УДК 621.3

Ю. Г. Ведміцький

ТЕОРЕМА ПРО ТРИВІАЛЬНИЙ ХАРАКТЕР ІНВАРІАНТНОСТІ ПЕРЕДАТНОЇ ФУНКЦІЇ ДО ФУНКЦІЇ ВХІДНОЇ ДІЇ

Вінницький національний технічний університет

Анотація

В роботі на прикладі електричного кола сформульовано та доведено теорему про тривіальну інваріантність передатної функції лінійної непараметричної та стаціонарної за топологічною структурою динамічної системи відносно функції вхідної дії. Змістова сутність теореми визначає умови та накладає обмеження на застосування операторного методу під час розв'язування фундаментальної задачі Коші.

Ключові слова: теоретична електротехніка, електричне коло, динамічна система, задача Коші, диференціальні рівняння, нульові та ненульові початкові умови, інтегральне перетворення Лапласа, передатна функція, електричні напруга та струм

Abstract

Using the example of an electric circuit, this paper formulates and proves a theorem on the trivial invariance of the transfer function of a linear non-parametric and topologically stationary dynamic system with respect to the input action function. The substantive essence of the theorem defines the conditions and imposes constraints on the application of the operational method when solving the fundamental Cauchy problem.

Keywords: theoretical electrical engineering, electric circuit, dynamic system, Cauchy problem, differential equations, zero and non-zero initial conditions, Laplace integral transform, transfer function, electric voltage and current

Зумовлена неналежними діями хибна практика, з якою, на превеликий жаль, раз у раз доводиться стикатися в технічній літературі та техногенному довкіллі під час розв'язування фундаментальної задачі Коші за допомогою *операторного методу* аналізу перехідних процесів в динамічних системах, наприклад, в лінійних електричних колах, не може не породжувати невідворотного бажання знов і знов акцентувати увагу на питаннях умов застосовуваності зазначеного методу і змушує автора вже вкотре формулювати та доводити теорему про *тривіальний (!) характер інваріантності передатної функції динамічної системи до функції вхідної дії.*

Змістова сутність теореми полягає в тому, що *передатна функція* електричного кола здатна визначати його динамічні властивості у *незалежності* (!) *від вхідної дії* лише за нульових значень початкових умов. А у разі порушення цих обмежень передатна функція динамічної системи набуває безпосередньої (прямої) *залежності від функції вхідної дії*, що унеможливлює і практичне використання передатної функції, і, власне, її визначення.

Отже, розглянемо, довільне стаціонарне за топологічною структурою лінійне електричне коло з одним джерелом електричної енергії (е.р.с. або струму), яке слугуватиме генератором збурення динамічної системи дією $x(t)$ на її вході. Реакцією на виході слугуватиме функція $y(t)$, яка за фізичним змістом виявлятиме себе або як миттєвий струм в довільній вітці електричного кола, або як миттєва напруга на будь-якій його ділянці [1-9].

Тоді заявлену вище теорему сформулюємо та доведемо наступним чином.

Теорема.

Інваріантність передатної функції лінійної непараметричної та стаціонарної за топологічною структурою динамічної системи до функції вхідної дії є тривіальною.

Доведення.

Математичний зв'язок між дією та реакцією на неї в лінійній непараметричній та стаціонарній за топологічною структурою динамічній системі із зосередженими параметрами встановлюється математичним оператором, що належить до класу лінійних звичайних диференціальних рівнянь:

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \frac{d^k y}{d t^k} = \sum_{s=0}^{m} b_s \frac{d^s x}{d t^s}, \qquad (1)$$

отриманих на підставі фізичних законів, які підпорядковують собі силові та енергетичні процеси, що спостерігаються в технічній системі, а також математичних співвідношень, які виявляють основні властивості окремо узятих основних елементів, з яких складається система. У разі електричного кола із зосередженими параметрами такими фізичними законами слугують закони Кірхгофа, а математичними співвідношеннями – компонентні співвідношення [1-9].

Оскільки розв'язок заявленої задачі має бути представлений в операторній формі, скористаємося інтегральним перетворенням Лапласа і перейдемо до зображень: спочатку вхідної дії та реакції на неї електричного кола

$$X(p)=\int_0^{\infty} x(t)e^{-pt}\,dt = L\{x(t)\},$$
$$Y(p)=\int_0^{\infty} y(t)e^{-pt}\,dt = L\{y(t)\}, \tag{2}$$

а потому – функцій лінійних комбінацій лівої та правої частин диференціального рівняння (1):

$$L\left\{\sum_{k=0}^{n} a_k \frac{d^k y}{dt^k}\right\} = L\left\{\sum_{s=0}^{m} b_s \frac{d^s x}{dt^s}\right\}. \tag{3}$$

Відносно отриманого алгебраїчного рівняння (3) скористаємося лінійною властивістю інтегрального перетворення Лапласа

$$\sum_{k=0}^{n} a_k L\left\{\frac{d^k y}{dt^k}\right\} = \sum_{s=0}^{m} b_s L\left\{\frac{d^s x}{dt^s}\right\}. \tag{4}$$

Теорема про диференціювання оригіналу, відповідно до якої:

$$L\left\{\frac{d^s x}{dt^s}\right\} = p^s X(p) - \left[p^{s-1}x(0_+) + p^{s-2}x'(0_+) + \cdots + p\,x^{(s-2)}(0_+) + x^{(s-1)}(0_+)\right] =$$
$$= p^s X(p) - \sum_{\tau=0}^{s-1} p^{\tau}\, x^{(k-\tau-1)}(0_+), \tag{5}$$

$$L\left\{\frac{d^k y}{dt^k}\right\} = p^k Y(p) - \left[p^{k-1}y(0_+) + p^{k-2}y'(0_+) + \cdots + p\,y^{(k-2)}(0_+) + y^{(k-1)}(0_+)\right] =$$
$$= p^k Y(p) - \sum_{\nu=0}^{k-1} p^{\nu}\, y^{(k-\nu-1)}(0_+), \tag{6}$$

завершить процедуру математичних перетворень.

Таким чином, математичний зв'язок поміж функціями зображень вхідної дії $X(p)$ та реакції на неї $Y(p)$ набуває вигляду:

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \left[p^k Y(p) - \sum_{\nu=0}^{k-1} p^{\nu}\, y^{(k-\nu-1)}(0_+)\right] = \sum_{s=0}^{m} b_s \left[p^s X(p) - \sum_{\tau=0}^{s-1} p^{\tau}\, x^{(k-\tau-1)}(0_+)\right], \tag{7}$$

або

$$Y(p)\sum_{k=0}^{n} a_k p^k = X(p)\sum_{s=0}^{m} b_s p^s + \sum_{k=0}^{n}\sum_{\nu=0}^{k-1} a_k y^{(k-\nu-1)}(0_+)\, p^{\nu} - \sum_{s=0}^{m}\sum_{\tau=0}^{s-1} b_s\, x^{(k-\tau-1)}(0_+)\, p^{\tau}. \tag{8}$$

Тоді з урахуванням (8) для *передатної функції динамічної системи* за вхідною дією $x(t)=L^{-1}\{X(p)\}$ та реакцією на неї $y(t)=L^{-1}\{Y(p)\}$ остаточно отримуємо:

$$K_y(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{\sum_{s=0}^{m} b_s p^s}{\sum_{k=0}^{n} a_k p^k} + \frac{\sum_{k=0}^{n}\sum_{\nu=0}^{k-1} a_k y^{(k-\nu-1)}(0_+)\, p^{\nu} - \sum_{s=0}^{m}\sum_{\tau=0}^{s-1} b_s\, x^{(k-\tau-1)}(0_+)\, p^{\tau}}{\sum_{k=0}^{n} a_k p^k} \times \frac{1}{X(p)}. \tag{9}$$

Теорему доведено. Отримане співвідношення (9) у разі детривіалізації початкових умов виявляє зазначену в теоремі безпосередню залежність передатної функції досліджуваної динамічної системи від функції вхідної дії.

Висновки

В роботі на прикладі електричного кола сформульовано та доведено теорему про тривіальний характер інваріантності передатної функції лінійної непараметричної та стаціонарної за топологічною структурою динамічної системи відносно функції вхідної дії. Змістова сутність теореми визначає умови та накладає обмеження на застосування операторного методу під час розв'язування фундаментальної задачі Коші.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Теоретичні основи електротехніки: підручник / В. С. Бойко, В. В. Бойко. – К.: ІВЦ "Політехніка", 2004. – 272 с.

2. Математичні методи ідентифікації динамічних систем : навчальний посібник / Б. І. Мокін, В. Б. Мокін, О. Б. Мокін. – Вінниця : ВНТУ, 2010. – 263 с.

3. Теоретичні основи електротехніки. Перехідні процеси в лінійних колах. Синтез лінійних кіл. Електричні та магнітні нелінійні кола: підручник / Ю. О. Карпов, Ю. Г. Ведміцький; за ред. проф. Ю. О. Карпова. – Херсон : ОЛДІ-ПЛЮС, 2019. – 456 с.

4. Теорія автоматичного керування : підручник / М. Г. Попович, О. В. Ковальчук. – К. : Либідь, 2007. – 657 с.

5. Теоретичні основи електротехніки. Електромагнітне поле : підручник / Ю. О. Карпов, Ю. Г. Ведміцький. – Херсон : ОЛДІ-ПЛЮС, 2014. – 392 с.

6. Теоретичні основи електротехніки. Усталені режими лінійних електричних кіл із зосередженими та розподіленими параметрами : підручник / Ю. О. Карпов, С. Ш. Кацив, Ю. Г. Ведміцький; під ред. проф. Ю. О. Карпова – Вінниця : ВНТУ, 2011. – 377 с.

7. Ведміцький Ю. Г. Тектологія динамічних систем і явище гіперсилової взаємодії в структурних рівняннях узагальненого електричного кола / Ю. Г. Ведміцький // Наукові праці Вінницького національного технічного університету. – 2018. – №2. – С. 1-11.

8. Ведміцький Ю. Г. Узагальнення рівнянь Лагранжа та Лагранжа-Максвелла для консервативних динамічних систем з урахуванням дії надінерційних та субпотенціальних сил : препринт / Ю. Г. Ведміцький / Zenodo. 2026. DOI: https://doi.org/10.5281/zenodo.19333411

9. Ведміцький Ю. Г. Інтерактивність дисипативних сил в функціях розсіювання Релея та узагальнені рівняння Лагранжа і Лагранжа-Максвелла для дисипативних динамічних систем з довільним ступенем вільності : препринт / Ю. Г. Ведміцький / Zenodo. 2026. DOI: https://doi.org/10.5281/zenodo.19334526

ІНФОРМАЦІЯ ПРО АВТОРА

Юрій Григорович Ведміцький — кандидат технічних наук, доцент, доцент кафедри комп'ютеризованих електромеханічних систем і комплексів, Вінницький національний технічний університет, м. Вінниця, Україна.

Yurii Hryhorovych Vedmitskyi — Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Associate Professor of the Department of Computerized Electromechanical Systems and Complexes, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia, Ukraine.

Email: vedmiczkyi.y.g@vntu.edu.ua; wjg4224@gmail.com