

## ПЕРЕТВОРЕННЯ ФУР'Є У ЦИФРОВІЙ ОБРОБЦІ СИГНАЛІВ

Вінницький національний технічний університет;

### *Анотація.*

*Розглядаються математичні основи перетворення Фур'є та його дискретної форми у контексті цифрової обробки сигналів. Приділено увагу алгоритму швидкого перетворення Фур'є як ефективному методу обчислення спектральних характеристик сигналів. Досліджено основні сфери застосування перетворення Фур'є в радіотехнічних і телекомунікаційних системах, зокрема у спектральному аналізі, фільтрації сигналів та багаточастотній модуляції.*

**Ключові слова:** перетворення Фур'є, цифровий сигнал, модуляція, телекомунікації.

### **Abstract**

*This paper examines the mathematical framework of the Fourier transform and its discrete form in the context of digital signal processing. Special attention is given to the fast Fourier transform algorithm as an efficient method for calculating the spectral characteristics of signals. The main applications of the Fourier transform in radio engineering and telecommunication systems are described, particularly in spectral analysis, signal filtering, and multicarrier modulation.*

**Keywords:** Fourier transform, signal, digital signal, modulation, telecommunications.

### **Вступ**

Перетворення Фур'є є одним із ключових математичних методів для аналізу сигналів у частотній області. У цифровій обробці сигналів (ЦОС) воно застосовується для спектрального аналізу, фільтрації, модуляції та інших важливих операцій, які мають широкий спектр застосувань у радіотехніці та телекомунікаціях. Швидке перетворення Фур'є (FFT) значно прискорює обчислення, що особливо важливо для обробки сигналів у режимі реального часу. Завдяки його ефективності можливе швидке виконання складних розрахунків, що робить FFT незамінним інструментом у сучасних технологіях передачі та обробки інформації.

### **Результати дослідження**

Сучасна методологія цифрової обробки сигналів базується на методах цифрової фільтрації та ґрунтується на прямому і зворотному дискретному перетворенні Фур'є.

Аналіз Фур'є бере свій початок із публікації роботи Жозефа Фур'є у 1822 році. Відтоді він отримав широке визнання, розвинувся та знайшов застосування в багатьох наукових і технічних галузях. Серед усіх можливих перетворень найбільш відомими та важливими є дискретне перетворення Фур'є (ДПФ) та його ефективний алгоритм обчислення – швидке перетворення Фур'є (ШПФ).

Ці методи мають ряд ключових переваг:

- вони дозволяють зручно представити сигнали в частотній області, за винятком дуже короткочасних (менше 1 с) сигналів;
- усічені за частотою компоненти ряду Фур'є забезпечують більш точне відтворення даних порівняно з іншими розкладаннями, такими як степеневі ряди.

Ряд Фур'є

Будь-який періодичний сигнал можна подати у вигляді суми нескінченної кількості синусоїдальних і косинусоїдальних гармонік разом із постійною складовою. Таке представлення називається рядом Фур'є і визначається наступним чином:

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)) \quad (1)$$

Частоти називають  $p$ -ми гармоніками частоти. Таким чином, нескінченний ряд (1) містить синусоїдальні та косинусоїдальні складові, що залежать від частоти, з різними амплітудами та на позитивних частотах гармонік.

Цей ряд можна записати більш компактно за допомогою експоненціального представлення, що значно спрощує виконання математичних операцій:

Таке представлення полегшує аналіз і обробку сигналів у частотній області, що є важливим у застосуваннях цифрової обробки сигналів, комунікацій та спектрального аналізу.

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n e^{in\pi t} \quad (2)$$

#### Цифрова обробка сигналів та перетворення Фур'є

На практиці Фур'є-компоненти сигналу отримуються шляхом цифрових обчислень, а не аналогової обробки. Оскільки аналоговий сигнал містить нескінченну кількість неперервних значень, описати всі їхні параметри неможливо. Тому для використання в цифровій системі аналогові дані потрібно дискретизувати, тобто фіксувати значення через рівні проміжки часу. Далі отримані вибірки перетворюють у цифровий бінарний формат, що дозволяє здійснювати їх подальший аналіз та обробку.

Один із основних методів роботи з дискретними сигналами – дискретне перетворення Фур'є (ДПФ). Його алгоритмічні особливості дозволяють представити сигнал у частотній області, що є ключовим для спектрального аналізу, фільтрації та інших операцій. Однак обчислення ДПФ є ресурсомісткими, тому було розроблено його оптимізовану версію – швидке перетворення Фур'є (ШПФ), яке значно зменшує кількість необхідних операцій та підвищує швидкість обчислень.

#### Алгоритми ШПФ.

Існують два основні підходи до реалізації ШПФ:

- ШПФ із проріджуванням у часі (часова децимація) – застосовується в часовій області;
- ШПФ із проріджуванням у частоті (частотна децимація) – працює у частотній області.

Використання цих алгоритмів дозволяє значно скоротити час обробки даних та робить можливим їхнє застосування в реальному часі.

#### Продуктивність алгоритму

ШПФ із проріджуванням у часі передбачає чітке розуміння взаємозв'язку між вихідними та вхідними елементами перетворення. Для малих обсягів цифрових даних ( $n < 10$ ) швидкодія цього алгоритму майже не перевищує стандартні методи. Проте, при значному збільшенні обсягу даних ( $n > 1000$ ), продуктивність ШПФ суттєво зростає.

Розподіл цифрової послідовності на дві рівні частини з подальшим поділом кожної отриманої частини дозволяє ще більше підвищити швидкість обробки сигналів. Цей метод у поєднанні з алгоритмами проріджування у частотній області забезпечує мінімізацію часу обробки без втрати точності результатів. Таким чином, ШПФ є незамінним інструментом у цифровій обробці сигналів, що знаходить широке застосування у сфері телекомунікацій, аудіо- та відеообробки, а також у наукових дослідженнях.

#### Висновок

Перетворення Фур'є є основним математичним інструментом у цифровій обробці сигналів, що знаходить широке застосування в радіотехніці та телекомунікаціях. Завдяки швидкому перетворенню Фур'є можлива ефективна обробка сигналів у реальному часі, що робить його незамінним у сучасних комунікаційних системах.

#### СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Навчальний посібник: Основи цифрової обробки сигналів; Самборський І.І., Шолохов С.М., Юрченко О.В., Ніколаєнко Б.А.

<https://library.kre.dp.ua/Books/2-4%20kurs/Цифроваобробкаінформаційнихсигналів>

(дата звернення 21.03.25)

2. Особливості застосування перетворення Фур'є у цифровій обробці сигналів;  
Кравченко В. І., Горюшкін А. Е.  
<https://www.kpi.kharkov.ua/archive/MicroCAD/2010/S22/ОСОБЛИВОСТІЗАСТОСУВАННЯ>  
(дата звернення 21.03.2025)

3. Коломієць А.А Теорія і практика фундаменталізації математичної підготовки майбутніх бакалаврів галузі знань «Електроніка та телекомунікації». Дис. д-ра пед. наук: 13.00.04. Рівне, 2023. 628 с. URL:  
[https://www.rshu.edu.ua/images/afto/anons/kolomiec\\_aa\\_disert.pdf](https://www.rshu.edu.ua/images/afto/anons/kolomiec_aa_disert.pdf)  
(дата звернення 1.03.2025).

**Комарніцький Олександр Сергійович** – студент групи ПЗТ-23б, факультет інформаційних електронних систем, Вінницький національний технічний університет, Вінниця, e-mail : [alexandrkom2006@gmail.com](mailto:alexandrkom2006@gmail.com)

**Коломієць Альона Анатоліївна** — д. пед. н, доцент, професор кафедри вищої математики, Вінницький національний технічний університет, Вінниця, e-mail: [kolomiets@vntu.edu.ua](mailto:kolomiets@vntu.edu.ua)

**Oleksandr Serhiyovych Komarnytskyi** – student of group PZT-23b, Faculty of Information Electronic Systems, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia, e-mail: [alexandrkom2006@gmail.com](mailto:alexandrkom2006@gmail.com)

**Kolomiets Alyona Anatoliivna** — Doctor of Pedagogy, Associate Professor, Professor of the Department of Higher Mathematics, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia, e-mail: [kolomiets@vntu.edu.ua](mailto:kolomiets@vntu.edu.ua)