УДК 621.3

Ю. Г. Ведміцький

ДРОБОВО-РАЦІОНАЛЬНА ФУНКЦІЯ ЗОБРАЖЕННЯ ЗА ЛАПЛАСОМ МЕТОДИЧНОЇ ПОХИБКИ В РОЗВ'ЯЗКУ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ СТАЦІОНАРНОГО ЕЛЕКТРИЧНОГО КОЛА ЗА НЕНУЛЬОВИХ ПОЧАТКОВИХ УМОВ

Вінницький національний технічний університет

Анотація

В роботі проведено математичну ідентифікацію фізичних процесів, що спостерігаються під час еволюції стаціонарного електричного кола за нульових та ненульових початкових умов в фундаментальній задачі Коші. На підставі здійсненого порівняльного аналізу (за інтегральним перетворенням Лапласа) отримано дробово-раціональну функцію зображення методичної похибки, що з'являється в розв'язку диференціального рівняння у разі штучної тривіалізації ненульових за умовою задачі початкових умов. Отримані результати створюють математичне підґрунтя для корегування відомих методів аналізу перехідних процесів як в стаціонарних електричних колах, так і в динамічних системах іншої фізичної природи.

Ключові слова: теоретична електротехніка, стаціонарне електричне коло, динамічна система, перехідний процес, диференціальне рівняння, задача Коші, нульові та ненульові початкові умови, інтегральне перетворення Лапласа, методична похибка, напруги, струми

Abstract

This paper performs a mathematical identification of physical processes observed during the evolution of a time-invariant electrical circuit under zero and non-zero initial conditions within the fundamental Cauchy problem. Based on a comparative analysis (using the Laplace integral transform), a rational function representation has been obtained for the methodological error that arises in the solution to the differential equation in the case of artificial trivialization of initial conditions that are non-zero by the problem definition. The results obtained establish a mathematical foundation for correcting well-known methods of transient analysis both in stationary electrical circuits and in dynamic systems of other physical natures.

Keywords: theoretical electrical engineering, time-invariant electrical circuit, dynamic system, transient process, differential equation, Cauchy problem, zero and non-zero initial conditions, Laplace integral transform, methodological error, voltages, currents

Теоретичні основи електротехніки є математично точною наукою і оперують не тільки поняттями, що наділені якісним змістом, але і його кількісними характеристиками [1-9].

Розв'яжемо задачу визначення *в операторній формі* зображення (за інтегральним перетворенням Лапласа) функції-спотворення, яка з'являється повсякчас там і тоді, де і коли, застосовуючи операторний метод розрахунку перехідних процесів в стаціонарних електричних колах, керуються загальноприйнятими підходами та ігнорують ненульові початкові умови в фундаментальній задачі Коші навіть тоді, коли характер отримуваних результатів, як наслідок, починає набувати вже антагоністичного забарвлення у відносинах з логікою здорового глузду.

Задачу розв'яжемо в узагальненому вигляді – інваріантно відносно топологічної структури електричного кола.

Для цього розглянемо довільне за топологічною структурою лінійне електричне коло, але з одним джерелом електричної енергії (е.р.с. або струму), де зазначене джерело слугуватиме генератором збурення динамічної системи дією $x(t)$. Реакцією на таку дію слугуватиме функція $y(t)$ або струму в будь-якій вітці, або напруги на будь-якій ділянці зазначеного кола.

Кількісний зв'язок поміж дією та реакцією на неї встановлюється математичним оператором, що належить до класу лінійних звичайних диференціальних рівнянь:

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \frac{d^k y}{d t^k} = \sum_{s=0}^{m} b_s \frac{d^s x}{d t^s}, \qquad (1)$$

отриманих на підставі фізичних законів, які підпорядковують собі силові та енергетичні процеси, що спостерігаються в технічній системі, а також математичних співвідношень, які виявляють основні властивості окремо узятих основних елементів, з яких складається система. У разі електричного кола із зосередженими параметрами такими фізичними законами слугують закони Кірхгофа, а математичними виразами – співвідношення, які в теоретичній електротехніці отримали назву "компонентних співвідношень".

Оскільки розв'язок заявленої задачі має бути представлений в операторній формі, скористаємося інтегральним перетворенням Лапласа і перейдемо до зображень: спочатку вхідної дії та реакції на неї електричного кола

$$X(p)=\int_0^{\infty} x(t)e^{-pt}\,dt = L\{x(t)\},$$
$$Y(p)=\int_0^{\infty} y(t)e^{-pt}\,dt = L\{y(t)\}, \tag{2}$$

а потому – функцій лінійних комбінацій лівої і правої частин диференціального рівняння (1):

$$L\left\{\sum_{k=0}^{n} a_k \frac{d^k y}{dt^k}\right\} = L\left\{\sum_{s=0}^{m} b_s \frac{d^s x}{dt^s}\right\}. \tag{3}$$

Відносно отриманого алгебраїчного рівняння (3) скористаємося лінійною властивістю інтегрального перетворення Лапласа

$$\sum_{k=0}^{n} a_k L\left\{\frac{d^k y}{dt^k}\right\} = \sum_{s=0}^{m} b_s L\left\{\frac{d^s x}{dt^s}\right\}. \tag{4}$$

Теорема про диференціювання оригіналу, відповідно до якої:

$$L\left\{\frac{d^s x}{dt^s}\right\} = p^s X(p) - \left[p^{s-1}x(0_+) + p^{s-2}x'(0_+) + \cdots + p\,x^{(s-2)}(0_+) + x^{(s-1)}(0_+)\right] =$$
$$= p^s X(p) - \sum_{\tau=0}^{s-1} p^{\tau}\, x^{(k-\tau-1)}(0_+), \tag{5}$$

$$L\left\{\frac{d^k y}{dt^k}\right\} = p^k Y(p) - \left[p^{k-1}y(0_+) + p^{k-2}y'(0_+) + \cdots + p\,y^{(k-2)}(0_+) + y^{(k-1)}(0_+)\right] =$$
$$= p^k Y(p) - \sum_{\nu=0}^{k-1} p^{\nu}\, y^{(k-\nu-1)}(0_+), \tag{6}$$

завершить процедуру математичних перетворень.

Таким чином, математичний зв'язок поміж функціями зображень вхідної дії $X(p)$ та реакції на неї $Y(p)$ набуває вигляду:

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \left[p^k Y(p) - \sum_{\nu=0}^{k-1} p^{\nu}\, y^{(k-\nu-1)}(0_+)\right] = \sum_{s=0}^{m} b_s \left[p^s X(p) - \sum_{\tau=0}^{s-1} p^{\tau}\, x^{(k-\tau-1)}(0_+)\right], \tag{7}$$

або

$$Y(p)\sum_{k=0}^{n} a_k p^k = X(p)\sum_{s=0}^{m} b_s p^s + \sum_{k=0}^{n}\sum_{\nu=0}^{k-1} a_k y^{(k-\nu-1)}(0_+)\, p^{\nu} - \sum_{s=0}^{m}\sum_{\tau=0}^{s-1} b_s\, x^{(k-\tau-1)}(0_+)\, p^{\tau}. \tag{8}$$

Відповідно до загальноприйнятих в теоретичній електротехніці правил визначення передаточної функції динамічної системи здійснюють *за нульових початкових умов*.

Математично це означає штучний та примусовий перехід від рівняння (8) до наближеного рівняння:

$$Y^*(p)\sum_{k=0}^{n} a_k p^k = X(p)\sum_{s=0}^{m} b_s p^s, \tag{9}$$

яке водночас передбачає і наближений характер його розв'язку.

Відтак у разі визначення за співвідношенням (9) передатної функції динамічної системи

$$K_y(p)=\frac{Y^*(p)}{X(p)}=\frac{\sum_{s=0}^{m}b_s p^s}{\sum_{k=0}^{n}a_k p^k} \tag{10}$$

її спотворений характер поширюватиметься і на результати подальшого аналізу динаміки системи.

Водночас рівняння (8) і (9)

$$\left.\begin{aligned} Y(p)&=X(p)\frac{\sum_{s=0}^{m}b_s p^s}{\sum_{k=0}^{n}a_k p^k}+\\ &+\frac{\sum_{k=0}^{n}\sum_{\nu=0}^{k-1}a_k y^{(k-\nu-1)}(0_+)\,p^\nu-\sum_{s=0}^{m}\sum_{\tau=0}^{s-1}b_s x^{(k-\tau-1)}(0_+)\,p^\tau}{\sum_{k=0}^{n}a_k p^k};\\ Y^*(p)&=X(p)\frac{\sum_{s=0}^{m}b_s p^s}{\sum_{k=0}^{n}a_k p^k} \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

дозволяють математично виявити і оцінити заявлену методичну похибку.

В наявній роботі зробимо це в операторній формі.

Тоді для операторного зображення (за Лапласом) методичної похибки маємо дробово-раціональну функцію

$$\begin{aligned}\Delta Y(p)&=Y(p)-Y^*(p)=\\ &=\frac{\sum_{k=0}^{n}\sum_{\nu=0}^{k-1}a_k y^{(k-\nu-1)}(0_+)\,p^\nu}{\sum_{k=0}^{n}a_k p^k}-\frac{\sum_{s=0}^{m}\sum_{\tau=0}^{s-1}b_s x^{(k-\tau-1)}(0_+)\,p^\tau}{\sum_{k=0}^{n}a_k p^k},\end{aligned} \tag{12}$$

як це безпосередньо і випливає з рівнянь (11), яка за структурою виявляє себе як функція, що складається з двох змістових складових, кожна з яких визначається початковими умовами, накладеними включно з похідними водночас і на вхідну дію, і на реакцію стаціонарного електричного кола.

Висновки

В роботі проведено математичну ідентифікацію фізичних процесів, що спостерігаються під час еволюції стаціонарного електричного кола за нульових та ненульових початкових умов в фундаментальній задачі Коші. На підставі здійсненого порівняльного аналізу (за інтегральним перетворенням Лапласа) отримано дробово-раціональну функцію зображення методичної похибки, що з'являється в розв'язку диференціального рівняння у разі штучної тривіалізації ненульових за умовою задачі початкових умов. Отримані результати створюють математичне підґрунтя для корегування відомих методів аналізу перехідних процесів як в стаціонарних електричних колах, так і в динамічних системах іншої фізичної природи.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Теоретичні основи електротехніки: підручник / В. С. Бойко, В. В. Бойко. – К.: ІВЦ "Політехніка", 2004. – 272 с.

2. Математичні методи ідентифікації динамічних систем : навчальний посібник / Б. І. Мокін, В. Б. Мокін, О. Б. Мокін. – Вінниця : ВНТУ, 2010. – 263 с.

3. Теоретичні основи електротехніки. Перехідні процеси в лінійних колах. Синтез лінійних кіл. Електричні та магнітні нелінійні кола: підручник / Ю. О. Карпов, Ю. Г. Ведміцький; за ред. проф. Ю. О. Карпова. – Херсон : ОЛДІ-ПЛЮС, 2019. – 456 с.

4. Теорія автоматичного керування : підручник / М. Г. Попович, О. В. Ковальчук. – К. : Либідь, 2007. – 657 с.

5. Теоретичні основи електротехніки. Електромагнітне поле : підручник / Ю. О. Карпов, Ю. Г. Ведміцький. – Херсон : ОЛДІ-ПЛЮС, 2014. – 392 с.

6. Теоретичні основи електротехніки. Усталені режими лінійних електричних кіл із зосередженими та розподіленими параметрами : підручник / Ю. О. Карпов, С. Ш. Кацив, Ю. Г. Ведміцький; під ред. проф. Ю. О. Карпова – Вінниця : ВНТУ, 2011. – 377 с.

7. Ведміцький Ю. Г. Тектологія динамічних систем і явище гіперсилової взаємодії в структурних рівняннях узагальненого електричного кола / Ю. Г. Ведміцький // Наукові праці Вінницького національного технічного університету. – 2018. – №2. – С. 1-11.

8. Ведміцький Ю. Г. Узагальнення рівнянь Лагранжа та Лагранжа-Максвелла для консервативних динамічних систем з урахуванням дії надінерційних та субпотенціальних сил : препринт / Ю. Г. Ведміцький / Zenodo. 2026. DOI: https://doi.org/10.5281/zenodo.19333411

9. Ведміцький Ю. Г. Інтерактивність дисипативних сил в функціях розсіювання Релея та узагальнені рівняння Лагранжа і Лагранжа-Максвелла для дисипативних динамічних систем з довільним ступенем вільності : препринт / Ю. Г. Ведміцький / Zenodo. 2026. DOI: https://doi.org/10.5281/zenodo.19334526

ІНФОРМАЦІЯ ПРО АВТОРА

Юрій Григорович Ведміцький — кандидат технічних наук, доцент, доцент кафедри комп'ютеризованих електромеханічних систем і комплексів, Вінницький національний технічний університет, м. Вінниця, Україна.

Yurii Hryhorovych Vedmitskyi — Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Associate Professor of the Department of Computerized Electromechanical Systems and Complexes, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia, Ukraine.

Email: vedmiczkyi.y.g@vntu.edu.ua; wjg4224@gmail.com