може зменшуватися під час введення до моделі нових пояснювальних змінних, що не мають істотного впливу на залежну змінну.

5. Обчислимо коефіцієнти еластичності. $E_j = b_j \dfrac{\overline{x_j}}{\overline{y}}, \quad j = \overline{1, p}$.

Оскільки побудована багатофакторна регресійна модель є адекватною, то можна на її основі розрахувати коефіцієнти еластичності екзогенних змінних – факторних ознак x_1 та x_2: $E_j = b_j \dfrac{\overline{x_j}}{\overline{y}}, \quad j = \overline{1, p}$.

Для цього спочатку обчислимо середні арифметичні значення екзогенних та ендогенної змінних:

$$\overline{x}_1 = \frac{4064}{16} = 254, \ \overline{x}_2 = \frac{79,5}{16} = 4,96875, \ \overline{y} = \frac{1464}{16} = 91,5.$$

Еластичність витрат на харчування до зміни загальних витрат дорівнює:

$$E_1 = 0,183683 \cdot \frac{254}{91,5} \approx 0,5.$$

Це означає, що при збільшенні загальних витрат на 1%, витрати на харчування збільшаться на 0,5%.

Еластичність витрат на харчування до зміни складу сім'ї дорівнює:

$$E_2 = 6,853759 \cdot \frac{4,96875}{91,5} \approx 0,37.$$

Це означає, що при збільшенні складу сім'ї на 1%, витрати на харчування збільшуються на 0,37%.

Коефіцієнт b_0=9,595983 характеризує граничні витрати на харчування.

Індивідуальні завдання для побудови багатофакторної регресійної моделі

Побудувати економетричну модель, яка характеризує залежність між витратами на харчування, загальними витратами та складом сім'ї на основі даних, наведених у табл. (згідно вашого варіанта), де y – витрати на харчування (гр.од.); x_1 – загальні затрати (гр.од); x_2 – склад сім'ї (чол.)

Проаналізувати зв'язок, визначений на основі побудованої моделі.

ВАРІАНТ 1		
y	x_1	x_2
21	46	1,5
32	75	1,6
48	125	1,9
65	223	1,8
45	92	3,4
64	146	3,6
79	227	3,5
104	358	5,5
68	135	5,4
93	218	5,4
117	331	5,3
145	490	8,5
91	175	8,3
131	205	8,1
167	468	7,3
195	749	8,4

ВАРІАНТ 2		
y	x_1	x_2
21	46	1,5
33	76	1,7
48	125	1,9
65	223	1,8
45	92	3,4
64	146	3,6
79	227	3,5
104	358	5,5
68	135	5,4
93	218	5,4
117	331	5,3
145	490	8,5
91	175	8,3
131	205	8,1
167	468	7,3
195	749	8,4

ВАРІАНТ 3		
y	x_1	x_2
21	47	1,5
32	75	1,6
48	125	1,9
65	223	1,8
45	92	3,4
64	146	3,6
80	227	3,5
104	358	5,5
68	135	5,4
93	218	5,5
117	331	5,3
145	490	8,5
91	175	8,3
131	205	8,1
167	468	7,3
195	749	8,4

ВАРІАНТ 4		
y	x_1	x_2
20	46	1,5
33	76	1,7
48	125	1,8
65	223	1,8
45	92	3,4
64	146	3,6
79	227	3,5
104	358	5,5
68	135	5,4
93	218	5,4
117	331	5,3
145	490	8,5
91	175	8,3
131	205	8,1
167	468	7,3
195	749	8,4

ВАРІАНТ 5		
y	x_1	x_2
20	47	1,5
32	75	1,6
48	125	1,9
65	223	1,8
45	93	3,4
64	146	3,6
79	227	3,5
104	358	5,5
68	135	5,4
93	218	5,4
117	331	5,3
145	490	8,5
91	175	8,3
131	205	8,1
167	468	7,3
195	749	8,4

ВАРІАНТ 6		
y	x_1	x_2
21	48	1,5
33	76	1,7
48	126	1,9
65	223	1,8
45	92	3,4
64	146	3,6
79	227	3,5
104	358	5,5
68	135	5,4
93	218	5,4
117	331	5,3
145	490	8,5
91	175	8,3
131	205	8,1
167	468	7,3
195	749	8,4

ВАРІАНТ 7		
y	x_1	x_2
21	47	1,5
32	75	1,6
48	125	1,9
65	223	1,8
45	92	3,4
64	146	3,6
80	227	3,5
104	358	5,5
68	135	5,4
93	218	5,5
117	331	5,3
145	490	8,5
91	175	8,3
131	205	8,1
167	468	7,3
195	749	8,4

ВАРІАНТ 8		
y	x_1	x_2
20	46	1,5
33	76	1,7
48	125	1,8
65	223	1,8
45	92	3,4
64	146	3,6
79	227	3,5
104	358	5,5
68	135	5,4
93	218	5,4
117	331	5,3
145	490	8,5
91	175	8,3
131	205	8,1
167	468	7,3
195	749	8,4

ВАРІАНТ 9		
y	x_1	x_2
21	46	1,5
33	75	1,6
48	125	1,9
65	223	1,8
45	92	3,4
64	146	3,6
79	227	3,5
105	358	5,5
68	135	5,4
94	218	5,4
117	333	5,3
145	490	8,5
91	175	8,3
131	205	8,1
167	468	7,3
195	749	8,4

ВАРІАНТ 10		
y	x_1	x_2
22	46	1,5
33	76	1,7
48	125	1,9
65	223	1,8
45	92	3,4
64	146	3,6
79	227	3,5
104	358	5,5
68	135	5,4
93	218	5,4
117	331	5,3
145	490	8,5
92	175	8,3
131	205	8,1
167	468	7,3
195	749	8,4

ВАРІАНТ 11		
y	x_1	x_2
21	47	1,5
32	75	1,6
48	125	1,9
65	223	1,8
45	92	3,4
64	146	3,6
80	227	3,5
104	358	5,5
68	135	5,4
93	218	5,5
117	331	5,3
145	490	8,5
91	175	8,3
131	205	8,1
167	468	7,3
195	749	8,4

ВАРІАНТ 12		
y	x_1	x_2
20	46	1,5
33	76	1,7
48	125	1,8
65	223	1,8
45	92	3,4
64	146	3,6
79	227	3,5
104	358	5,5
68	135	5,4
93	218	5,4
117	331	5,3
145	490	8,5
91	175	8,3
131	205	8,1
167	468	7,3
195	749	8,4

ВАРИАНТ 13		
y	x_1	x_2
21	47	1,5
32	75	1,6
47	125	1,9
65	223	1,8
45	92	3,4
65	146	3,6
80	227	3,5
104	358	5,5
68	135	5,4
93	218	5,5
117	331	5,3
145	490	8,5
91	175	8,3
131	205	8,1
167	468	7,3
195	749	8,4

ВАРИАНТ 14		
y	x_1	x_2
20	46	1,5
33	76	1,7
48	125	1,8
65	223	1,8
44	92	3,4
64	146	3,6
79	227	3,5
104	358	5,5
68	135	5,4
93	218	5,4
118	332	5,3
145	490	8,5
91	176	8,3
131	205	8,1
167	468	7,3
195	749	8,4

ВАРИАНТ 15		
y	x_1	x_2
21	47	1,5
32	75	1,6
48	125	1,9
65	223	1,8
45	93	3,4
64	146	3,6
79	227	3,5
104	359	5,5
68	135	5,4
94	218	5,4
117	331	5,3
145	490	8,5
91	175	8,3
131	205	8,1
167	468	7,3
195	750	8,4

ВАРИАНТ 16		
y	x_1	x_2
21	48	1,5
33	76	1,7
49	127	1,9
65	223	1,8
45	92	3,4
64	146	3,6
79	227	3,5
104	358	5,5
68	135	5,4
93	218	5,4
117	331	5,3
145	490	8,5
91	175	8,3
131	205	8,1
167	468	7,3
195	750	8,4

ВАРИАНТ 17		
y	x_1	x_2
21	46	1,5
33	75	1,6
48	125	1,9
65	223	1,8
45	92	3,4
64	146	3,6
79	227	3,5
105	358	5,5
68	135	5,4
91	218	5,4
117	333	5,3
145	490	8,4
91	175	8,3
131	205	8,1
167	468	7,3
195	750	8,4

ВАРИАНТ 18		
y	x_1	x_2
21	46	1,5
33	76	1,8
48	125	1,9
65	223	1,8
45	92	3,4
64	146	3,6
79	227	3,5
104	358	5,5
68	135	5,4
93	219	5,4
116	331	5,3
145	490	8,5
91	175	8,3
131	205	8,1
167	468	7,3
195	749	8,4

ВАРИАНТ 19		
y	x_1	x_2
23	43	1,5
31	75	1,6
48	125	1,9
65	221	1,9
45	92	3,4
64	146	3,6
79	227	3,5
104	358	5,5
68	135	5,4
93	218	5,4
117	331	5,3
145	490	8,5
91	175	8,3
131	205	8,1
167	468	7,3
195	750	8,5

ВАРИАНТ 20		
y	x_1	x_2
23	46	1,5
33	76	1,7
49	125	1,9
65	223	1,8
46	92	3,4
64	146	3,6
79	227	3,5
104	358	5,5
68	135	5,4
93	218	5,4
117	331	5,3
145	490	8,5
92	175	8,3
131	205	8,1
167	468	7,3
195	750	8,5

ВАРИАНТ 21		
y	x_1	x_2
21	42	1,2
30	75	1,6
48	125	1,9
65	221	1,9
45	92	3,4
64	146	3,6
79	227	3,5
104	358	5,5
68	135	5,4
93	218	5,4
117	331	5,3
145	490	8,5
91	175	8,3
131	205	8,1
167	468	7,3
195	749	8,4

ВАРИАНТ 22		
y	x_1	x_2
24	45	1,6
33	76	1,7
49	125	1,9
65	223	1,8
46	92	3,4
64	146	3,6
79	227	3,5
104	358	5,5
68	135	5,4
93	218	5,4
117	331	5,3
145	490	8,5
92	175	8,3
131	205	8,1
167	468	7,3
195	750	8,5

ВАРИАНТ 23		
y	x_1	x_2
22	42	1,5
31	75	1,6
48	125	1,9
65	221	1,9
45	92	3,4
64	146	3,6
79	227	3,5
104	358	5,5
68	135	5,4
93	218	5,4
117	331	5,3
145	490	8,5
91	175	8,3
131	205	8,1
167	468	7,3
195	749	8,4

ВАРИАНТ 24		
y	x_1	x_2
22	45	1,5
33	76	1,7
49	125	1,9
65	223	1,8
46	92	3,4
64	146	3,6
79	227	3,5
104	358	5,5
68	135	5,4
93	218	5,4
117	331	5,3
145	490	8,5
92	175	8,3
131	205	8,1
167	468	7,3
195	749	8,4

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Азарова А. О., Краєвська А. С., Міронова Ю. В., Краус О. О. Кореляційно-регресійне моделювання впливу базових чинників на рівень інфляції в Україні. *Innovation and Sustainability*. 2024. № 1. С. 63–72. URL: https://doi.org/10.31649/ins.2024.1.63.72

2. Азарова А. О., Краус О. О. Ідентифікація чинників впливу на рівень інфляції в Україні засобами економетричного моделювання. Україна та світ : виміри сьогодення : кол. моногр. Харків : СГ НТМ «Новий курс», 2024. С. 98–108.

3. Азарова А. О., Белякова К. С. Математичне моделювання процесів оцінювання фінансового стану підприємства. Управління інноваційним розвитком соціально-економічних систем : колективна монографія / під заг. ред. В. В. Храпкіної, К. В. Пічик ; Національний університет «Києво-Могилянська академія». Київ : Видавничий дім «Києво-Могилянська академія», 2024. С. 648-666.

4. Azarova A., Solomoniuk I. Modeling of the process of estimating the influence of internal factors on price on the basis of the correlation-regression method least squares. Innovation and entrepreneurship : collection of scientific articles. Ajax Publishing, Montreal, Canada, 2020. P. 27–31.

5. Азарова А. О., Азарова Л. Є., Міронова Ю. В., Соломонюк І. Л. Максимізація прибутку та оптимізація базових економічних показників виробництва із використанням кореляційно-регресійного моделювання //Існуюча практика та новітні тенденції в управлінні суб'єктами господарювання різних організаційно-правових форм : монографія / за ред. Л. М. Савчук, Л. М. Бандоріної. Дніпро : Пороги, 2020. С. 344-358.

6. Азарова А., Єлісєєва О., Нікіфорова Л., Химич В. Кореляційно-регресійне моделювання впливу експорту, імпорту та індексу інфляції на рівень ВВП України. *Innovation and Sustainability*. 2024. №4. С. 43–54. https://doi.org/10.31649/ins.2024.4.43.54

7. Азарова А., Нікіфорова Л., Рузакова О., Химич В. Економетричне моделювання впливу експортно-імпортних операцій на рівень ВВП України. *Herald of Khmelnytskyi National University. Economic Sciences*. 2024. № 336 (6). С. 363–369. https://doi.org/10.31891/2307-5740-2024-336-57

8. Азарова А. О., Лесько О., Міронова Ю., Гнатюк С. Оцінювання ефективності роботи маркетингового відділу засобами кореляційно-регресійного моделювання. *Modeling the development of the economic systems*. 2024. №4. С. 77–86. https://doi.org/10.31891/mdes/2024-14-10

9. Економетрія : навчальний посібник із грифом МОНУ №1/11–7160 від 17.04.13. / А. О. Азарова, Н. В. Сачанюк-Кавецька, О. М. Роїк, Ю. В. Міронова. Вінниця : ВНТУ, 2014. 304 с.

10. Доля В. Т. Економетрія: навч. посібник. Харків : ХНАМГ, 2020. 171 с.

11. Мороз В., Диха М. Економетрія. Київ : Центр навчальної літератури. 2016. 206 с.

12. Lukianenko I., Nasachenko M. Inflation expectations modeling: the application of markov switching autoregression. *Наукові записки НаУКМА. Економічні науки.* 2020. Том 5. Випуск 1. С.82–88. URL : https://ekmair.ukma.edu.ua/items/04caf8fa-0305-48b4-84a0-8fda62a53efb (дата звернення 16.05.2024).

Електронне навчальне видання

Азарова Анжеліка Олексіївна

Методичні вказівки до виконання лабораторних робіт з дисципліни «Економетрія»

Рукопис оформила ***А. Азарова***

Видається в авторській редакції

Оригінал-макет виготовлено в РВВ ВНТУ

Підписано до друку 20.12.2024
Гарнітура Times New Roman.
Зам. № 2024-216.
Видавець та виготовлювач
Вінницький національний технічний університет,
Редакційно-видавничий відділ.
ВНТУ, ГНК, к. 114.
Хмельницьке шосе, 95,
м. Вінниця, 21021.
press.vntu.edu.ua;
Email: rvv.vntu@gmail.com
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи
серія ДК № 3516 від 01.07.2009 р.