

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНА ФОРМА КРИТЕРІЮ ВІДНОВЛЮВАНOSTІ ДЛЯ ЛІНІЙНИХ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ

Вінницький національний технічний університет.

Анотація

Знання повноформатного вектора стану динамічної системи є важливим як з точки зору прогнозування поведінки сигналів на її виходах, так й при синтезі керівної функції, за допомогою якої здійснюється цілеспрямований вплив на поведінку системи. На практиці, у переважній більшості, вектор стану системи у повному обсязі безпосередньо недоступний для спостережень, а наявні результати спостережень є не зовсім точними. У такому випадку мова може йти тільки про оцінку вектора стану. Якщо є можливість враховувати випадкові похибки за наявності додаткових статистичних подробиць можна сподіватися на досягнення кращих або навіть оптимальних результатів, застосовуючи при цьому методи теорії ймовірності. Для таких динамічних систем надважливими критеріями є відновлюваність та керованість. Особлива потреба в них постає при розгляді МІМО об'єктів, оскільки вони у більшості практичних випадків є виродженими, а їх дослідження спряжено з значними труднощами. Метою даної роботи є синтез диференціальної форми критерію відновлюваності, як більш гнучкого та ефективного інструменту для задач фільтрації сигналів та проєктування вимірювачів слідкуючого типу систем реального часу.

Ключові слова: лінійна динамічна система, відновлюваність лінійних динамічних систем, диференціальний критерій відновлюваності.

Abstract

Knowledge of the full-format dynamic system state vector is important and fundamental not only from the point of predicting view the signals behavior at its outputs, but also in the synthesis of the control function for purposeful influence on the system behavior. In the vast majority of cases, however, the system full state vector isn't directly available for observation, and the available results are not entirely accurate. In such a case, we can only speak about the estimation of the state vector. If there is a possibility to take into account random errors in the presence of additional statistical information, one can hope to achieve better or even optimal results, while applying the methods of probability theory. Observability and controllability are fundamental criteria for dynamical systems of such a class. A special need arises when considering MIMO objects, since they are degenerate in most practical cases, and their study involves significant difficulties. The purpose of this paper is to synthesize a differential form of the observability criterion as a more flexible and effective tool for signal filtering and design of real-time tracking type meters.

Keywords: linear dynamical system, observability of linear dynamical systems, observability differential criterion.

Вступ

Знання повноформатного вектора стану динамічної системи важливо і принципово не тільки з точки зору прогнозування поведінки сигналів на її виходах, а й при синтезі керівної функції, за допомогою якої здійснюється цілеспрямований вплив на поведінку системи. Проте, у переважній більшості, вектор стану системи у повному обсязі безпосередньо недоступний для спостережень, чи то з чисто економічних міркувань, чи то з суто технічної точки зору. Наприклад, траєкторію руху центра мас матеріального об'єкту часто апроксимують степеневими рядами, коефіцієнти яких можуть являти собою: віддаль, швидкість, прискорення плюс старші похідні, які не мають навіть назви, оскільки фізично їх неможливо вимірювати. У даному випадку чутливими елементами можуть бути сенсори швидкості та прискорення. Зрозуміло, що повноформатний вектор стану повинен відновлюватися лише на основі доступних результатів спостережень, виконуваних на виході динамічної системи. Не виключено, що результати вимірювань будуть не зовсім точними, тоді результат відновлення вектора стану з обмеженої кількості спостережень буде наближеним. У цьому разі, мова може йти тільки про оцінку вектора стану. Якщо вищезгадана проблема вирішується у детермінований спосіб і без урахування похибок результатів спостережень у явній формі, то така задача класифікується як задача ди-

намічного відновлення. Якщо є можливість враховувати випадкові похибки за наявності додаткових подробиць, наприклад, відоме математичне сподівання, кореляційні моменти похибок та тощо, то можна сподіватися на досягнення кращих або навіть оптимальних результатів, застосовуючи при цьому методи теорії ймовірності. У такому разі мова іде про задачу оцінювання або фільтрації, де похибки спостережень та непередбачувані збурення трактуються, як випадкові процеси і відображаються шляхом уведення неконтрольованих додаткових входів. Для вищезгаданих динамічних систем надважливими критеріями є відновлюваність та керованість.

Керованість динамічної системи дозволяє перевести стан системи з будь-якого початкового стану в будь-який кінцевий стан за певний, обмежений час, а відновлюваність – можливість точно відновити її стан у будь-який момент часу використовуючи тільки її вихідні параметри. Особлива потреба в цих концептуальних ствердженнях постає при розгляді МІМО об'єктів, оскільки вони у більшості практичних випадків є виродженими, а їх дослідження спряжено з значними труднощами.

Постановка задачі

Відомо, що поведінка динамічної системи у часі може бути визначена за наступних умов [1, 3]: наявності математичної моделі системи та достовірних знань про початкові умови та вхідні діяння на усьому часовому інтервалі спостереження. Припустимо, що у наявності є математична модель лінійної динамічної системи, яка виражена у термінах змінних станів:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{s}}(t) &= \mathbf{\Sigma}(t)\mathbf{s}(t) + \mathbf{\Gamma}(t)\mathbf{u}(t), \quad \mathbf{s}(t_0) = \mathbf{s}_0, \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{H}(t)\mathbf{s}(t).\end{aligned}\tag{1}$$

де $\mathbf{s}(t)$ – вектор стану розміру $(n \times 1)$; $\mathbf{u}(t)$ – вектор входу розміру $(p \times 1)$; $\mathbf{y}(t)$ – вектор виходу розміру $(m \times 1)$; $\mathbf{\Sigma}(t), \mathbf{\Gamma}(t), \mathbf{H}(t)$ – системні матриці відповідних розмірів. Вважаються точно відомими: вектор вхідного діяння $\mathbf{u}(t)$ у інтервалі спостережень $[t_0, t_1]$ та системні матриці $\mathbf{\Sigma}(t), \mathbf{\Gamma}(t), \mathbf{H}(t)$.

Припустимо, що $\mathbf{u}(t)$ – точно відома функція часу для усіх $t \geq t_0$, однак $\mathbf{s}(t_0)$ – невідома величина. Необхідно визначити $\mathbf{s}(t)$ на основі спостережень $\mathbf{y}(t)$ у деякому обмеженому часовому інтервалі $[t_0, t_1]$. Очевидно, що якщо матриця $\mathbf{H}(t)$ є квадратною, має порядок $(n \times n)$ і несингулярна для усіх $t \geq t_0$, то питання відновлюваності $\mathbf{s}(t)$ вирішується тривіально, як $\mathbf{s}(t) = \mathbf{H}^{-1}(t) \mathbf{y}(t)$. Проте, якщо матриця $\mathbf{H}(t)$ є сингулярною для усіх $t \geq t_0$, або $\mathbf{H}(t)$ – прямокутна розміру $(m \times n)$, $m \neq n$, то стає незрозумілим, як можна визначити $\mathbf{s}(t)$ з $\mathbf{y}(t)$ при $t_0 \leq t \leq t_1$ за деякого заданого t_1 . З урахуванням цього зауваження, уведемо наступне означення відновлюваності [2, 4]:

Лінійна система (1) зі змінними параметрами називається відновлюваною, якщо можна визначити $\mathbf{s}(t_0)$, знаючи $\mathbf{y}(t)$ на часовому інтервалі $t_0 \leq t \leq t_1$ для деякого заданого кінцевого значення t_1 . Якщо це справедливо для будь-якого t_0 , то систему називають відновлюваною повністю.

Критерій відновлюваності, необхідні та достатні умови визначаються наступною теоремою:

Лінійна система (1) є відновлюваною тоді і тільки тоді, коли симетрична матриця розміром $(n \times n)$

$$\mathbf{N}_H(t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} \mathbf{\Phi}^T(t, t_0) \mathbf{H}^T(t) \mathbf{H}(t) \mathbf{\Phi}(t, t_0) dt\tag{2}$$

є позитивно означеною для деякого заданого кінцевого значення $t_1 \geq t_0$.

Як зазначалося в [4], вище згаданий інтегральний критерій відновлюваності важко застосовувати на практиці через великий обсяг обчислень, однак справу можна поправити, якщо перейти до його запису у диференціальній формі або у формі різницьових рівнянь, де прослідковується явний зв'язок з критерієм найменших квадратів. Отримаємо цей результат скориставшись математичним формалізмом роботи [5]. Запишемо (2), у еквівалентній формі:

$$\mathbf{\Phi}^T(t, t_0) \mathbf{N}_H(t, t_0) \mathbf{\Phi}(t, t_0) = \int_{t_0}^t \mathbf{\Phi}^T(\tau, t_0) \mathbf{H}^T(\tau) \mathbf{H}(\tau) \mathbf{\Phi}(\tau, t_0) d\tau.\tag{3}$$

Виконаємо операцію диференціювання за змінною t . Результат диференціювання лівої частини (3) матиме вигляд: $\mathbf{\Phi}^T(t, t_0) \left[\mathbf{\Sigma}^T(t) \mathbf{N}_H(t, t_0) + \frac{d}{dt} \mathbf{N}_H(t, t_0) + \mathbf{N}_H(t, t_0) \mathbf{\Sigma}(t) \right] \mathbf{\Phi}(t, t_0)$.

Результат диференціювання правої частини (3) за змінною t дає підінтегральний вираз, у якому змінна інтегрування замінена значенням верхньої межі інтегрування, тобто $\Phi^T(t, t_0) \mathbf{H}^T(t) \mathbf{H}(t) \Phi(t, t_0)$. Оскільки, рівність (2) не повинна порушуватися і після операції інтегрування, то звідси випливає рівність

$$\Sigma^T(t) \mathbf{N}_H(t, t_0) + \frac{d}{dt} \mathbf{N}_H(t, t_0) + \mathbf{N}_H(t, t_0) \Sigma(t) = \mathbf{H}^T(t) \mathbf{H}(t). \quad (4)$$

У підсумку отримуємо диференціальне рівняння для матриці відновлюваності

$$\frac{d}{dt} \mathbf{N}_H(t, t_0) = -\Sigma^T(t) \mathbf{N}_H(t, t_0) - \mathbf{N}_H(t, t_0) \Sigma(t) + \mathbf{H}^T(t) \mathbf{H}(t), \quad (5)$$

де відпадає необхідність обчислення перехідної матриці станів $\Phi(t, t_0)$.

На другому етапі скористаємося рівнянням

$$\int_{t_0}^{t_1} \Phi^T(t, t_0) \mathbf{H}^T(t) \mathbf{y}(t) dt = \left[\int_{t_0}^{t_1} \Phi^T(t, t_0) \mathbf{H}^T(t) \mathbf{H}(t) \Phi(t, t_0) dt \right] \mathbf{s}(t_0). \quad (6)$$

Добуток $\mathbf{N}_H(t, t_0) \mathbf{s}(t_0)$ позначимо введенням нової змінної $\phi(t)$ та виконаємо диференціювання за змінною t , і урахуємо властивість перехідної матриці станів. Результатом буде диференціальне рівняння для змінної $\phi(t)$, яке еквівалентне інтегральному рівнянню (6):

$$\frac{d\phi(t)}{dt} = -\Sigma^T(t) \phi(t) + \mathbf{H}^T(t) \mathbf{y}(t)$$

На третьому етапі запишемо $\mathbf{N}_H^{-1}(t, t_0)$ у диференціальній формі. Для цього скористаємося диференціюванням тотожності $\mathbf{N}_H^{-1}(t, t_0) \mathbf{N}_H(t, t_0) = \mathbf{I}$. Результатом операції буде вираз $\frac{d}{dt} \mathbf{N}_H^{-1}(t, t_0) \mathbf{N}_H(t, t_0) + \mathbf{N}_H^{-1}(t, t_0) \frac{d}{dt} \mathbf{N}_H(t, t_0) = 0$. Якщо помножити його праворуч на $\mathbf{N}_H^{-1}(t, t_0)$, то отримаємо

$$\frac{d}{dt} \mathbf{N}_H^{-1}(t, t_0) = -\mathbf{N}_H^{-1}(t, t_0) \frac{d}{dt} \mathbf{N}_H(t, t_0) \mathbf{N}_H^{-1}(t, t_0). \quad (7)$$

Підстановка (5) у (7) приводить до підсумкового результату у вигляді

$$\dot{\mathbf{N}}_H^{-1}(t, t_0) = \Sigma(t) \mathbf{N}_H^{-1}(t, t_0) + \mathbf{N}_H^{-1}(t, t_0) \Sigma^T(t) + \mathbf{N}_H^{-1}(t, t_0) \mathbf{H}^T(t) \mathbf{H}(t) \mathbf{N}_H^{-1}(t, t_0). \quad (8)$$

Вираз (8) являє собою нелінійне матричне диференціальне рівняння Ріккати, яке еквівалентне рівнянню (5) у випадку повністю відновлюваних систем.

На заключному етапі отримаємо диференціальне рівняння у вигляді, зручному для безпосереднього обчислення відновлюваного стану $\mathbf{s}(t)$. Слід зазначити, що за умови неточних спостережень, мова може йти лише про оцінку стану системи, тому щоб залишатись у руслі загальноприйнятих позначень уведемо нове позначення $\mathbf{s}(t) \triangleq \mathbf{s}^*(t)$. Далі виконаємо низку перетворень:

– операцію диференціювання добутку $\mathbf{N}_H(t, t_0) \mathbf{s}^*(t)$

$$\frac{d}{dt} \mathbf{N}_H(t, t_0) \mathbf{s}^*(t) = \frac{d}{dt} \mathbf{N}_H(t, t_0) \mathbf{s}^*(t) + \mathbf{N}_H(t, t_0) \frac{d}{dt} \mathbf{s}^*(t) = -\Sigma^T(t) \phi(t) + \mathbf{H}^T(t) \mathbf{y}(t);$$

– помножимо отриманий вираз ліворуч на $\mathbf{N}_H^{-1}(t, t_0)$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathbf{s}^*(t) &= -\mathbf{N}_H^{-1}(t, t_0) \frac{d}{dt} \mathbf{N}_H(t, t_0) \mathbf{s}^*(t) - \mathbf{N}_H^{-1}(t, t_0) \Sigma^T(t) \mathbf{N}_H(t, t_0) \mathbf{s}^*(t) + \mathbf{N}_H^{-1}(t, t_0) \mathbf{H}^T(t) \mathbf{y}(t) \\ &= \mathbf{N}_H^{-1}(t, t_0) \Sigma^T(t) \mathbf{N}_H(t, t_0) \mathbf{s}^*(t) + \mathbf{N}_H^{-1}(t, t_0) \mathbf{H}^T(t) \mathbf{y}(t); \end{aligned}$$

– замість похідної $\frac{d}{dt} \mathbf{N}_H(t, t_0)$ підставимо її вираз із (5) та зберемо складові, що містять $\mathbf{s}(t)$, тоді

отримаємо підсумковий результат:

$$\frac{d}{dt} \mathbf{s}^*(t) = \mathbf{\Sigma}(t) \mathbf{x}^*(t) + \mathbf{N}^{-1}_{\mathbf{H}}(t, t_0) \mathbf{H}^T(t) [\mathbf{y}(t) - \mathbf{H}(t) \mathbf{s}^*(t)] . \quad (9)$$

Формула (9) описує модель об'єкту у вигляді системи стеження зі зворотним зв'язком, що працює за принципом компенсації похибок.

Висновки

Керованість і відновлюваність – це два фундаментальні аспекти, які забезпечують стабільне функціонування динамічних систем й дозволяють ефективно контролювати її поведінку. Особливо актуально це питання постає для систем виродженого типу.

Отриманий в роботі результат демонструє, що широкий клас задач, пов'язаних із синтезом систем оптимального відновлення, фільтрації та керування можна вирішувати за допомогою однакової систематичної процедури, у основі якої лежить універсальний математичний інструмент – нелінійне матричне рівняння Ріккати. В залежності від типу досліджуваної системи воно може бути презентовано у різних формах: алгебраїчній, диференціальній або різницевій.

Спосіб обчислення матриці відновлюваності у диференціальній формі є більш доступним для використання і може бути вельми ефективним інструментом при дослідженні задач фільтрації сигналів, а також при проектуванні різноманітних вимірювачів слідкуючого типу, зокрема, детермінованих пристроїв відновлення для систем реального часу.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

- 1 Gopal M. Modern Control System Theory. New Age International Publishers, 2014. 572p.
2. Воловик А. Ю., Кичак В. М. Основи теорії функціональних відновлювачів діагностичного типу. Вісник Вінницького політехнічного інституту. 2018. № 3. С. 109-118.
3. Воловик А. Ю. Синтез відновника вектора стану динамічної системи за наявності неконтрольованих збурень. Радіотехнічні поля, сигнали, апарати та системи: Матеріали міжнародної науково-технічної конференції РТПСАС 2017, 20–26 березня 2017 р., Київ, 2017. С. 41-43.
4. Воловик А.Ю., Червак О.П., Шутило М.А. Інтегральний критерій відновлюваності лінійних динамічних систем // Матеріали LIII науково-технічної конференції підрозділів Вінницького національного технічного університету (НТКП ВНТУ-2024), Вінниця. - С.1143-1145. <https://press.vntu.edu.ua/index.php/vntu/catalog/view/832/1453/2726-1>.
5. Brammer K., Siffing G. Kalman-Bucy-Filter: Deterministische Beobachtung und stochastische Filterung. Walter de Gruyter 4., verb. Aufl. 2014. 232 p..

Воловик Андрій Юрійович – доктор технічних наук, доцент кафедри інформаційних радіоелектронних технологій і систем, Вінницький національний технічний університет, Вінниця, e-mail: voland@vntu.edu.ua.

Червак Оксана Петрівна – провідний інженер кафедри інформаційних радіоелектронних технологій і систем, Вінницький національний технічний університет, Вінниця, e-mail: oksana_chervak@ukr.net.

Шутило Микола Артемович – провідний інженер кафедри інформаційних радіоелектронних технологій і систем, Вінницький національний технічний університет, Вінниця.

Volovyk Andrii U. – Dr. Sc. (Eng.), Associate Professor of Radio engineering, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia, e-mail: voland@vntu.edu.ua.

Shutilo Mikola. A. – Senior Engineer of Radio engineering, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia.

Chervak Oksana. P. – Senior Engineer of Radio engineering, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia, e-mail: oksana_chervak@ukr.net.

Shutilo Mikola. A. – Senior Engineer of Radio engineering, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia.