

АНАЛІЗ СТАТИЧНОЇ ТА ДИНАМІЧНОЇ ПОВЕДІНКИ
СТЕРЖНЯ ПРИ ПОЗДОВЖНЬОМУ НАВАНТАЖЕННІ

Вінницький національний технічний університет

Анотація

Наведено короткий огляд робіт зі статичної та динамічної стійкості тонкого стержня під дією осьового тиску. При лінійному підході критичне навантаження за статичного тиску було визначене Л. Ейлером. У роботі М.О. Лаврентьєва та О.Ю. Ішлінського встановлено, що при інтенсивному навантаженні, яке суттєво перевищує ейлерове статичне критичне навантаження, найбільшу швидкість зростання амплітуди поперечного прогину має форма з великою кількістю хвиль у поздовжньому напрямку. Подальші дослідження пов'язані з урахуванням поширення поздовжніх хвиль уздовж стержня. Досліджено умови виникнення параметричних резонансів, встановлено можливість втрати стійкості при навантаженні, меншому за ейлерове. При квазілінійному підході виявлено ефект виникнення биттів із переходом енергії поздовжніх коливань у поперечні та навпаки. При тривалому впливі навантаження, що перевищує ейлерове, як лінійний, так і квазілінійний підхід не приводить до скінченних значень амплітуди поперечних переміщень. Тому використовується нелінійний підхід. Досліджується розвиток закритичних деформацій стержня.

Ключові слова: стійкість стержня; параметричний резонанс; биття; еластики Ейлера.

Abstract

A brief overview of research on the static and dynamic stability of a thin rod under axial compression is presented. Within the linear approach, the critical load under static compression was determined by L. Euler. In the work of M.A. Lavrentyev and A.Y. Ishlinsky, it was established that under intensive loading significantly exceeding the Euler static critical load, the mode with a large number of waves in the longitudinal direction has the highest growth rate of the transverse deflection amplitude. Further studies are related to accounting for the propagation of longitudinal waves along the rod. The conditions for the occurrence of parametric resonances have been investigated, and the possibility of stability loss under loads lower than the Euler load has been established. Within the quasi-linear approach, the effect of beats has been identified, involving the transfer of energy from longitudinal vibrations to transverse ones and vice versa. Under long-term exposure to a load exceeding the Euler load, both the linear and quasi-linear approaches do not lead to finite values of the transverse displacement amplitude. Therefore, a nonlinear approach is used. The development of post-critical deformations of the rod is investigated.

Keywords: rod stability; parametric resonance; beats; Euler's elastica.

Вступ

Основи досліджень статичної стійкості стержнів закладені у працях Л. Ейлера [1]. Експериментальні та теоретичні дослідження, проведені різними авторами [2–5], вказують на необхідність достатньо обережного застосування методів статички в умовах динамічного навантаження. Бажано простежити вищезазначену обставину стосовно дослідження задач стійкості [6, 7]. У роботі 1949 року Ішлінський і Лаврентьєв (ІЛ) [8] звернули увагу на специфіку результатів, отриманих при дослідженні стійкості стержня під дією ударного навантаження. Виявлено, що при інтенсивному навантаженні, яке суттєво перевищує ейлерове статичне критичне навантаження, найбільшу швидкість зростання амплітуди має форма з великою кількістю хвиль у поздовжньому напрямку.

При статичному тиску стержень може втратити стійкість прямолінійної форми, переходячи у суміжні форми рівноваги (це класична задача Ейлера, якою він почав займатися ще у 1744 році [1, 5, 9]). При динамічному поздовжньому навантаженні задача значно складніша. При строгій постановці вздовж стержня поширюються поздовжні пружні хвилі, які, своєю чергою, можуть породжувати інтенсивні поперечні коливання. Однак у зв'язку з тим, що час поширення поздовжньої хвилі вздовж довжини стержня суттєво менший за найменший період поперечних коливань, як правило, використовується наближена модель, згідно з якою вважається, що поздовжня хвиля поширюється стержнем миттєво, а осьова стискальна сила є сталою по довжині. За такої постановки розв'язано задачі з раптовим прикладанням скінченного навантаження, що перевищує критичне значення у статистиці [8],

з навантаженням, яке лінійно зростає з часом [7], а також з навантаженням, що періодично змінюється в часі та призводить до параметричного резонансу [10, 11].

У роботах [12–15] задача розв’язується у більш строгій постановці, за якої враховується скінченна швидкість поширення поздовжніх хвиль у стержні. Розглядається як короткочасний поздовжній удар за припущення, що час удару менший за час проходження поздовжньої хвилі по подвоєній довжині стержня [12, 14, 15], так і тривалий удар [13]. У лінійній постановці знайдено умови виникнення параметричного резонансу, побудовано область нестійкості на площині «довжина стержня — навантаження» та обчислено характеристичні показники. Із використанням методу Бубнова–Гальоркіна побудовано наближений розв’язок нелінійної задачі, сформульованої в [12]. На відміну від [12], початкові недосконалості стержня не враховуються, а виникнення поперечних коливань пов’язане з ненульовими початковими умовами. Встановлено, що при квазілінійній постановці амплітуда поперечних коливань суттєво менша, ніж при лінійній. Виявлено биття, пов’язані з переходом енергії поперечних коливань у поздовжні та навпаки. Як у лінійній, так і в нелінійній постановці досліджено вплив в’язкопружних сил опору на коливання, викликані ударом.

При тривалому силовому впливі з навантаженням, що перевищує ейлерове, як лінійний, так і квазілінійний підхід не приводить до скінченних значень амплітуди поперечних переміщень. Тому використовується нелінійний підхід. Досліджується розвиток закритичних деформацій стержня та відзначається зв’язок картини деформування з ефектом, виявленим ІЛ, а також з еластиками Ейлера.

Аналітичні дослідження

1. Постановка задачі та безрозмірні змінні

У лінійному наближенні поширення поздовжніх хвиль у в’язкопружному стержні описується рівнянням [13, 14]

$$ES \left(1 + \frac{\delta}{\omega} \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \gamma S \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \quad (1)$$

Граничні умови задамо у вигляді

$$ES \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0} = -P_0(t), \quad u(L, t) = 0, \quad 0 \leq x \leq L. \quad (2)$$

Тут $u(x, t)$ - поздовжнє переміщення перерізу, x - поздовжня координата, t - час, E і γ - модуль Юнга та густина матеріалу, S - площа поперечного перерізу, δ - коефіцієнт в’язкості [16], ω - характерна частота коливань, $P_0 > 0$ стискальна сила на кінці стержня.

Малі поперечні коливання стержня згідно з моделлю плоских перерізів Бернуллі–Ейлера описуються рівнянням

$$EJ \left(1 + \frac{\delta}{\omega} \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\partial}{\partial x} \left(P(x, t) \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \gamma S \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0, \quad P(x, t) = -ES \frac{\partial u}{\partial x}, \quad (3)$$

де $w(x, t)$ - поперечне відхилення осі стержня, віднесене до його довжини, J - момент інерції поперечного перерізу. Кінці $x = 0$ та $x = L$ вважаємо шарнірно опертими ($w = w'' = 0$).

В рівняннях (1) - (3) перейдемо до безрозмірних змінних x_1 , t_1 , за яких довжина стержня та час проходження поздовжньої хвилі вздовж довжини стержня дорівнюють одиниці:

$$x = Lx_1, \quad t = \frac{L}{c} t_1, \quad c^2 = \frac{E}{\gamma}, \quad u = Lu_1, \quad w = Lw_1, \quad u(1, t) = 0, \quad (4)$$

де c - швидкість звуку. Тоді, опускаючи індекс $_1$, перепишемо (1) - (3) у вигляді

$$\left(1 + \frac{\delta}{\omega} \frac{\partial}{\partial t}\right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0} = -\varepsilon_0(t) = -\frac{P_0(t)}{ES}, \quad u(1, t) = 0, \quad (5)$$

$$\mu^2 \left(1 + \frac{\delta}{\omega} \frac{\partial}{\partial t}\right) \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\varepsilon(x, t) \frac{\partial w}{\partial x}\right) + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0, \quad \varepsilon(x, t) = -\frac{\partial u}{\partial x}, \quad (6)$$

де $\varepsilon(x, t)$ - поздовжня деформація ($\varepsilon(x, t) > 0$ при стиску),

$$\mu^2 = \frac{J}{SL^2} = \left(\frac{r}{L}\right)^2 \ll 1, \quad r = \sqrt{\frac{J}{S}}. \quad (7)$$

2. Розв'язок Ішлінського - Лаврентьєва

Припускається [8], що поздовжні хвилі в стержні відсутні (або зникли внаслідок затухання) і розглядається рівняння (6) при $\delta = 0$, $\varepsilon(x, t) = \varepsilon_0 = \text{const} > 0$:

$$\mu^2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \varepsilon_0 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0. \quad (8)$$

Ейлерова критична деформація дорівнює $\varepsilon_* = \mu^2 \pi^2$. При $\varepsilon_0 > \varepsilon_*$ можлива втрата стійкості за кількома першими формами. При цьому розв'язок рівняння (8) має вигляд

$$w(x, t) = C_m e^{\alpha_m t}, \quad \alpha_m = \sqrt{\varepsilon_0 m^2 \pi^2 - \mu^2 m^4 \pi^4}, \quad m^2 < \frac{\varepsilon_0}{\mu^2 \pi^2}. \quad (9)$$

Для цих m будемо характеризувати інтенсивність зростання амплітуди m -ї форми втрати стійкості параметром α_m . На рис. 1 для $\mu = 0,002$ наведено графіки функцій $\alpha_m(\varepsilon_0)$ для $m=1, 2, \dots, 8$.

Із зростанням деформації стиску ε_0 зростає як максимальна інтенсивність збільшення амплітуди, так і номер відповідної форми.

3. Поширення поздовжніх хвиль

У підході ІЛ [8] передбачалося, що поздовжня сила не залежить ні від часу t , ні від координати x . Знайдемо залежність $\varepsilon(x, t)$. Поширення поздовжніх хвиль у стержні описується задачею (5) за нульових початкових умов.

При $\delta = 0$ подання розв'язку рівняння (5) у вигляді $u(x, t) = f(x - t) + g(x + t)$ дозволяє встановити [12] його періодичність: $u(x, t) = u(x, t+4)$.

Подамо розв'язок задачі (5) у вигляді ряду за власними функціями задачі.

$$v''(x) + \nu^2 v(x) = 0, \quad v'(0) = 0, \quad v(1) = 0, \quad ()' = d()/dx. \quad (10)$$

Знаходимо

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(t) v_k(x), \quad v_k(x) = \cos \nu_k x, \quad \nu_k = (k - 0.5)\pi, \quad (11)$$

$$\ddot{\varphi}_k + \delta \nu_k \dot{\varphi}_k + \nu_k^2 \varphi_k = -2\varepsilon_0(t), \quad \varphi(0) = \dot{\varphi}(0) = 0,$$

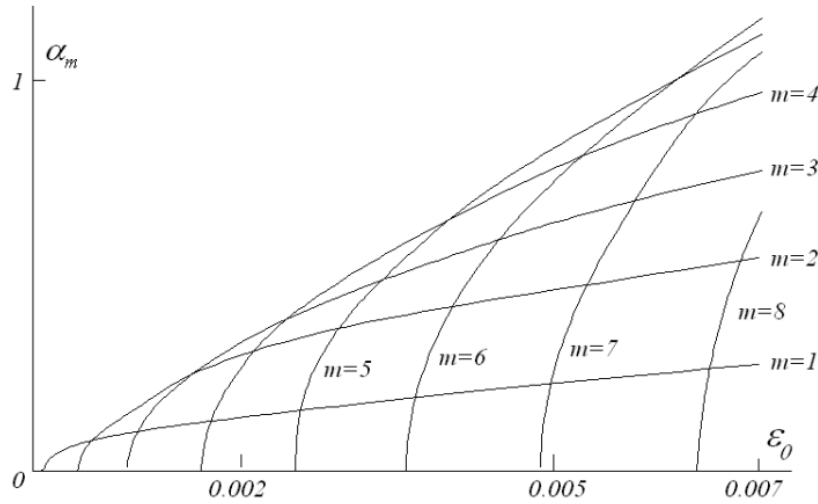


Рис.1. Інтенсивність зростання амплітуди m-ї форми

де крапкою позначено похідну за часом. Осьове напруження $\varepsilon(x,t)$ подамо у вигляді

$$\varepsilon(x, t) = -\frac{\partial u}{\partial x} = 2\varepsilon_0 \sum_{k=1}^{\infty} \nu_k \varphi_k(t) \sin \nu_k x = 2\varepsilon_0 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\psi_k(t)}{\nu_k} \sin \nu_k x. \quad (12)$$

Наведемо функції $\psi_k(t)$ для ряду ударних імпульсів $\varepsilon_0(t)$.

$$\varepsilon_0(t) = \varepsilon_0 = \text{const} \Rightarrow \psi_k(t) = 1 - \cos(\nu_k t) e^{-\delta_{1k} t/2}, \quad \delta_{1k} = \delta \nu_k. \quad (13)$$

$$\varepsilon_0(t) = \begin{cases} \varepsilon_0, & t \leq \tau, \\ 0, & t > \tau \end{cases} \Rightarrow \psi_k(t) = \begin{cases} 1 - \cos(\nu_k t) e^{-\delta_{1k} t/2}, & t \leq \tau, \\ (\cos \nu_k(t - \tau) - \cos \nu_k t) e^{-\delta_{1k} t/2}, & t > \tau, \end{cases} \quad (14)$$

де τ - тривалість імпульсу. Також будуть розглянуті інші імпульси.

Формули (13) і (14) наближено (при $\delta \ll 1$) враховують вплив в'язкості. За її відсутності слід вважати $\delta = 0$.

4. Збудження поперечних коливань, спричинених поздовжніми напруженнями

Розв'язок рівняння (6), що задовольняє умови шарнірного опирання, шукаємо у вигляді ряду Фур'є.

$$w(x, t) = \sum_{m=1}^N X_m(x) T_m(t), \quad X_m(x) = \sin m\pi x. \quad (15)$$

Функції $T_m(t)$ задовольняють систему рівнянь

$$\frac{d^2 T_m}{dt^2} + \delta_{2m} \frac{dT_m}{dt} + \omega_m^2 T_m(t) - \sum_{n=1}^N a_{mn}(t) T_n(t) = 0, \quad \omega_m = \mu m^2 \pi^2, \quad m = 1, \dots, N, \quad (16)$$

де $\delta_{2m} = \delta_{\text{ом}}$ і коефіцієнти

$$a_{mn}(t) = 2 \int_0^1 e(x, t) X'_m(x) X'_n(x) dx. \quad (17)$$

Для імпульсів виду (13) і (14) при $\delta = 0$ функції $a_{mn}(t)$ є періодичними з періодом $T = 4$.

5. Параметричний резонанс

Розглянемо стійкість нульового розв'язку системи (16). Ця система містить два безрозмірні параметри: малу міру амплітуди поздовжньої деформації ε_0 та малий параметр μ , що характеризує відносну товщину стержня $\ell = \mu^{-1}$.

При $\varepsilon_0 = 0$ частоти власних коливань системи (16) дорівнюють ω_n , а частота θ параметричного збудження дорівнює $\theta = 2\pi/T = \pi/2$. Методи дослідження параметричних коливань добре відомі [11, 17, 18]. При малих ε_0 області нестійкості можливі лише в околах значень

$$|\omega_n \pm \omega_m| = k\theta, \quad m, n, k = 1, 2, \dots \quad (18)$$

Для обчислення характеристичних показників перепишемо систему (18) у вигляді системи $2N$ рівнянь першого порядку.

$$\frac{dy}{dt} = B(\theta t)y, \quad B(\theta(t+T)) = B(\theta t), \quad T = 4, \quad (19)$$

та побудуємо матрицю монодромії $Y(T)$ у результаті чисельного розв'язання матричної задачі Коші.

$$\frac{dY}{dt} = B(\theta t)Y, \quad Y(0) = E, \quad (20)$$

де E - одинична матриця порядку $2N$. Характеристичні показники ρ_j знаходимо з алгебраїчного рівняння порядку $2N$: $|Y(T) - \rho E| = 0$. Покладемо $\rho = \max_j |\rho_j|$. Тоді при $\rho > 1$ нульовий розв'язок є нестійким, а величина ρ , що визначає швидкість зростання розв'язку пропорційно $\rho^{t/4}$, може слугувати мірою нестійкості. Параметр ρ пов'язаний із параметром α_m , що входить до формули (2.2), співвідношенням

$$\alpha_m = \frac{\ln \rho}{4}. \quad (21)$$

На площині параметрів (ℓ, ε_0) за відсутності в'язкості область параметричної нестійкості прилягає до осі $\varepsilon_0 = 0$ при

$$\ell = \frac{2\pi(n^2 \pm m^2)}{k}, \quad m, n, k = 1, 2, \dots \quad (22)$$

Множина критичних довжин, що визначається формулою (22), є всюди щільною, а самі резонанси збуджуються з різними швидкостями зростання амплітуд коливань. При $m = n, k = 1$ отримуємо головні резонанси, при $m \neq n$ - комбінаційні резонанси, а при $k > 1$ резонанси на обертонах. У [14] показано, що комбінаційні резонанси та резонанси на обертонах збуджуються суттєво слабше. Тому обмежимося розглядом головних резонансів $\ell_m = 4\pi m^2$.

Нехтуючи взаємодією форм поперечних коливань, приходимо до рівняння:

$$\frac{d^2 T_m}{dt^2} + b_m(t)T_m(t) = 0, \quad b_m(t) = \omega_m^2 - a_{mm}(t), \quad (23)$$

Де

$$a_{mm}(t) = 8m^2\varepsilon_0 \sum_{k=1}^{\infty} C_{km}(1 - \cos \nu_k t), \quad C_{km} = \frac{1}{(2k-1)^2 - 16m^2} + \frac{1}{(2k-1)^2}. \quad (24)$$

Після перетворень з урахуванням співвідношення $\sum_{k=1}^{\infty} C_{km} = \pi^2/8$ отримуємо

$$b_m(t) = \omega_m^2 - m^2\pi^2\varepsilon_0 + 8m^2\varepsilon_0\eta_m(t), \quad \eta_m(t) = \sum_{k=1}^{\infty} C_{km} \cos \nu_k t. \quad (25)$$

При $\eta_m(t) = 0$ можлива статична втрата стійкості за m -ю формою при $\varepsilon_0 \geq \varepsilon_{*m} = \mu\omega_m$, що повністю відповідає підходу ІЛ. Наявність періодичної функції $\eta_m(t)$ призводить до того, що втрата

стійкості за m - ю формою відбувається і при менших значеннях ε_0 . У [14] наведено чисельні результати.

Для стержня з довжиною $\ell = 100\pi = 314,2$ швидкість зростання амплітуди поперечних коливань з урахуванням поширення поздовжніх хвиль при $\varepsilon_0 \leq 0,007$ наведена на рис. 2. Порівняно зі сталою осьовою деформацією ε_0 , наявність поздовжніх хвиль призводить до двох ефектів. По-перше, ейлерова критична деформація зміщується, а по-друге, з'являються параметричні резонанси. Для форм з $m=1,2,\dots,6$ зміщення порівняно з моделлю ІЛ відбувається у бік збільшення ε_0 , а форми з $m=7$ і $m=8$ виявляють аномальну поведінку.

Параметричні резонанси позначені на рис. 2 зірочками. Вони з'являються раніше за ейлерові форми втрати стійкості. Раніше за інші виникає резонанс з $m=6^*$, який реалізується при $0,00134 < \varepsilon_0 < 0,00334$.

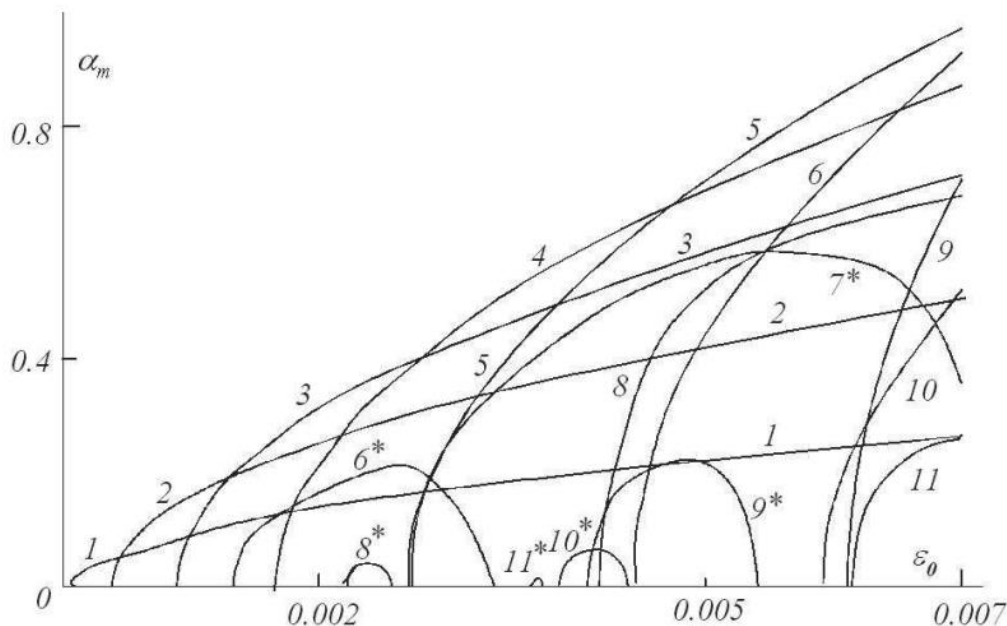


Рис. 2. Інтенсивність зростання амплітуди m -ї форми з урахуванням поширення поздовжніх хвиль

При короткочасному ударі тривалістю τ поздовжня деформація $\varepsilon(x,t)$ задається формулою (14), а середнє значення коефіцієнта $a_{mm}(t)$ у рівнянні (23) при $t > \tau$ дорівнює нулю. Тому визначальний вплив на втрату стійкості мають не ейлерові критичні навантаження, а параметричні резонанси. У [14] наведено чисельні приклади.

6. Вплив в'язкості в лінійному наближенні

Викладене вище описує швидкість зростання амплітуди поперечного руху стержня в початковий період часу. З плином часу у випадку втрати стійкості або параметричного резонансу амплітуда прямує до нескінченності. Для отримання обмежених амплітуд існують дві можливості: урахування опорів та розгляд нелінійної постановки.

У підході ІЛ поздовжня деформація є сталою, у зв'язку з чим вплив в'язкості не розглядається.

Розглянемо спочатку вплив малої в'язкості (наприклад, $0,001 \leq \delta \leq 0,02$) на поперечні коливання при тривалому ударі з урахуванням поширення поздовжніх хвиль. Вплив в'язкості проявляється як у затуханні змінної складової поздовжньої деформації, так і в демпфуванні поперечних коливань.

Запишемо рівняння для функції $T_m(t)$, що визначає амплітуду m - ї форми:

$$\frac{d^2 T_m}{dt^2} + \delta_{2m} \frac{dT_m}{dt} + (\omega_m^2 - m^2 \pi^2 \varepsilon_0 + 8m^2 \varepsilon_0 \eta_m(t)) T_m(t) = 0, \quad (26)$$

Де

$$\eta_m(t) = \sum_{k=1}^{\infty} C_{km} \cos \nu_k t e^{\delta_{k1} t}, \quad \delta_{1k} = \delta \nu_k, \quad \delta_{2m} = \delta \omega_m. \quad (27)$$

Коефіцієнти рівняння (26) при $\delta_{1k} \neq 0$ вже не є періодичними, і для оцінки швидкості зростання амплітуди доводиться інтегрувати це рівняння чисельно на великому інтервалі часу.

Наприклад, при

$$\ell = 45, \quad m = 2, \quad \varepsilon_0 = 0,0035 < \varepsilon^* = 0,00487, \quad \delta_{1k} \neq 0 \quad (28)$$

проведемо інтегрування на великому інтервалі часу при різних коефіцієнтах опору δ . Для ненульових початкових умов переміщення спочатку зростає (з осциляціями), а потім починає спадати у зв'язку із затуханням поздовжніх коливань. У табл. 1 для різних δ наведено максимальне значення амплітуди $T_2^{\max}$.

Таблиця 1 - Залежність максимальної амплітуди від коефіцієнта опору

δ	0,02	0,01	0,007	0,005	0,003	0,002	0,0015	0,0011
$T_2^{\max}$	1,2	2,8	5,3	12,8	87,3	942,8	9823,0	1021345,0

Цей приклад є цікавим тим, що деформація ε_0 менша за ейлерову критичну деформацію ε^* . Невеликий опір не може запобігти розвитку великих поперечних коливань.

7. Квазілінійний підхід

Якщо тривало діюче навантаження перевищує критичне ейлерове навантаження, то при лінійному підході (як у підході ІЛ, так і з урахуванням поширення поздовжніх хвиль) має місце необмежене зростання амплітуди поперечних коливань. Урахування в'язкопружних сил не запобігає необмеженому зростанню амплітуди. Тому лінійний підхід описує рух лише на початковому інтервалі часу, коли амплітуда поперечних переміщень є малою. Із зростанням часу поздовжні хвилі затухають, і стержень набуває форми однієї з еластик Ейлера [19]. Детальніше це питання розглядається в пп. 8, 9.

Якщо тривало діюче навантаження менше за ейлерове, при певних значеннях параметрів можливий параметричний резонанс, що також призводить до необмеженого зростання амплітуди, а при врахуванні в'язкопружних сил — до істотного зростання амплітуди. Така ж якісна картина має місце і у випадку короткочасного імпульсу. Розглянутий нижче квазілінійний підхід, при якому поздовжня деформація стиску ε пов'язана з переміщеннями осі стержня формулою

$$-\varepsilon = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2, \quad (29)$$

призводить до скінченного значення максимальної амплітуди.

Для виведення системи рівнянь будемо виходити з принципу Остроградського–Гамільтона, при цьому, як і раніше, приймаючи гіпотезу плоских перерізів та нехтуючи моментом сил інерції обертального руху перерізів,

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (T - \Pi) dt = \delta A, \quad (30)$$

де T і Π - кінетична та потенціальна енергії, δA елементарна робота зовнішньої сили. У безрозмірних змінних ці величини наближено дорівнюють

$$T = \frac{1}{2} \int_0^1 \left(\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right) dx, \quad \Pi = \frac{1}{2} \int_0^1 \left(\varepsilon^2 + \mu^2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 \right) dx, \quad \delta A = \delta u(0, t) \varepsilon_0(t). \quad (31)$$

Варіюванням співвідношення (30) за u та w отримуємо шукану систему рівнянь і граничні умови.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= 0, & -\varepsilon &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2, & \mu^2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\varepsilon \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= 0, \\ w &= \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0, & x &= 0, 1; & \varepsilon(0, t) &= \varepsilon_0(t), & u(1, t) &= 0. \end{aligned} \quad (32)$$

Початкові умови візьмемо у вигляді

$$u(x, 0) = 0, \quad w(x, 0) = \varphi(x), \quad \left. \frac{\partial w}{\partial t} \right|_{t=0} = 0. \quad (33)$$

Система (32) є еквівалентною розглянутим вище рівнянням (5) і (6), якщо вважати $\varepsilon = -\partial u / \partial x$, $\delta = 0$. Наближений розв'язок задачі (32), (33) шукаємо у вигляді

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^K a_k(t) \cos((k - 0,5)\pi x), \quad w(x, t) = \sum_{m=1}^M b_m(t) \sin(m\pi x). \quad (34)$$

Для побудови рівнянь відносно функцій $a_k(t)$ і $b_m(t)$ підставимо (33) у (29) та прирівняємо до нуля коефіцієнти при варіаціях.

$$\frac{d^2 a_k}{dt^2} + \delta_{1k} \frac{da_k}{dt} + \frac{\partial \Phi}{\partial a_k} = \varepsilon_0(t), \quad k = 1, 2, \dots, K, \quad (35)$$

$$\frac{d^2 b_m}{dt^2} + \delta_{2m} \frac{db_m}{dt} + \frac{\partial \Phi}{\partial b_m} = 0, \quad m = 1, 2, \dots, M,$$

$$a_k = \frac{da_k}{dt} = \frac{db_m}{dt} = 0, \quad b_m = b_m^0 \quad \text{при} \quad t = 0, \quad (36)$$

де b_m^0 - задані малі початкові відхилення,

$$\Phi(a_k, b_m) = \frac{1}{2} \int_0^1 \left(\varepsilon^2 + \frac{1}{\ell^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 \right) dx. \quad (37)$$

У систему (35) включено доданки, що враховують в'язкопружність, причому коефіцієнти в'язкості δ_{1k} і δ_{2m} є тими самими, що й у (27).

Розглянемо тривале навантаження при $\varepsilon_0(t) = \varepsilon_0 = \text{const}$ та випадок $\ell = 45$, $\varepsilon_0 = 0,0035$, при якому збуджується параметричний резонанс при $m = 2m$ за навантаження, меншого за ейлерове. При інтегруванні системи (35) покладемо $b_2(0) = 0,0001$, а решту початкових умов вважатимемо рівними нулю. Розглянуто рух без опору та при коефіцієнті в'язкості $\delta = 0,002$ (див. рис. 3, на якому в інтервалі часу $0 \leq t \leq 10000$ наведено резонансну амплітуду $b_2(t)$ та функцію $a_1(t)$, що задає головну частину поздовжнього переміщення).

За відсутності в'язкості рух являє собою незатухаючі биття, при яких відбувається обмін енергією поздовжніх і згинальних коливань. Розрахунки показали, що амплітуда биттів слабо залежить від початкових умов. При $\delta = 0,002$ маємо затухаючі биття, причому швидкість їх затухання сильно

залежить від коефіцієнта в'язкості δ . Також змінилася частота биттів порівняно з випадком без затухання. У лінійному наближенні при $\delta = 0,002$ максимальна амплітуда зросла у 942 рази порівняно з початковим значенням (див. табл. 1), а при нелінійному підході амплітуда биттів від початкових умов не залежить.

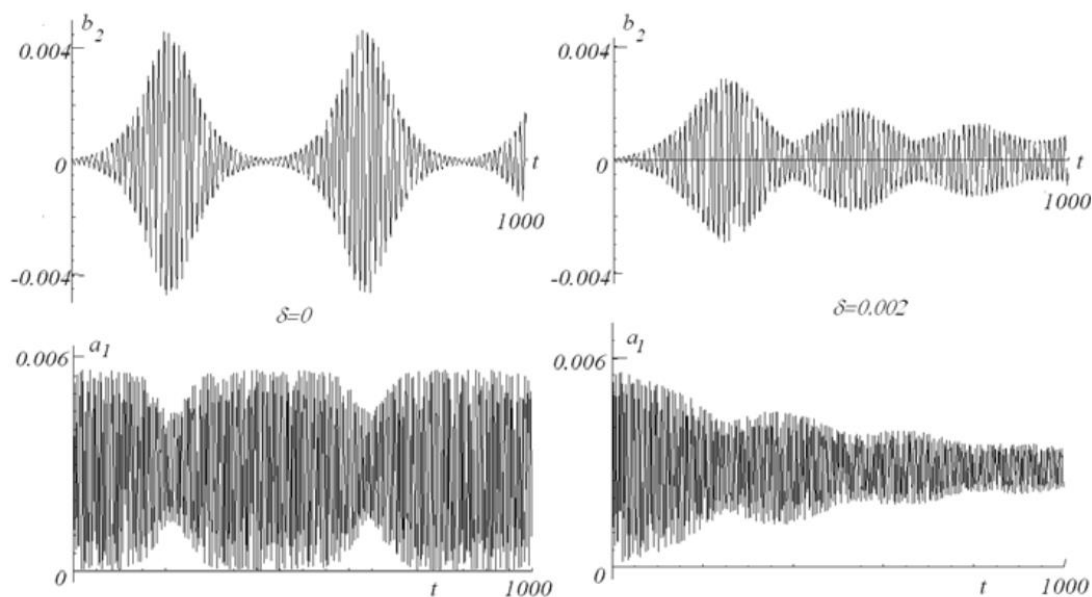


Рис. 3. Тривале збудження при квазілінійному підході

8. Еластики Ейлера

Якщо тривале осьове навантаження перевищує ейлерове, то лінійний (а також квазілінійний) підхід придатні для опису деформацій лише на початковому інтервалі часу. Простежимо розвиток деформацій зі зростанням часу.

Для побудови еластик Ейлера розглянемо плоску деформацію тонкого стержня з шарнірно опертими кінцями А і В, причому кінець А є нерухомим, а кінець В може переміщуватися вздовж прямої АВ. Уздовж цієї ж прямої напрямлена і стала стискальна сила Р (рис. 4).

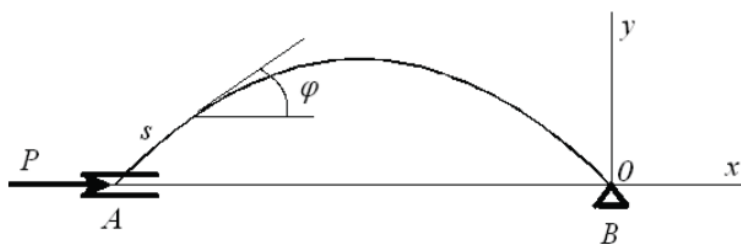


Рис. 4. Нелінійна деформація стержня

Для нерозтяжного стержня його можливі положення рівноваги (які називаються еластиками Ейлера) задовольняють крайову задачу.

$$EI \frac{d^2 \varphi}{ds^2} + Py = 0, \quad \frac{dx}{ds} = \cos \varphi, \quad \frac{dy}{ds} = \sin \varphi, \quad 0 \leq s \leq L, \quad (38)$$

$$y(0) = x(L) = y(L) = 0, \quad \left. \frac{d\varphi}{ds} \right|_{s=0}, \quad \left. \frac{d\varphi}{ds} \right|_{s=L}.$$

Тут s - довжина дуги на осі стержня, x, y, φ - декартові координати точки на осі стержня та кут нахилу осі (рис. 4). Введемо нові безрозмірні змінні (із *).

$$\{x^*, y^*, s^*\} = \frac{\pi}{L} \{x, y, s\}, \quad p = \frac{L^2}{EI\pi^2} P. \quad (39)$$

Опускаючи, перепишемо рівняння (38).

$$\frac{d^2\varphi}{ds^2} + py = 0, \quad \frac{dx}{ds} = \cos \varphi, \quad \frac{dy}{ds} = \sin \varphi, \quad 0 \leq s \leq \pi. \quad (40)$$

При $p < 1$ система (40) має лише нульовий розв'язок. Значення $p = 1$ відповідає вищезгаданій критичній деформації $\varepsilon^* = \mu^2 \pi^2$. Стійкі ненульові розв'язки для ряду значень $p > 1$ наведено на рис. 5 ($p_1 = 1,01$, $p_2 = 1,2$, $p_3 = 1,5$, $p_4 = 2,184$, $p_5 = 3$, $p_6 = 10$). Із зростанням p кінець А стержня наближається до нерухомого кінця В, а при $p_4 = 2,184$ збігається з ним. При $p > p_4$ утворюється петля.

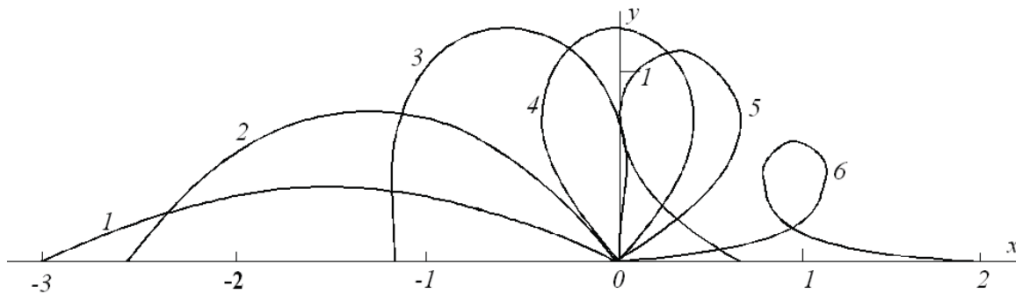


Рис. 5. Еластики Ейлера

9. Чисельний розв'язок

Для побудови форми стиснутого стержня в послідовні моменти часу використовується дискретна апроксимація. У недеформованому стані прямолінійний стержень замінюємо системою з $n + 1$ матеріальних точок з рівними масами M , розташованих на відстанях $L_0 = L/n$ одна від одної. У деформованому стані точки лежать в одній площині та мають декартові координати x_i, y_i , $i = 1, 2, \dots, n+1$. Кінетична та потенціальна енергії системи апроксимуються виразами.

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n M(\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2), \quad \Pi = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n C \varepsilon_i^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=2}^n D \kappa_i^2, \quad (41)$$

Де

$$\varepsilon_i = \frac{r_i}{L_0} - 1, \quad r_i^2 = (x_{i+1} - x_i)^2 + (y_{i+1} - y_i)^2, \quad \kappa_i = \varphi_i - \varphi_{i-1}, \quad \tan \varphi_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i}. \quad (42)$$

Тут ε_i - деформації розтягу, r_i - відстані між сусідніми точками, φ_i - кути нахилу відрізків, що з'єднують сусідні точки. Константи C, D, M пов'язані з параметрами однорідного суцільного стержня співвідношеннями $C = ESL_0$, $D = EIL_0$, $M = \rho SL_0$. Варіація функціоналу Гамільтона за x, y приводить до рівнянь, що описують рух системи з $2n-1$ ступенями вільності. У них додатково введено доданки, що враховують сили опору, пропорційні швидкості точок.

Наведемо деякі чисельні результати. Візьмемо початкові умови, при яких стержень рівномірно стиснутий силою p і є нерухомим. Для збудження поперечних коливань відхилимо одну з точок на малу величину $y_2(0) = \delta$, а решту початкових умов вважаємо нульовими. Візьмемо $n = 40$, $\delta = 0,01$ і розглянемо три значення стискальної сили $p_1 = 1,5$, $p_2 = 10$, $p_3 = 20$. На рис. 6 у послідовні моменти часу наведено результати чисельного інтегрування. При $p = p_1$ можлива втрата стійкості лише за першою формою ($m=1$). Амплітуда зростає і в границі збігається з еластикою Ейлера 3 на рис. 5. При $p = p_2$ можлива втрата стійкості за трьома першими формами ($m = 1, 2, 3$), причому коефіцієнти зростання пропорційні величинам $\alpha_1 = 3$, $\alpha_2 = 4,9$, $\alpha_3 = 3$. Тому в перші моменти часу спостерігається переважне

зростання прогину за формою $m = 2$. Аналогічно при $p = p_3$ можлива втрата стійкості за чотирма формами при $\alpha_1 = 4,36$, $\alpha_2 = 8$, $\alpha_3 = 9,95$, $\alpha_4 = 8$, і спостерігається зростання амплітуди при $m = 3$.

При подальшому зростанні часу у випадках $p = p_2$ та $p = p_3$ відбувається викривлення картини деформування. Точка А наближається до нерухомої точки В, а потім проходить її з утворенням петлі (рис. 5).

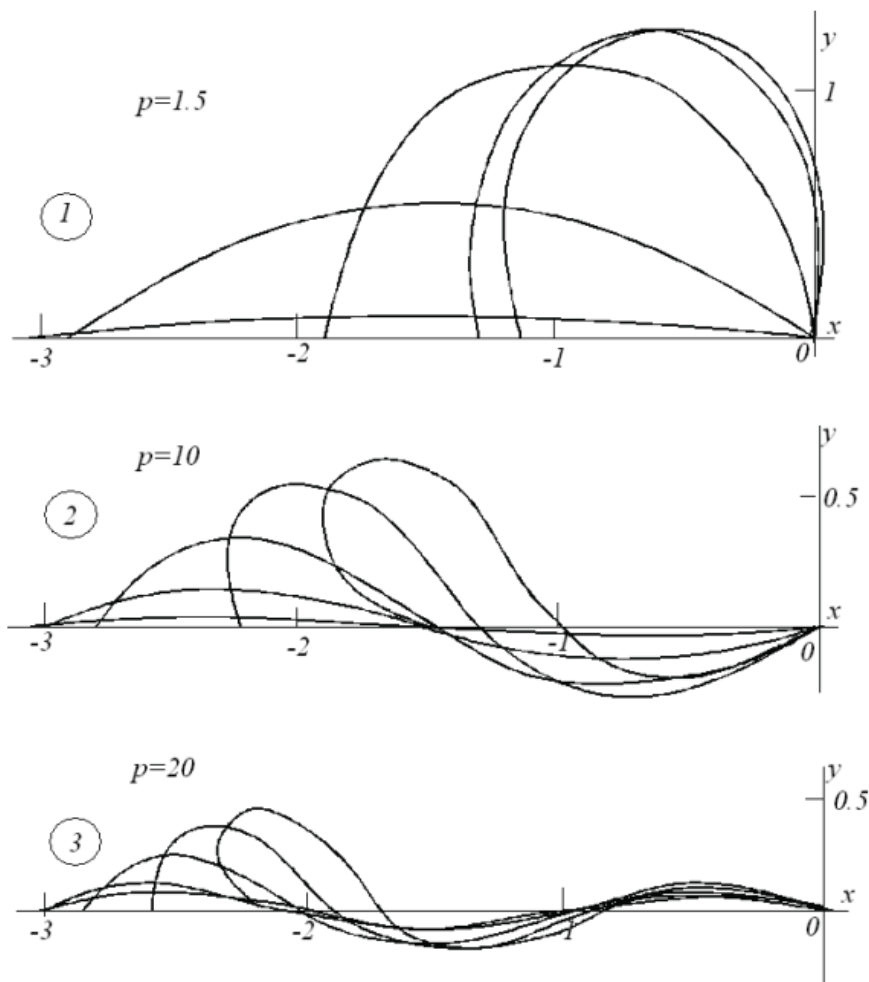


Рис. 6. Послідовні форми зігнутого стержня

Висновки

При розгляді поперечних коливань, викликаних поздовжнім ударом по стержню, слід розрізняти тривалий вплив і короткочасний удар. При тривалому впливі основним параметром, з яким слід порівнювати величину поздовжніх деформацій, викликаних ударом, є критична ейлерова деформація. Якщо прикладена деформація суттєво перевищує ейлерову, можлива втрата стійкості за кількома першими формами, причому найшвидше зростає прогин за однією з форм відповідно до результату ІЛ. Із зростанням часу при $p < 2,184$ стержень набуває форми арки, а при $p > 2,184$ рівноважним може бути лише положення, в якому стержень вивертається і точка А заходить за точку В.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Ейлер Л. Метод знаходження кривих, що мають властивості максимуму або мінімуму / Л. Ейлер. – Лозанна; Женева: Bousquet, 1744.
2. Hutchinson W.J. Dynamic Buckling Estimates / W.J. Hutchinson, B. Budiansky // AIAA Journal. – 1966. – Vol. 4, № 3. – P. 525–530.
3. Knauss W.G. Some Basic Problems in Stress Wave Dominated Fracture / W.G. Knauss, K. Ravi-Chandar // International Journal of Fracture. – 1985. – Vol. 27, № 3–4. – P. 127–143.

4. Тимошенко С.П. Теорія пружної стійкості / С.П. Тимошенко, Дж. Гір. – Нью-Йорк: [McGraw-Hill Education](#), 1961.
5. Базанц З.П. Стійкість конструкцій: пружні, непружні та руйнівні теорії / З.П. Базанц, Л. Цедолін. – Нью-Йорк: Oxford University Press, 2010.
6. Болотін В.В. Динамічна стійкість пружних систем / В.В. Болотін. – Сан-Франциско: Holden-Day, 1964.
7. Simitses G.J. Dynamic Stability of Suddenly Loaded Structures / G.J. Simitses. – Нью-Йорк: Springer, 1990.
8. Hoff N.J. The Dynamics of the Buckling of Elastic Columns / N.J. Hoff // Journal of Applied Mechanics. – 1951. – Vol. 18, № 1. – P. 68–74.
9. Thompson J.M.T. Instabilities and Catastrophes in Science and Engineering / J.M.T. Thompson. – Лондон: Wiley, 1982.
10. Nayfeh A.H. Nonlinear Oscillations / A.H. Nayfeh, D.T. Mook. – Нью-Йорк: Wiley, 1979.
11. Болотін В.В. Поперечні коливання та критичні швидкості / В.В. Болотін. – Единбург: Oliver and Boyd, 1964.
12. Graff K.F. Wave Motion in Elastic Solids / K.F. Graff. – Нью-Йорк: Dover Publications, 1991.
13. Belytschko T. Nonlinear Finite Elements for Continua and Structures / T. Belytschko, W.K. Liu, B. Moran. – Чичестер: Wiley, 2000.
14. Baker W.E. Dynamic Plasticity of Rods / W.E. Baker, C.H. Wang. – Нью-Йорк: Pergamon Press, 1971.
15. Lindberg H.E. Dynamic Pulse Buckling of Elastic-Plastic Columns / H.E. Lindberg, D.S. Florence // Journal of Engineering Mechanics Division. – 1987. – Vol. 113, № 5. – P. 664–681.
16. Крістенсен Р.М. Теорія в'язкопружності: вступ / Р.М. Крістенсен. – Нью-Йорк: [Academic Press](#), 1982.
17. Floquet G. Sur les équations différentielles linéaires à coefficients périodiques / G. Floquet // Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure. – 1883. – Vol. 12. – P. 47–88.
18. Якубович В.А. Лінійні диференціальні рівняння з періодичними коефіцієнтами та їх застосування / В.А. Якубович, В.М. Старжинський. – Нью-Йорк: Wiley, 1975.
19. Антман С.С. Нелінійні задачі теорії пружності / С.С. Антман. – Нью-Йорк: Springer, 2005.

Гуцалюк Олександр Володимирович - старший викладач кафедри опору матеріалів, теоретичної механіки та інженерної графіки, Вінницький національний технічний університет. Email: oleksandrompm@mail.com

Барбалиук Максим Сергійович - студент гр. 2Б-24б, факультет будівництва цивільної та екологічної інженерії, Вінницький національний технічний університет. Email: destroyer.maksimka@gmail.com

Науковий керівник: Гуцалюк Олександр Володимирович - старший викладач каф. "Опору матеріалів, теоретичної механіки та інженерної графіки" Вінницький національний технічний університет, Вінниця, e-mail: oleksandrompm@mail.com.

Oleksandr Volodymyrovych Hutsaliuk - Senior Lecturer at the Department of Strength of Materials, Theoretical Mechanics and Engineering Graphics, Vinnytsia National Technical University. Email: oleksandrompm@mail.com

Barbaliuk Maksym Serhiyovych - student group 2B-24b, Faculty of Civil and Environmental Engineering, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia, e-mail: destroyer.maksimka@gmail.com

Scientific supervisor: Oleksandr Volodymyrovych Hutsaliuk - Senior Lecturer at the Department of Strength of Materials, Theoretical Mechanics and Engineering Graphics, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia, e-mail: oleksandrompm@mail.com.