УДК 621.313

НЕСТАНДАРТНИЙ АНАЛІЗ В ЕЛЕКТРОТЕХНІЦІ: КОЛА ПОСТІЙНОГО СТРУМУ З ІДЕАЛЬНИМИ ЄМНОСТЯМИ

Кухарчук Василь Васильович
д.т.н., професор
Кацив Самоїл Шулімович
к.т.н., доцент
Мадьяров Вячеслав Губейович
к.т.н., доцент
Вінницький національний технічний університет
м. Вінниця, Україна

Анотація. В роботі запропоновано використання ідей та методів нестандартного аналізу в галузі теоретичної електротехніки. Наведені основні засади нестандартного аналізу. Розглянуті характерні приклади аналізу кіл постійного струму з ідеальними ємнісними елементами.

Ключові слова: нескінченно мале число, нескінченно велике число, гіпердійсне число, нестандартне число, стандартне число, електричне коло, ідеальний ємнісний елемент.

Вступ Під час розв’язання різноманітних наукових та прикладних задач, наприклад обчисленні похідних та визначенні коефіцієнтів нескінченних рядів в математичному аналізі, аналізі електричних кіл постійного струму з ідеальними реактивними елементами та визначенні коефіцієнтів реактивних чотириполюсників в теоретичній електротехніці час від часу дослідник зустрічається з необхідністю розкриття невизначеностей типу $\frac{0}{0}$. При цьому досить часто застосування класичних методів викликає певні ускладнення. В цих випадках набагато ефективнішим є використання ідей та методів *нестандартного аналізу*.

Важливим є те, що саме ідеї нестандартного аналізу (тобто *безпосереднє*

використання нескінченно малих чисел) були тим фундаментом, на якому Лейбніц та Ньютон інтуїтивно будували засади диференційного та інтегрального обчислень. Але пізніше в працях Коші та інших відомих математиків нескінченно малі числа були «вилучені з обігу» і в основу математичного апарату диференційного та інтегрального обчислення були покладені числові та функціональні послідовності і граничні співвідношення величин. Це підвищило аксіоматичну строгість математичного апарату, але, на жаль, ускладнило розв'язання певного кола задач.

Відродження ідей нестандартного аналізу відбулося в 60-х роках минулого сторіччя, коли А. Робінсон запропонував нову аксіоматику математичного аналізу, яка базується на множині *гіпердійсних* чисел, що містить окрім так званих *стандартних* (звичайних дійсних) чисел ще й так звані *нестандартні* (нескінченно малі, нескінченно великі та їх комбінації зі звичайними дійсними) числа.

В даній роботі розглянемо застосування нестандартного аналізу в електротехніці.

Для аналізу електричних кіл постійного струму використовуються різноманітні уніфіковані методи розрахунку, які базуються на законах Ома та Кірхгофа. Разом з тим, існує певне коло задач цього напрямку, для яких безпосереднє використання цих уніфікованих методів практично неможливе. Таке твердження стосується розрахунку кіл постійного струму з ідеальними реактивними елементами. Складність розрахунків в таких колах полягає в тому, що на постійному струмі опір ідеальної індуктивності ($x_L = \omega L$) прямує до нуля, а опір ідеальної ємності ($x_C = \frac{1}{\omega C}$) – до нескінченності.

Зазвичай, для розв'язання таких задач одночасно із законами електротехніки використовують енергетичні характеристики індуктивностей та ємностей, що значно ускладнює аналіз таких кіл, особливо для складних схем. Тому є актуальним застосування математичного апарату *нестандартного аналізу*, який дозволить використати відомі уніфіковані методи для розрахунку

таких кіл.

В наступному підрозділі будуть стисло викладені основні засади нестандартного аналізу, які необхідні для розв'язання вищезгаданих електротехнічних задач. Детальніше з цим математичним апаратом можна ознайомитися в [1, с. 6].

Основні засади нестандартного аналізу

Нехай R – впорядкована множина дійсних чисел. Число α будемо називати *нескінченно малим числом* тоді та лише тоді, коли

$$\forall r \in R(\alpha < r). \qquad (1)$$

Число $\beta = \frac{1}{\alpha}$ будемо називати *нескінченно великим числом*. В цьому випадку можна записати

$$\forall r \in R(\beta > r). \qquad (2)$$

До нескінченно малих та великих чисел можуть бути застосовані всі алгебраїчні операції (додавання, віднімання, множення, ділення, зведення в ступінь тощо) та теореми (комутативності, асоціативності тощо).

Будемо розрізняти нескінченно малі та великі числа різного порядку, а саме:

- $\alpha > \alpha^2 > \alpha^3 > \alpha^k$ – нескінченно малі числа першого, другого, третього, k-го порядку;

- $\beta < \beta^2 < \beta^3 < \beta^k$ – нескінченно великі числа першого, другого, третього, k-го порядку.

Разом з дійсними числами $r \in R$ нескінченно малі та великі числа утворюють впорядковану множину *гіпердійсних* чисел $^* R$. Прийнято називати дійсні числа $r \in R$ *стандартними* або *архімедовими* на відміну від *нестандартних* (*неархімедових*) чисел $^* r \in {}^* R$.

Кожне нестандартне число містить стандартну частину

$$^* r = r \pm \alpha, \qquad (3)$$

тобто

$$r = st(^* r), \qquad (4)$$

інакше кажучи звичайне дійсне число є стандартною частиною деякого нестандартного числа (очевидно, таких чисел може бути нескінченна кількість).

Два стандартних числа a та b називаються рівними тоді та лише тоді коли

$$a - b = 0. \qquad (5)$$

Два нестандартних числа $^* a$ та $^* b$ називаються *еквівалентними* (або *нескінченно близькими* одне до одного) тоді та лише тоді коли

$$^* a - ^* b \approx \alpha. \qquad (6)$$

Позначення $\approx$ буде означати еквівалентність двох нестандартних чисел.

Для стандартних чисел m та n запишемо основні співвідношення, які випливають з (1 – 6):

$$\frac{1}{\alpha^k} = \beta^k,\ \frac{m}{\alpha} = m\beta,\ \frac{m}{\alpha^k} = m\beta^k, \qquad (7)$$

$$\frac{m\alpha}{n\alpha} = \frac{m}{n},\ \frac{m\alpha}{n} = \frac{m}{n}\alpha,\ \frac{m}{n\alpha} = \frac{m}{n}\beta, \qquad (8)$$

$$m\alpha + n \approx n,\ m\beta + n \approx m\beta,\ m\alpha^k + n \approx n,\ m\beta^k + n \approx m\beta^k. \qquad (9)$$

$$\boldsymbol{\sin}\alpha \approx \alpha,\ \boldsymbol{\cos}\alpha \approx 1. \qquad (10)$$

Наведемо характерні приклади використання цих методів в математичному аналізі [2, с. 156].

Знайдемо, наприклад, першу похідну функції $y = x^3$, для чого введемо заміну $dx = \alpha$.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(x+\alpha)^3 - x^3}{\alpha} = \frac{x^3 + 3x^2\alpha + 3x\alpha^2 + \alpha^3 - x^3}{\alpha} = 3x^2 + 3x\alpha + \alpha^2 \approx 3x^2.$$

Для $y = \boldsymbol{\sin} x$ отримаємо

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\boldsymbol{\sin}(x+\alpha) - \boldsymbol{\sin} x}{\alpha} = \frac{\boldsymbol{\sin} x \cdot \boldsymbol{\cos}\alpha + \boldsymbol{\sin}\alpha \cdot \boldsymbol{\cos} x - \boldsymbol{\sin} x}{\alpha} \approx$$

$$\approx \frac{\boldsymbol{\sin} x \cdot 1 + \alpha \cdot \boldsymbol{\cos} x - \boldsymbol{\sin} x}{\alpha} \approx \boldsymbol{\cos} x.$$

Нехай $y = \cos x$. Тоді

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\cos(x+\alpha)-\cos x}{\alpha}=\frac{\cos x\cdot\cos\alpha-\sin x\cdot\sin\alpha-\cos x}{\alpha}\approx$$
$$\approx\frac{\cos x\cdot 1-\sin x\cdot\alpha-\cos x}{\alpha}\approx-\sin x.$$

Цілком природно припустити, що таку ж нестандартну структуру може мати не лише множина дійсних чисел, а і множина уявних чисел, тобто площина комплексних чисел. Тоді, за аналогією з (9) можна записати:

$$m\alpha+jn\approx jn,\ m\beta+jn\approx m\beta,.\ m+jn\alpha\approx m,\ m+jn\beta\approx jn\beta\ .\ (11)$$

Перед тим, як перейти до застосування отриманих вище виразів для розв'язання різноманітних прикладних задач зазначимо, що не існує загальних правил вибору параметру, який доцільно прирівняти до нескінченно малого (або нескінченно великого) числа. Цей вибір здійснює дослідник в залежності від контексту конкретної задачі. При цьому слід мати на увазі, що у випадку необхідності заміни нескінченно малими числами одразу кількох різнорідних параметрів однієї задачі, визначення співвідношень між цими числами є зовсім непростою задачею і вимагає, іноді, додаткових досліджень.

В наступному підрозділі розглянемо яким чином методи нестандартного аналізу можуть бути використані для аналізу кіл постійного струму з ідеальними ємнісними елементами.

Оскільки коло постійного струму можна розглядати як коло синусоїдного змінного струму, частота якого дорівнює нулю, то для розв'язання таких задач можна застосувати символічний метод за умови $\omega=\alpha$.

Розглянемо характерні приклади для таких задач [3, с. 264].

Аналіз електричних кіл постійного струму з ідеальними ємностями

Очевидно, що в цих випадках для повного комплексного опору вітки можна записати $\underline{Z}_C\approx\frac{1}{j\alpha C}$.

Приклад 1. В колі постійного струму (рис. 1) визначити напруги на ємностях C_1, C_2.

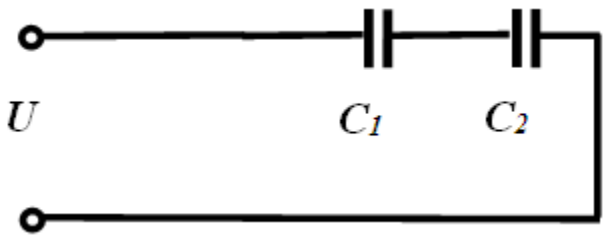


Рис. 1. Послідовно з'єднані ємності

Розглянемо це коло, як коло синусоїдного змінного струму з кутовою частотою $\omega \approx \alpha$.

Повний комплексний опір кола

$$\underline{Z}_{вх} \approx \frac{1}{j\alpha C_1} + \frac{1}{j\alpha C_2} = \frac{j\alpha C_1 + j\alpha C_2}{(j\alpha C_1)(j\alpha C_2)} = \frac{C_1 + C_2}{j\alpha C_1 C_2},$$

тоді струм, що через нього протікає

$$\underline{I} = \frac{U}{\underline{Z}_{вх}} = \frac{Uj\alpha C_1 C_2}{C_1 + C_2},$$

звідси напруги на ємностях

$$U_{C_1} = \underline{I}\frac{1}{j\alpha C_1} = \frac{UC_2}{C_1 + C_2},\ U_{C_2} = \underline{I}\frac{1}{j\alpha C_2} = \frac{UC_1}{C_1 + C_2}.$$

Приклад 2 В колі постійного струму (рис. 2) визначити напруги U_{C_1}, U_{C_2} U_{ab}.

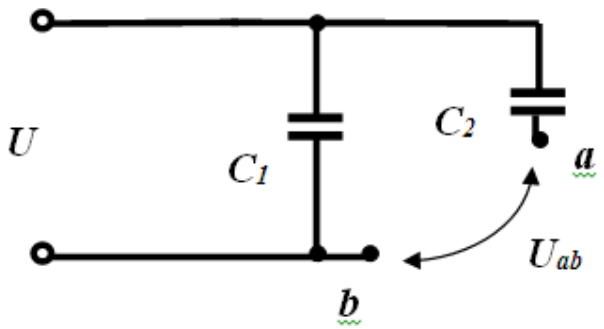


Рис. 2. Паралельно з'єднані ємності з розривом.

По-перше, очевидно, що $U_{C_1} = U$.

По-друге, зі схеми кола видно, що вітка з ємністю C_2 розірвана.

Розрив вітки можна представити як умовний ідеальний конденсатор, у якого площина обкладинок прямує до нуля, а відстань між обкладинками прямує до нескінченності, тобто його ємність C дорівнює нескінченно малому

числу.

Тоді комплексний опір цього умовного конденсатора буде дорівнювати

$$\underline{Z}_C \approx \frac{1}{j\alpha_1\alpha_2}.$$

Добуток двох нескінченно малих чисел є нескінченно малим числом більш високого порядку, ніж кожен зі співмножників, тому в загальному випадку має місце одна з нерівностей

$$\frac{1}{j\alpha_1\alpha_2} \le \frac{1}{jm\alpha_1^2},$$

$$\text{або } \frac{1}{j\alpha_1\alpha_2} \le \frac{1}{jm\alpha_2^2}.$$

Розв’яжемо задачу для першої нерівності (очевидно, що для другої результат буде аналогічним).

Тоді $\underline{Z}_C \approx \frac{1}{jm\alpha_1^2}$.

В результаті повний комплексний опір другої вітки дорівнює

$$\underline{Z} \approx \frac{1}{jm\alpha_1^2} + \frac{1}{j\alpha_1 C_2} = \frac{jm\alpha_1^2 + j\alpha_1 C_2}{\left(jm\alpha_1^2\right)\left(j\alpha_1 C_2\right)} = \frac{m\alpha_1 + C_2}{jm\alpha_1^2 C_2},$$

а струм другої вітки

$$\underline{I} = \frac{Ujm\alpha_1^2 C_2}{m\alpha_1 + C_2} \approx \frac{Ujm\alpha_1^2 C_2}{C_2} \approx Ujm\alpha_1^2.$$

Звідси напруги на ємності C_2

$$U_{C_2} = \underline{I}\frac{1}{j\alpha_1 C_2} = \frac{Ujm\alpha_1^2}{j\alpha_1 C_2} = \frac{Um\alpha_1}{C_2} \approx 0.$$

Напругу U_{ab} можна знайти як напругу на умовному конденсаторі

$$U_{ab} = \underline{I}\frac{1}{jm\alpha_1^2} = \frac{Ujm\alpha_1^2}{jm\alpha_1^2} = U.$$

Висновки

1. Авторами вперше виділено клас нестандартних електротехнічних

задач, спрямованих на аналіз електричних кіл постійного струму, до складу яких входять ідеальні ємності. Показано, що розв'язок виділеного класу задач стандартними методами теоретичної електротехніки є занадто складним або взагалі практично неможливим.

2. Для вирішення окресленої проблеми запропоновано поширити методи нестандартного аналізу на задачі аналізу електричних кіл з ідеальними реактивними елементами. Переваги такого підходу підтверджено на прикладах розрахунку електричного кола з ємностями.

3. З метою розширення сфери застосування методів нестандартного аналізу необхідно виділити подібні задачі із різноманітних галузей науки і техніки, в яких використовується диференціальне обчислення і граничні переходи розв'язання яких обмежене стандартними підходами, або взагалі неможливе.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Девис М. Прикладной нестандартный анализ / Девис М. – М.: Мир, 1980. – 237 с.

2. Кухарчук В. В., Кацив С. Ш. Розвиток ідей та методів нестандартного аналізу. *Сучасний рух науки: тези доп. XIII міжнародної науково-практичної інтернет-конференції, 18-19 жовтня 2021 р. Дніпро.* Україна. 2021. С. 155-157

3. Карпов Ю. О., Кацив С. Ш., Козловський А. В. Розширення області застосування символічного методу розрахунку електричних кіл за рахунок використання методів нестандартного аналізу (частина 2). *Вісник Інженерної Академії України.* 2013. №2. С. 262-265.